Scienza e dinamica delle costruzioni



Ing. Giuseppe Mosca

Premessa

La scienza delle costruzioni e la dinamica strutturale negli ultimi anni hanno subito un mutamento radicale soprattutto per l'utilizzo di software sofisticati , per cui le formulazioni matematiche diventano molto complicate e un calcolo o verifica manuale di una struttura è impossibile oltre che improponibile. Ovviamente si deve avere quel bagaglio di conoscenze necessarie per giudicare la attendibilità dei risultati vedere se i dati sono stati correttamente inseriti i software sono interattivi si gioca a scacchi con il PC se si conoscono i risultati attraverso l'inserimento dei dati ed il controllo non automatico ma da parte del progettista al ravvio del calcolo verrò fornita la soluzione corretta. Il calcolo delle strutture è molto complesso vi sarebbero molti argomenti oggetti di approfondimento quali la analisi statica e dinamica non lineare di push-over attraverso l'inserimento di cerniere plastiche , le strutture in acciaio la verifica dei collegamenti , la instabilità delle strutture , utilizzo dei software FEM ect argomenti complessi e pesanti che creano stigma sociale ed esclusione per i quali da moltissimi anni pago conseguenze in termini di disagio psichico. Le prime formule della scienza delle costruzione risalgono agli inizi dell' ottocento con De Saint Venant , Navier , Boussinisques, nella ipotesi di comportamento lineare omogeno e isotropo del materiale, poi con la introduzione di diagrammi elasto-plastici le formule sono state modificate per giungere ad approssimazioni recenti delle curve tensione deformazioni mediante polinomi. La teoria matematicamente molto complessa sia della dinamica che della scienza delle costruzioni , nessuno penserebbe di utilizzare nel 2025 la formula di Navier per la verifica di una trave inflessa, neanche eseguire il calcolo allo S.L.U attraverso iterazioni tabelle e tentativi, gli studenti sono in grado di programmare i professionisti utlizzano software FEM che rendono molto semplice anche la verifica di un impalcato a sezione mista acciaio cls di un ponte a trave continua su più appoggi che simula il reale comportamento della sezione composta con connessioni puntuali di rigidezza k, calcolarne la frequenza fondamentale di oscillazione e la max deflessione. E' stato affrontato il problema della trave con le relative verifiche utilizzando l'effettivo andamento del diagramma tensione deformazione per il materiale riportato per il cls nell'eurodice 2 e approssimato con un polinomio cubico, partendo dalla teoria del de Saint Ventant nella ipotesi di elasticità lineare fino ad una modellazioe FEM per la verifica di sezioni cemento armato coin nuove formule per la flessione e anche per le murature la sezione reagente 7u/3.

Castel di Sangro

Ing. Giuseppe Mosca

Indice

1-Dinamica strutturale

2-Finite Element Method FEM

3-Flutter : la instabilità aereoleastica

4-Le travi composte

5- Le cupole

6- Le aste metalliche tralicciate

7-Edifici a sbalzo

8- Stabilità di torri e serbatoi

9- Ancoranti post-installati

10-Le strutture in vetro

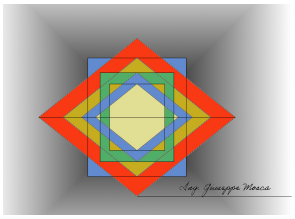
11- Le travi iperstatiche con sezione composta

12-La Verifica delle sezioni dal de Saint Venant al modello FEM

13 - Le strutture composte acciaio -cls

Dinamica strutturale

1-Introduzione
2-Sistema non smorzato
2.1-Vibrazioni libere
2.2-Accelerazione sismica
2.3-Forzante
3- Sistema smorzato
3.1-Vibrazioni libere
3.2-Smorzamento per attrito
3.3-Accelerazione sismica
3.4-Forzante
4-Effetto P-Δ
4.1-Vibrazioni libere
4.2-Accelerazione sismica
4.3-Forzante
5-Integrale di Duammhel
6-Analisi dinamica non lineare
6.1-Metodo di Wilson-θ
6.2-Metodo di Newmark
7-Spettri di risposta
8-Strutture a telaio
8.1-Vibrazioni libere
8.2-Accelerazione sismica
9-Strutture a Telaio Spaziale
10-L'analisi dinamica di edifici isolati
11- Sisma verticale
12-Dinamica di travi continue
121-La trave appoggiata
12.-La mensola
12.-L'arco
14-Conclusioni





N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

La dinamica strutturale in edilizia assume notevole importanza durante gli eventi sismici quando gli edifici oscillano e vibrano velocemente sollecitando dinamicamente gli elementi strutturali che vanno dimensionati e calcolati per le azioni sismiche dinamiche ai vari stati limite. Per edifici in legno o in acciaio le ridotte rigidezze flessionali degli impalcati possono dar luogo a fastidiose vibrazioni dei solai che rendono la struttura inutilizzabile per cui va verificata allo stato limite di esercizio di vibrazione. Attacchi terroristici esplosioni urti possono dar luogo ad vibrazioni casuali della struttura che va calcolata per queste azioni dinamiche eccezionali. Il calcolo dinamico di edifici alti viene eseguito anche per azioni del vento , dove diventano fondamentali le oscillazioni , basti pensare al calcolo di una gru sollecitata da azioni del vento che più o meno tutti hanno visto vibrare pericolosamente.
Un calcolo dinamico prevede la modellazione o meglio la concentrazione delle masse in punti specifici della struttura a ciascuno dei quali corrisponde un grado di libertà ed una equazione di equilibrio alla traslazione e o rotazione. La massa può essere anche considerata continua con un numero infinito di gradi di libertà in tal caso le equazioni di equilibrio dinamico coinvolgono la deformata della struttura nella sua interezza. Lo studio della dinamica strutturale si avvale di equazioni matematiche e di sistemi di equazioni differenziali di secondo grado che hanno tutte la stessa forma , equazioni tipiche dei moti armonici , come il moto circolare uniforme le cui soluzioni sono sinusoidali e coseinodali , o in forma esponenziale per i moti armonici smorzarti ma sempre riconducibili a forme trigonometriche. Ovviamente la caratterizzazione un onda sismica con una funzione armonica è molto distante dalla realtà ,poiché il movimento del terreno in occasione di un terremoto è un vero e proprio scuotimento uno spostamento che viene registrato ed assume una forma molto irregolare. Lo studio della dinamica strutturale degli edifici deve avvenire attraverso accelerogrammi che rappresentano il vero movimento del terreno poiché risultato di una registrazione durante un evento sismico. Lo stesso movimento degli edifici le oscillazioni delle strutture , ma in genere la modellazione strutturale ed il calcolo di verifica sono sempre molto distanti dal comportamento effettivo del materiale per cui sistemi matematici complessi molto spesso si rivelano inutili , sarebbe molto più semplice calcolare un telaio in cemento armato sollecitato da forze orizzontali con il metodo di Kani e dei punti fissi con soluzione immediata anche con semplice foglio elettronico che può essere usato per un dimensionamento degli elementi strutturali travi e pilastri. L'informatica l'evoluzione dei software di calcolo strutturali, hanno rivoluzionato il calcolo delle strutture per cui con estrema rapidità possono essere eseguite analisi dinamiche non lineari step by step di edifici anche molto complessi , le equazioni matematiche possono essere risolte con estrema facilità , di conseguenza la dinamica strutturale negli ultimi 30 anni ha soppiantato il calcolo statico di un edificio per cui ogni ingegnere edile oggi deve avere competenze e nozioni nella dinamica delle strutture che è una materia molto piacevole da studiare e da approfondire anche se estremamente teorica e fondata su concetti di analisi matematica lontani dall'effettivo comportamento del materiale. In questi primi paragrafi ci occupere-

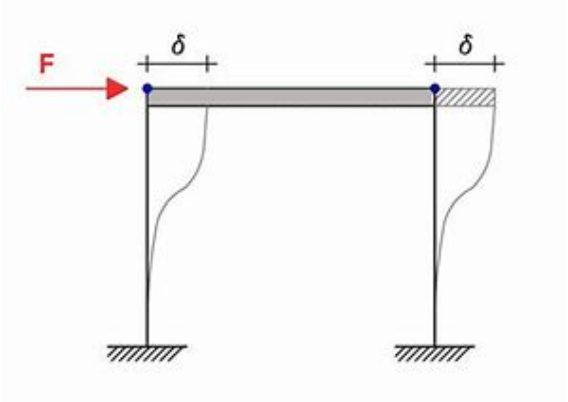
mo di strutture ad un grado di libertà ovvero di portali shear-type , nei paragrafi successivi passeremo ai telai piani ed infine alla modellazione spaziale tridimensionale.

2- Sistema non smorzato

I sistemi non smorzati sono quelli dove non vi è damping , ovvero non vi sono fenomeni viscosi dovuti all'attrito interno dei materiali , alla resistenza dell'aria ed all'attrito del terreno.

2.1 Vibrazioni libere

In questo primo paragrafo studiamo le vibrazioni libere di un portale, dovute alla sola forza di inerzia della massa M concentrata a livello di impalcato :



La forza F è una forza di inerzia $F = -m*Y''$, ad essa si oppone la forza di richiamo elastico del telaio par a $K*Y$

L'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale

$m*Y'' + K*Y = 0 \quad K = 2*12EI/H^3$

è l'equazione dei moti armonici , la cui soluzione assume una forma trigonometrica.

$Y'' + \omega^2 * Y = 0$

con la pulsazione $\omega = \sqrt{(K/m)}$ mente il periodo T misurato in secondi

$T = 2*\pi/\omega$, la frequenza f misurata in hertz $f = 1/T$

L'integrale generale della equazione differenziale

$Y(t) = A*\sin(\omega t) + B* \cos(\omega t)$ dove le costanti di integrazione vanno determinate in funzione delle condizioni iniziali

$Y(0) = Y_0$; $Y'(0) = V_0$;

$B = Y_0$; $Y'(0) = \omega * A*\cos(\omega t) + \omega * B* \sin(\omega t)$

$A = V_0 / \omega$

L'integrale generale assume la forma

$Y(t) = V_0 / \omega * \sin(\omega t) + Y_0 * \cos(\omega t)$

Questa funzione può essere diagrammata in un sistema di assi cartesiani

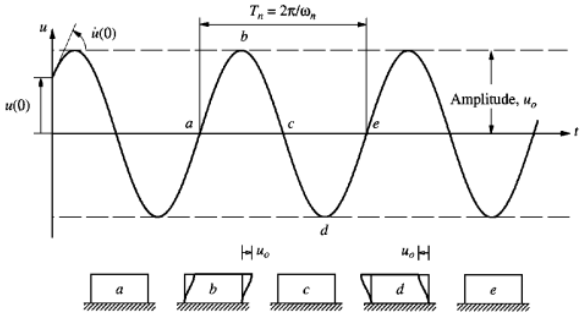


Figure 2.1.1 Free vibration of a system without damping.

Il periodo T rappresenta la distanza tra due punti di massimo o di minimo
L'equazione

$m*Y'' + K*Y = 0$
può essere risolta in modo differente tramite l'integrale generale $Y(t) = e^{pt}$ *sostituendo*

$(m*p^2 + K) * e^{pt} = 0$

$p = \pm i * \sqrt{(K/m)}$ *risulta* $\omega = \sqrt{(K/m)}$

$Y(t) = A_1 * e^{i\omega t} + A_2 * e^{-i\omega t}$ *)

La formula di Eulero

$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$;

$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i \sin\omega t$;

sommando e sottraendo le due equazioni

$(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2 = \cos\omega t$; $(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i = \sin\omega t$;

L'integrale generale è una combinazione lineare $Y(t) = A_1 * e^{i\omega t} + A_2 * e^{-i\omega t}$

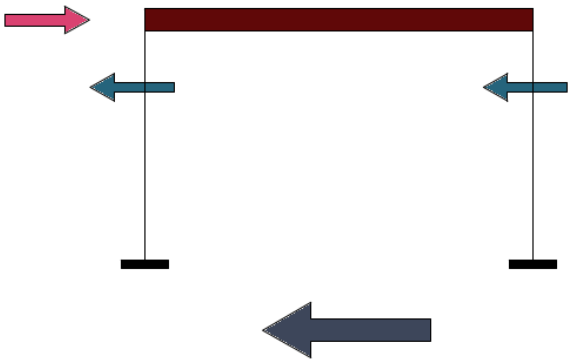
*sostituendo nella *)*

$Y(t) = B_1 * (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2 + B_2 * (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2*i)$

$Y(t) = A * \cos\omega t + B * \sin\omega t$

2.2 Accelerazione sismica

Se sollecitiamo il nostro portale con un accelerazione sismica alla base funzione del periodo fondamentale di vibrazione Sd(T) , l'equazione di equilibrio



$m*Y'' + K*Y = m*Sd(T)$; $Y'' + \omega^2 * Y = Sd(T)$

l'integrale generale della equazione differenziale si compone di un integrale particolare ed un integrale generale della omogenea associata

$Y(t) = A*\sin(\omega t) + B*\cos(\omega t) + Y_O(t)$

L'integrale particolare $Y_O(t) = Sd(T)/\omega^2$

$Y(t) = A*\sin(\omega t) + B*\cos(\omega t) + Sd(T)/\omega^2$

Il nostro portale come il nostro edificio in occasione di un evento sismico è fermo

$Y(0) = 0$; $Y'(0) = 0$;

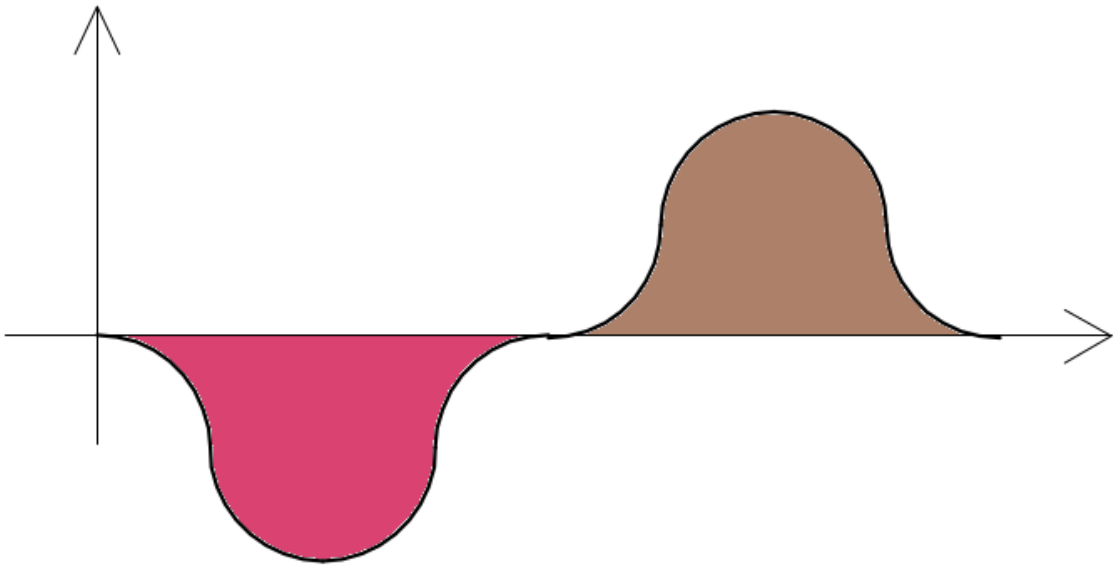
$B = -Sd(T)/\omega^2$; $Y'(0) = 0 = \omega * A*\cos(\omega t) + \omega * B*\sin(\omega t)$; $A = 0$

si evince :

$Y(t) = -Sd(T)/\omega^2 * \cos(\omega t) + Sd(T)/\omega^2 = Sd(T)/\omega^2 * (1-\cos(\omega t))$

$Y(t) = Sd(T)/\omega^2 * [1-\cos(\omega t)]$

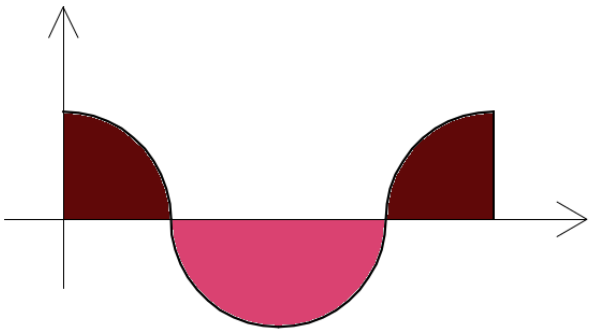
Il diagramma di questa funzione in termini di ***displacements*** *è immediato*



Questa è la motivazione per cui le norme tecniche NTC 2018 tengono conto della fessurazione e dimezzano la rigidezza dei singoli elementi strutturali.

Il calcolo delle sollecitazioni lo si esegue applicando alla struttura le forze di inerzia. La accelerazione $Y''(t) = -Sd(T)*\cos(\omega t)$ *dalla quale si ricava la forza di inerzia*

$F = -M* Sd(T)*\cos(\omega t)$



2.3 Forzante

Se la accelerazione ha una forma sinusoidale

$m*Y'' + K*Y = Fo*\sin(\underline{\omega}*t)$

l'integrale generale ha ancora una forma del tipo

$Y(t) = A*\sin(\omega t) + B*\cos(\omega t) + Y_O(t)$

dove l'integrale particolare

$Y_O(t) = Yo*\sin(\underline{\omega}*t)$

sostituendo nella equazione differenziale

$-m*\underline{\omega}^2*Yo*\sin(\underline{\omega}*t) + K * Yo*\sin(\underline{\omega}*t) = Fo*\sin(\underline{\omega}*t)$

$Yo = Fo/(K-m*\underline{\omega}^2)*\sin(\underline{\omega}*t)$; $Yo = Fo/K/[1-(\underline{\omega}/\omega^2)]*\sin(\underline{\omega}*t)$;

L'integrale della equazione differenziale

$Y(t) = A*\sin(\omega t) + B*\cos(\omega t) + Fo/K/[1-(\underline{\omega}/\omega^2)]*\sin(\underline{\omega}*t)$

Imponendo le condizioni iniziali

$Y(0) = 0$; $Y'(0) = 0$;

$Y'(t) = \omega*A*\cos(\omega t) + B*\omega*\sin(\omega t) + \underline{\omega}*Fo/K/[1-(\underline{\omega}/\omega^2)]*\sin(\underline{\omega}*t)$

$A = -r*Fo/K/[1-r^2]$ $B = 0$ $r = \underline{\omega}/\omega$

L'integrale generale diventa

$Y(t) = +Fo/K/[1-r^2]*\sin(\underline{\omega}*t) - r*Fo/K/[1-(\underline{\omega}/\omega^2)]*\sin(\omega t)$

$Y(t) = Fo/K/[1-r^2]*[\sin(\underline{\omega}*t) - r*\sin(\omega t)]$

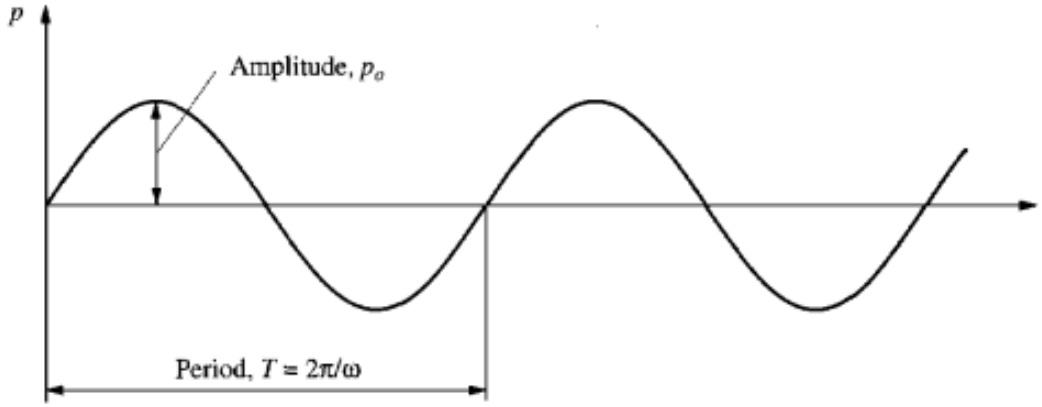
Se la forza $Fo = So*m$ *allora*

$Y(t) = So/\omega^2/[1-r^2]*[\sin(\underline{\omega}*t) - r*\sin(\omega t)]$

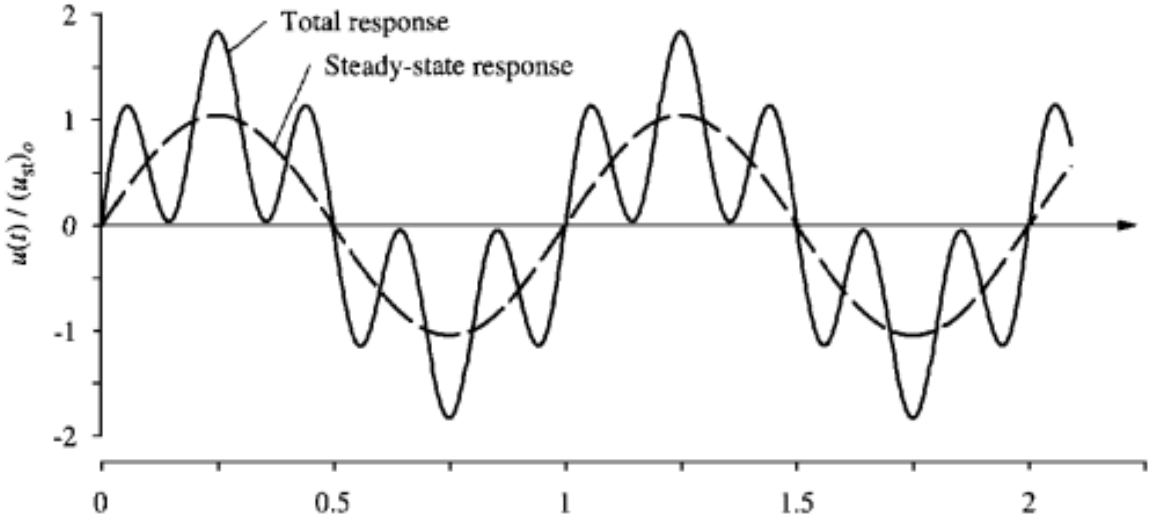
Si possono fare alcune considerazioni sul rapporto tra le due pulsazioni $r = \underline{\omega}/\omega$ *si*

vede che quando $\underline{\omega}$ =ω lo spostamento Y(t) assume valori molto elevati infiniti e si ha il cosiddetto fenomeno della ***risonanza*** .

Il diagramma della funzione $Y(t) = A*\sin(\omega t) + B*\cos(\omega t)$

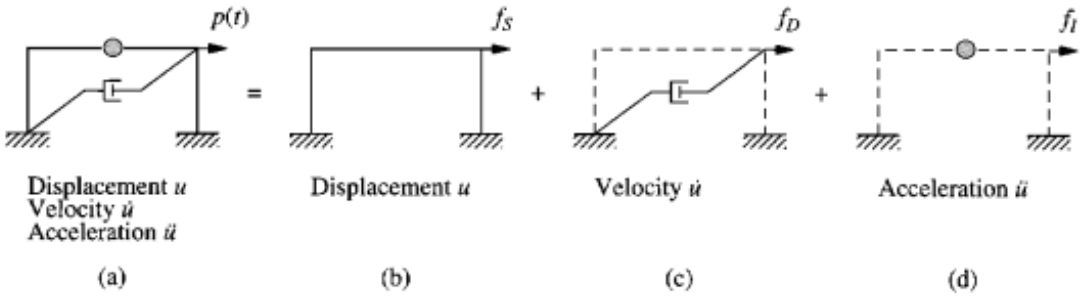


La risposta globale $Y(t)= Fo/K/[1-r^2] *[\sin(\underline{\omega}*t)- r*\sin(\omega t)]$



3- Sistema smorzato

In un sistema smorzato nelle equazioni di equilibrio dinamico va introdotta la forza viscosa funzione della velocità



3.1 Vibrazioni libere

$m*Y'' + c*Y' + K*Y = 0$

Dividendo per la massa m

$Y'' + c/m*Y' + K/m*Y = 0 \qquad \omega^2 = K/m$

La soluzione di questa equazione differenziale è esponenziale nella forma e^{pt} *, sostituendo si ottiene l'equazione caratteristica*

$p^2 * e^{pt} + p*c/m*e^{pt} + K/m* e^{pt} = 0$ *semplificando* e^{pt}

$p^2 + p*c/m + K/m = 0$ *equazione di secondo grado nella incognita p*

che ammette due soluzioni p_1 *e* p_2

$p = -c/(2m) \pm [(c/2m)^2 - K/m]^{1/2}$

possono verificarsi tre situazioni distinte $\xi = c/cr$

$(c/2m)^2 - K/m = 0 \qquad \xi = 1$

$(c/2m)^2 - K/m > 0 \qquad \xi > 1$

$(c/2m)^2 - K/m < 0 \qquad \xi < 1$

Lo smorzamento critico $C_{cr} = 2*\sqrt{(km)} \qquad c = \xi *2*\sqrt{(km)}$
l'equazione può essere scritta nella forma

$Y'' + c/m*Y' + K/m*Y = 0 \qquad \omega^2 = K/m$

$Y'' + \xi * 2 * \sqrt{(k/m)} * Y' + K/m * Y = 0$

$Y'' + 2 * \xi * \omega * Y' + \omega^2 * Y = 0$

La soluzione di questa equazione differenziale è sempre esponenziale nella forma e^{pt} *, sostituendo si ottiene l'equazione caratteristica*

$p^2 + p * 2 * \xi * \omega + \omega^2 = 0$

$p = -\xi * \omega \pm [(\xi * \omega)^2 - \omega^2]^{1/2}$

possono verificarsi tre situazioni distinte come visto in precedenza

$[(\xi * \omega)^2 - \omega^2] = 0 \qquad \xi = 1 \qquad a)$

$[(\xi * \omega)^2 - \omega^2] > 0 \qquad \xi > 1 \qquad b)$

$[(\xi * \omega)^2 - \omega^2] < 0 \qquad \xi < 1 \qquad c)$

Caso a)

p = $-\xi * \omega$*, l'integrale generale della equazione differenziale diventa*

$Y(t) = A * e^{-\xi * \omega t}$

Il diagramma di questa funzione

Caso b) *sistema ipersmorzato*

$[(\xi * \omega)^2 - \omega^2] > 0 \qquad \xi > 1 \quad c > c_{cr} \qquad b)$

Le due soluzioni della equazione differenziale

$p_1 = \omega * [-\xi + (\xi^2 - 1)^{1/2}]$

$p_2 = \omega * [-\xi - (\xi^2 - 1)^{1/2}]$ *L'integrale generale della equazione differenziale*

$Y(t) = A * e^{\omega t * [-\xi - (\xi \,\hat{}\, 2 - 1)\,\hat{}\, 1/2]} + B * e^{\omega t * [-\xi + (\xi \,\hat{}\, 2 - 1)\,\hat{}\, 1/2]}$

Il diagramma di questa funzione Y = Y(t):

Caso c) *sistema sottosmorzato*

$[(\xi * \omega)^2 - \omega^2] < 0 \qquad \xi < 1 \quad c < c_{cr} \qquad c)$

Le due soluzioni della equazione differenziale sono immaginarie

$p_1 = \omega*[-\xi + i*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$

$p_2 = \omega*[-\xi - i*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$ *L'integrale generale della equazione differenziale*

$$Y(t) = A*e^{\omega t*[-\xi - i*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2]} + B*e^{\omega t*[-\xi + i*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2]} =$$

$$= A*e^{-\xi\omega t}*e^{+i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} + B*e^{-\xi\omega t}*e^{-i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} =$$

$$= e^{-\xi\omega t}*[A*e^{+i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} + B*e^{-i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2}] =$$

$$= e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}] + A_2*\sin[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

la formula di Eulero

$$e^{+i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} = \cos[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}] + i*\sin[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

$$e^{-i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} = \cos[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}] - i*\sin[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

sommando e sottraendo le due equazioni

$$[e^{+i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} + e^{-i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2}]/2 = \cos[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

$$[e^{+i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2} - e^{-i\omega t*(\xi \wedge 2 - 1)\wedge 1/2}]/(2i) = \sin[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

Il diagramma di questa funzione imponendo le condizioni iniziali

$Y(0) = S_0$; $\quad Y'(0) = V_0$;

$$Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}] + A_2*\sin[\omega t*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$$

poniamo $\omega_D = \omega*(\xi^2 - 1)^{1/2}$

$$Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos\omega_D t + A_2*\sin\omega_D t]$$

L'integrale diventa :

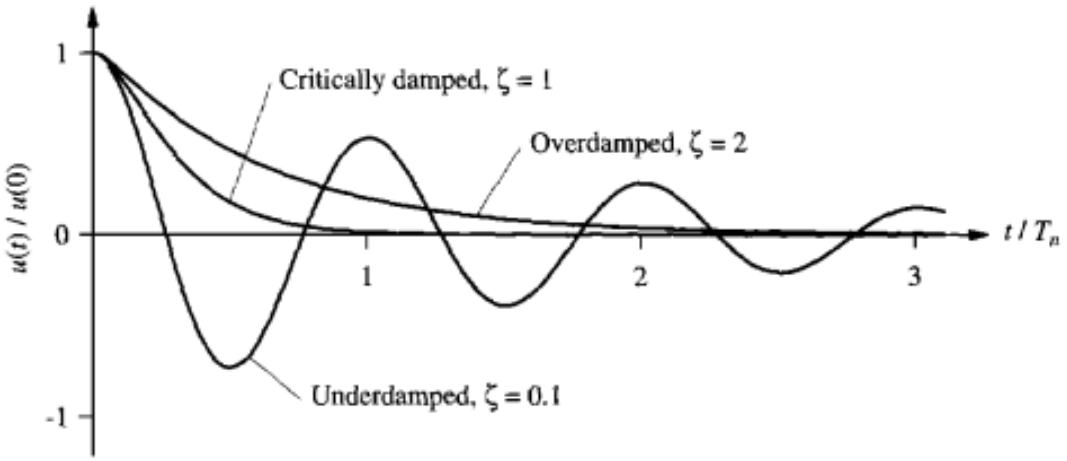
$$Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[S_0*\cos\omega_D t + (V_0 + S_0*\omega*\xi)/\omega_D * \sin\omega_D t]$$

Le due costanti

$A_1 = S_0$; $\quad A_2 = (V_0 + S_0*\omega*\xi)/\omega_D$;

Il periodo $T_D = 2*\pi/[\ \omega*(\xi^{2} - 1)^{1/2}\ ]$

Il diagramma di questa funzione



Il decremento logaritmico $\delta = ln(x_1/x_2) = ln(y_1/y_2)$
Il fattore coseno è pari all'unità

$Y_1 = C*e^{-\xi\omega t}$; $Y_2 = C*e^{-\xi\omega(t+T)}$; *avendo considerato il moto vibratorio*

$Y(t) = C*e^{-\xi\omega t}*cos(\omega_D t-\alpha)$ $T = T_s = T_D$ $T=2*\pi/\omega = 2*\pi*\sqrt{m/k}$

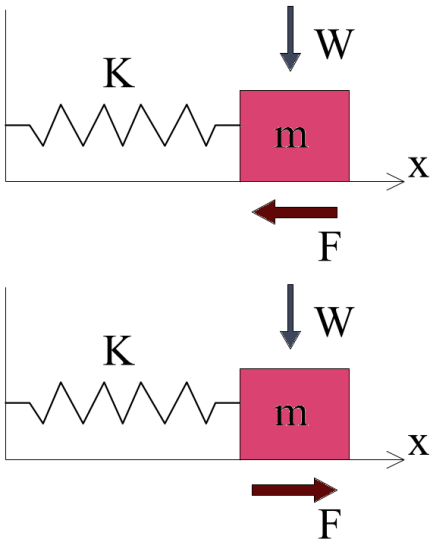
$$\delta = ln(y_1/y_2) = \xi\omega T_D = 2*\pi*\xi/\sqrt{(1-\xi^2)}$$

Per piccoli valori del rapporto di smorzamento

$$\delta = 2*\pi*\xi$$

3.2 Smorzamento per attrito

Un tipico smorzamento (Damping) è quello per attrito o di Coulumb



La forza di attrito F = μ W ; μ* coefficiente di attrito dinamico W peso proprio*

si oppone al moto e si inverte in funzione della sua direzione

$X > 0 \quad m*x'' + k*x = +F$

$X < 0 \quad m*x'' + k*x = -F$

Troviamo due soluzioni

$x>0 \qquad X(t) = A*\sin\omega t + B*\cos\omega t + F/k$

$x<0 \qquad X(t) = A*\sin\omega t + B*\cos\omega t - F/k$

Imponendo le condizioni iniziali t= 0

$X(0) = X_0 \; ; \; X'(0) = 0$ Risulta ***per il primo ciclo***

$x>0 \qquad X(t) = (X_0 - F/k)*\cos\omega t \qquad per \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega = T/2$

al tempo $t = \pi/\omega \qquad \cos\omega t = -1$

$x(T/2) = X_0 - 2*F/k \; ; \; x'(T/2) = 0$

$X(t) = A*\sin\omega t + B*\cos\omega t + F/k$

imponendo le nuove condizioni iniziali ***per il secondo ciclo***

$X_0 - 2*F/k = -B + F/k \qquad B = (X_0 - 3*F/k)$

$X'(T/2) = 0 \;\; ; A = 0$

$X(t) = (X_0 - 3*F/k)*\cos\omega t + F/k \qquad \text{per } \pi/\omega \leq t \leq 2*\pi/\omega = T$

Il terzo ciclo $\text{per } T = 2\pi/\omega \leq t \leq 3*\pi/\omega = 3T/2$

$X(T) = (X_0 - 3*F/k) - F/k = (X_0 - 4*F/k) \qquad X'(T) = 0$

$x>0 \qquad X(t) = A*\sin\omega t + B*\cos\omega t + F/k$

$B = (X_0 - 5*F/k) \;\; ; A = 0$

$X(t) = (X_0 - 5*F/k)*\cos\omega t - F/k$

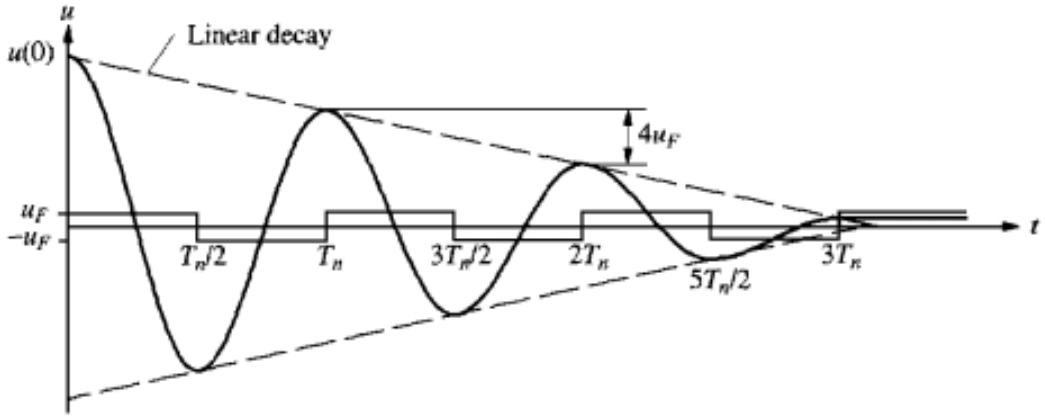
Il quarto ciclo $\text{per } 3T/2 = 3\pi/\omega \leq t \leq 4*\pi/\omega = 2T$

$X(3/2T) = (X_0 - 6*F/k) \qquad X'(T) = 0$

$X(t) = A*\sin\omega t + B*\cos\omega t + F/k \qquad B = (X_0 - 7*F/k) \;\; ; A = 0$

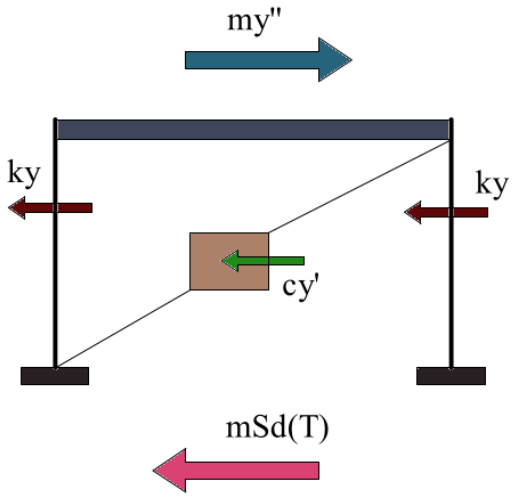
$X(t) = (X_0 - 7*F/k)*\cos\omega t + F/k$

Il diagramma della funzione X= X(t)



3.3 Accelerazione sismica

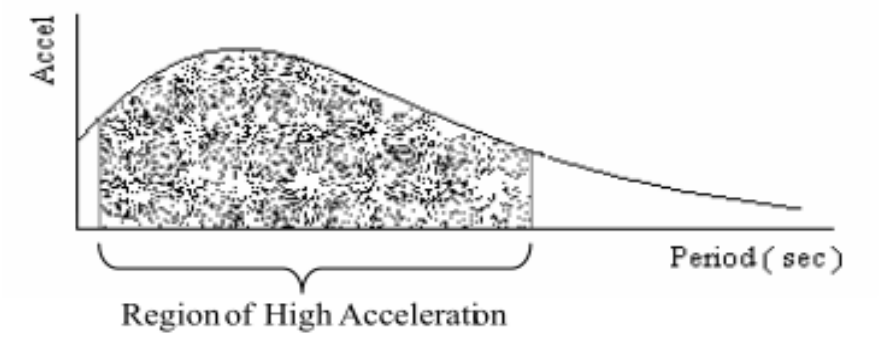
L'equazione del moto



$Y'' + c/m*Y' + K/m*Y = Sd(T)$ $\omega^2 = K/m$; $T = 2*\pi/\omega$

$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2*Y = Sd(T)$

Sd(T) accelerazione dello spettro di risposta corrispondente al periodo T



Un integrale particolare della equazione differenziale

$Y_0 = Sd(T)/\omega^2$

per cui l'integrale generale nei tre casi

$Y(t) = A*e^{-\xi*\omega t} + Sd(T)/\omega^2$ $\xi = 1$

$Y(t) = A*e^{\omega t*[-\xi-(\xi\,\hat{}\,2 - 1)\hat{}\,1/2]} + B*e^{\omega t*[-\xi+(\xi\,\hat{}\,2 - 1)\hat{}\,1/2]} + Sd(T)/\omega^2$ $\xi > 1$

$Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos\omega_D t + A_2*\sin\omega_D t] + Sd(T)/\omega^2$ $\xi < 1$

Imponendo le condizioni iniziali

caso a) $\xi = 1$

$Y(0) = 0 \;;\; Y'(0) = 0 \qquad \xi = 1$

$Y(t) = A*e^{-\xi *\omega t} + Sd(T)/\omega^2 \qquad A = -Sd(T)/\omega^2$

$Y(t) = Sd(T)/\omega^2 * (1-e^{-\xi *\omega t})$

caso b) $\xi > 1$

$Y(0) = 0 \;;\; Y'(0) = 0$

$Y(t) = A*e^{\omega t*[-\xi -(\xi ^2 - 1)^{1/2}]} + B*e^{\omega t*[-\xi +(\xi ^2 - 1)^{1/2}]} + Sd(T)/\omega^2$

$A+B = -\ Sd(T)/\omega^2 \;;\; A = -(B+ Sd(T)/\omega^2)$

$A*[-\xi -(\xi^2 - 1)^{1/2}] + B*[-\xi +(\xi^2 - 1)^{1/2}] = 0$

$2B*(\xi^2 - 1)^{1/2} + Sd(T)/\omega^2 *[+\xi +(\xi^2 - 1)^{1/2}] = 0$

$B = Sd(T)/\omega^2 *[\xi +(\xi^2 - 1)^{1/2}]/[2*(\xi^2 - 1)^{1/2}]$

$\boldsymbol{A} = Sd(T)/\omega^2\{[\xi +(\xi^2 - 1)^{1/2}]/[2*(\xi^2 - 1)^{1/2}] -1\}$

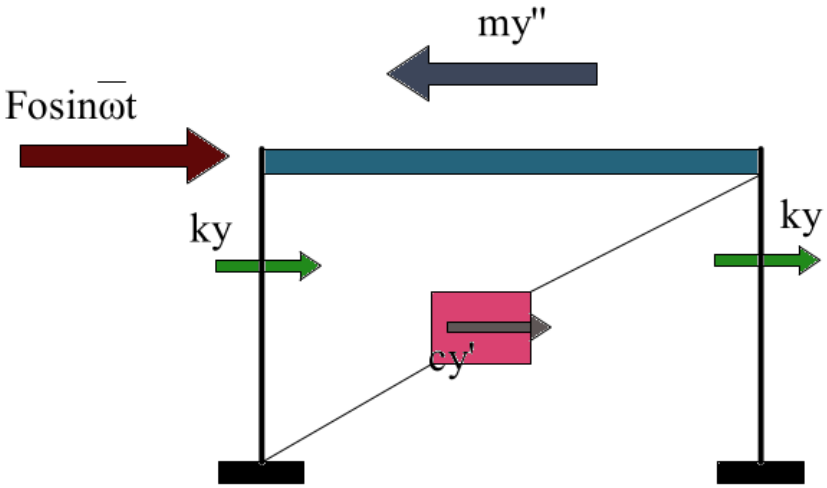
Caso c) $\xi < 1$

$Y(0) = 0 \;;\; Y'(0) = 0$

$Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos\omega_D t + A_2*\sin\omega_D t] + Sd(T)/\omega^2$

$Y(t) = Sd(T)/\omega^2 *e^{-\xi\omega t}*[1-\cos\omega_D t]$

3.4 Forzante



L'equazione differenziale

$Y'' + c/m*Y' + K/m*Y = Fo/m*\sin\underline{\omega}t \qquad \omega^2 = K/m \;;\; T = 2*\pi/\omega$

$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2*Y = Fo/m*\sin\underline{\omega}t$

attraverso le formule di eulero possiamo scrivere la equazione nella forma

$m*Y'' + c*Y' + K*Y = Fo*e^{i\underline{\omega}t}$

Un integrale particolare della equazione differenziale

$Yo = C*e^{i\underline{\omega}t}$ *sostituendo*

$-m*\underline{\omega}^2*C + i*c*\underline{\omega}*C + K*C = Fo$

da cui $C = Fo/[K - m*\underline{\omega}^2 + i*c*\underline{\omega}]$

$Yo = C*e^{i\underline{\omega}t} = Fo*e^{i\underline{\omega}t}/[K - m*\underline{\omega}^2 + i*c*\underline{\omega}]$

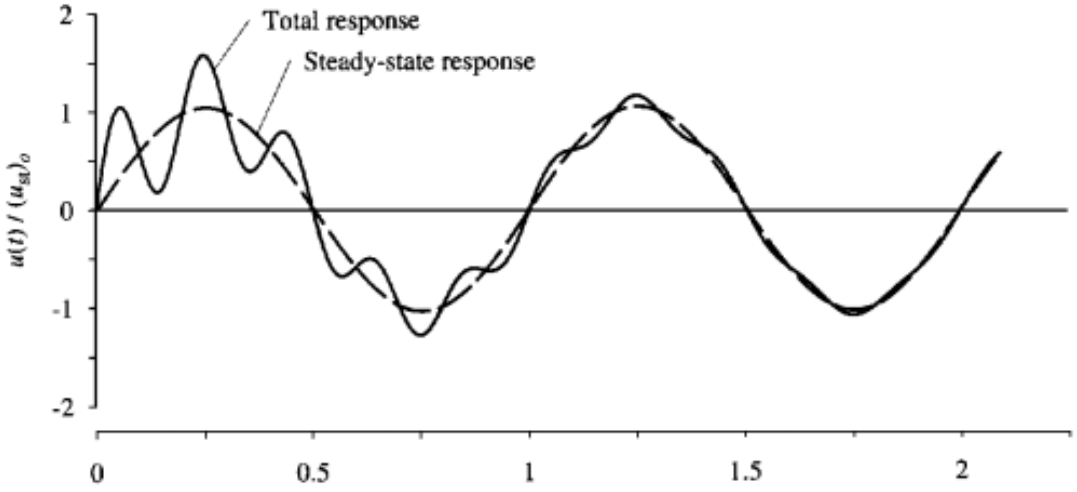
attraverso la formula polare per i numeri complessi

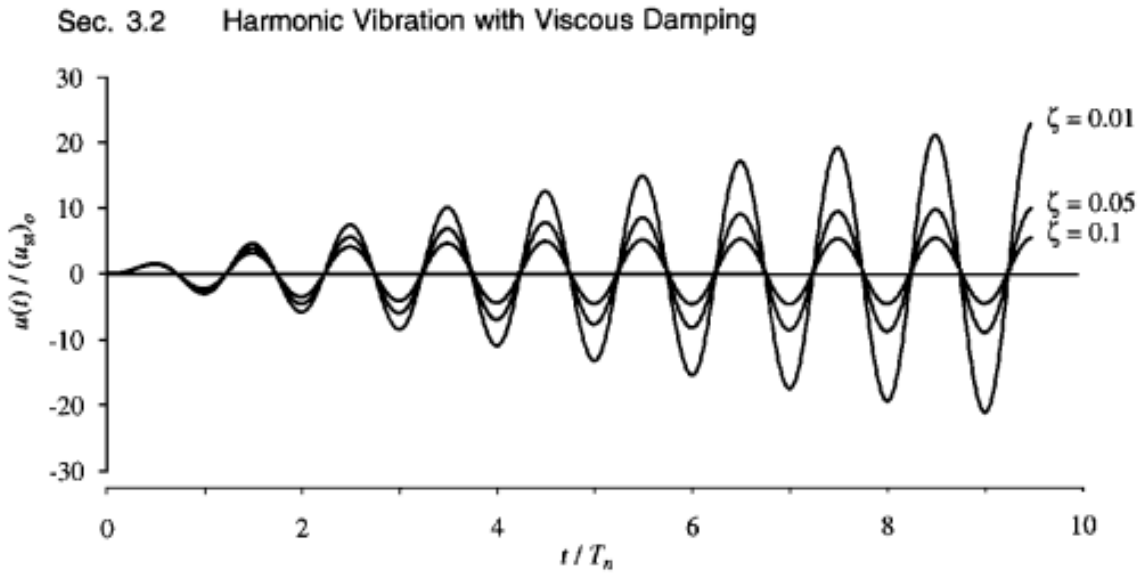
$Yo = Fo*e^{i(\underline{\omega}t-\theta)}/[(K - m*\underline{\omega}^2)^2 + (c*\underline{\omega})^2]^{1/2}$ *ovvero*

$Yo = Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[A_1*\cos\omega_D t + A_2*\sin\omega_D t]$

l'integrale generale assume la forma per sistema sottosmorzato :

$Y(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * \cos\omega_D t + A_2 * \sin\omega_D t] + Y(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * \cos\omega_D t + A_2 * \sin\omega_D t]$





Un ulteriore integrale particolare della equazione

$Yo = C * \sin\omega t + D * \cos\omega t$

l'espressione più generale del forzante $Fo*(\sin\underline{\omega}t+\cos\omega t)$

$Y'' + 2*\xi*\omega_n*Y' + \omega^2_n * Y = Fo/m*\sin\underline{\omega}t$ *)

$Y'o = C*\omega*\cos\omega t - D*\omega \sin\omega t$

$Y''o = -C*\omega^2*\sin\omega t - D*\omega^2 * \cos\omega t$ *sostituendo nella equazione* *)

$[-C*\omega^2*\sin\omega t - D*\omega^2*\cos\omega t] + 2*\xi*\omega_n*[C*\omega*\cos\omega t - D*\omega \sin\omega t] +$

$+ \omega^2_n*[C*\sin\omega t + D*\cos\omega t] = Fo/m*\sin\omega t$

raccogliamo a fattor comune le funzioni $\sin\omega t$ e $\cos\omega t$

$\sin\omega t[-C*\omega^2 + D*2*\xi*\omega*\omega_n + C*\omega^2_n] +$

$+\cos\omega t[-D*\omega^2 + C*2*\xi*\omega*\omega_n + D*\omega^2_n] = Fo/m*\sin\underline{\omega}t$

Affinché l'equazione differenziale sia soddisfatta deve essere

$\sin\omega t*[-C*\omega^2 + D*2*\xi*\omega*\omega_n + C*\omega^2_n] = Fo/m*\sin\underline{\omega}t$

$\cos\omega t*[-D*\omega^2 + C*2*\xi*\omega*\omega_n + D*\omega^2_n] = 0$

$-C*\omega^2 + D*2*\xi*\omega*\omega_n + C*\omega^2_n = Fo/m$

$-D*\omega^2 + C*2*\xi*\omega*\omega_n + D*\omega^2_n = 0$

Risolvendo il sistema si ricavano le due costanti C e D

$C*(\omega^2_n - \omega^2) + D*2*\xi*\omega*\omega_n = Fo/m$

$D*(\omega^2_n - \omega^2) + C*2*\xi*\omega*\omega_n = 0$

$D = -C*2*\xi*\omega*\omega_n / (\omega^2_n - \omega^2)$

$C*(\omega^2_n - \omega^2) - C*2*\xi*\omega*\omega_n*2*\xi*\omega*\omega_n / (\omega^2_n - \omega^2) = Fo/m$

$C = Fo/m*1/[(\omega^2_n - \omega^2) - (2*\xi*\omega*\omega_n)^2/(\omega^2_n - \omega^2)]$

$D = -Fo/m*(2*\xi*\omega*\omega_n)/[(\omega^2_n - \omega^2) - (2*\xi*\omega*\omega_n)^2/(\omega^2_n - \omega^2)]$

$C = Fo/m*[1-(\omega/\omega_n)^2]/[(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 2*\xi*\omega/\omega_n]^2$

$D = -Fo/m*2*\xi*\omega/\omega_n/[(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 2*\xi*\omega/\omega_n]^2$

La soluzione particolare

$Yo = Fo/m*[1-(\omega/\omega_n)^2]/[(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 2*\xi*\omega/\omega_n]^2*\sin\underline{\omega}t +$

$-Fo/m*2*\xi*\omega/\omega_n/[(1-(\omega/\omega_n)^2)^2 + 2*\xi*\omega/\omega_n]^2*\cos\underline{\omega}t$

La soluzione complementare della omogenea associata

$Y(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * \cos\omega_D t + A_2 * \sin\omega_D t]$

L'integrale generale della equazione differenziale :

$Y(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * \cos\omega_D t + A_2 * \sin\omega_D t] + C * \sin\omega t + D * \cos\omega t$

Ipotizziamo che $\boldsymbol{\omega = \omega_n}$ *risulta* $C = 0$ *e* $D = -Fo/m * 2 * \xi / [(2 * \xi]^2 = -Fo/(2 * m * \xi)$

per le condizioni iniziali $Y(0)=0 ; Y'(0)= 0$

$Y(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * \cos\omega_D t + A_2 * \sin\omega_D t] + Fo/(2 * m * \xi) * \cos\omega t$

$0 = A_1 + Fo/(2 * m * \xi) \quad A_1 = -Fo/(2 * m * \xi) \quad A_2 = \xi/\sqrt{(1-\xi^2)}$

$Y(t) = Fo/(2 * m * \xi) * [e^{-\xi\omega t} * (\cos\omega_D t + \xi/\sqrt{(1-\xi^2)}) + \cos\omega t)$

Il diagramma della funzione $Y = Y(t)$

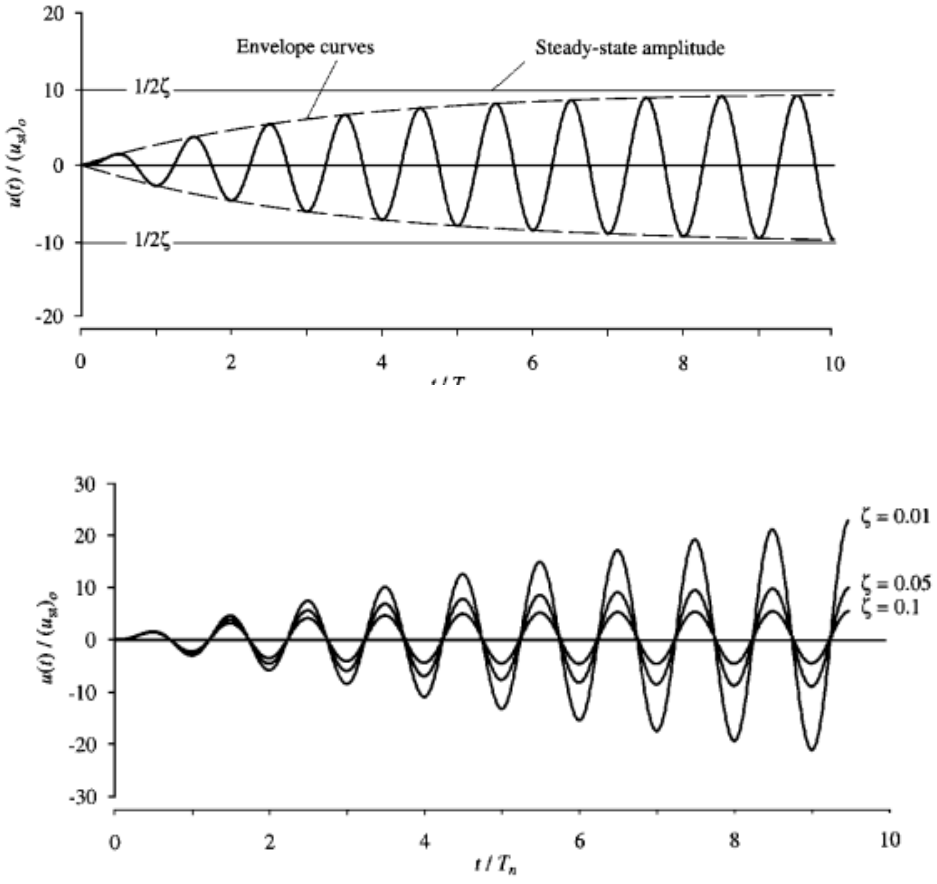


Figure 3.2.3 Response of three systems—$\zeta = 0.01$, 0.05, and 0.1—to sinusoidal force of frequency $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

Nello stato stazionario la deformazione per un sistema sollecitato da una forza armonica

$y(t) = Yo*\sin(\omega t-\varphi) = Fo/k*R_d*\sin(\omega t-\phi)$

dove $Yo = \sqrt{(C^2+D^2)}$; $\phi = \arctan(-D/C)$

$R_d = 1/[(1-(\omega/\omega_n)^2)^2+2*\xi*\omega/\omega_n]^2$ $\phi = \arctan[2*\xi*(1-(\omega/\omega_n)^2)(1-(\omega/\omega_n)^2)]$

se risulta $\omega/\omega_n <<< 1$ $Yo = Fo/k$ R_d *tende a 1*

$\omega/\omega_n >>> 1$ R_d *tende a 0 ed è essenziale l'effetto dello smorzamento*

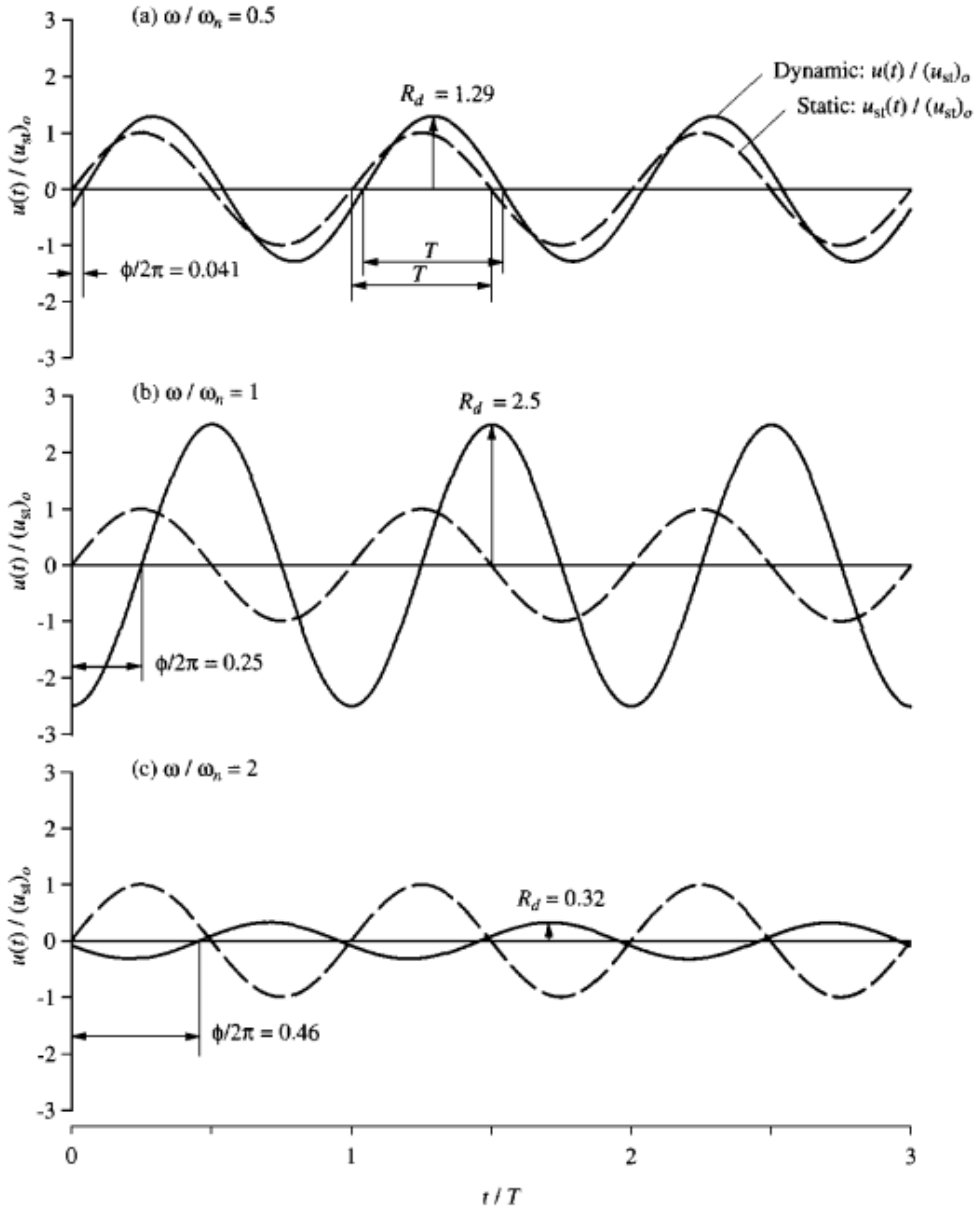


Figure 3.2.5 Steady-state response of damped systems ($\zeta = 0.2$) to sinusoidal force for three values of the frequency ratio: (a) $\omega/\omega_n = 0.5$, (b) $\omega/\omega_n = 1$, (c) $\omega/\omega_n = 2$.

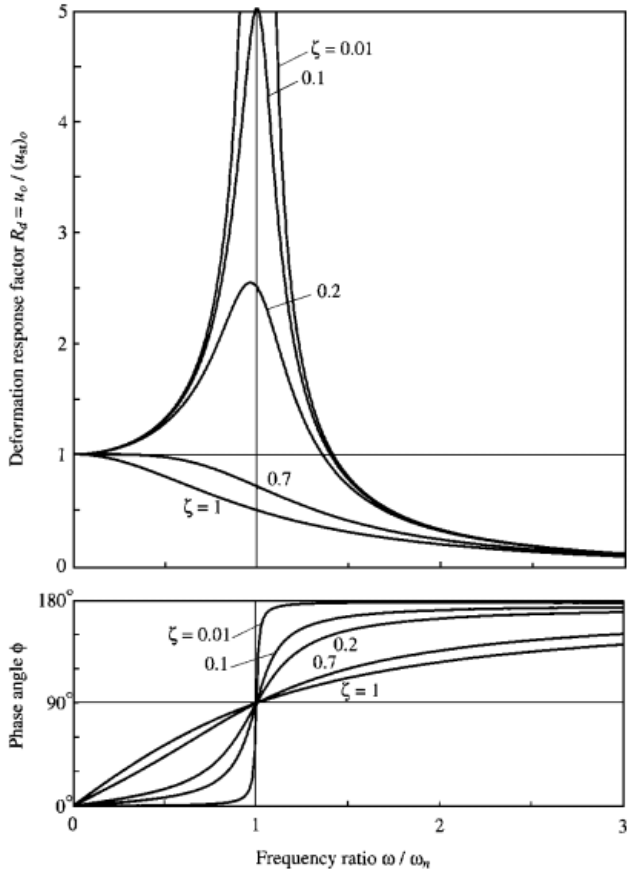


Figure 3.2.6 Deformation response factor and phase angle for a damped system excited by harmonic force.

se risulta $\omega/\omega_n = 1$

$Yo = Fo/(2*m*\zeta) = Fo/(c*\omega_n)$ *è fondamentale lo smorzamento*

I fattori di risposta dinamica

$R_d = 1/[2*\zeta*\sqrt{(1-\zeta^2)}]$; $R_v = 1/(2*\zeta)$; $R_a = 1/[2*\zeta*\sqrt{(1-\zeta^2)}]$;

$y(t) = Fo/k*R_d*\sin(\omega t-\phi)$ $\quad y(t)/(Fo/k)=R_d*\sin(\omega t-\phi)$

differenziando la equazione $y'(t)/(Fo/\sqrt{km})=R_v*\cos(\omega t-\phi)$

$R_v=\omega/\omega_n*R_d$ *differenziando ancora la equazione*

$y''(t)/(Fo/m)=-R_a*\sin(\omega t-\phi)$

$R_a=(\omega/\omega_n)^2*R_d$ *i fattori di risposta dinamica dipendono dal rapporto* ω/ω_n

$R_a/(\omega/\omega_n)= R_v=(\omega/\omega_n)*R_d$

frequenza del forzante ω *e frequenza del sistema* ω_n

*La frequenza di **RISONANZA** è definita come la frequenza alla quale corrisponde una amplificazione della risposta Y(t)*

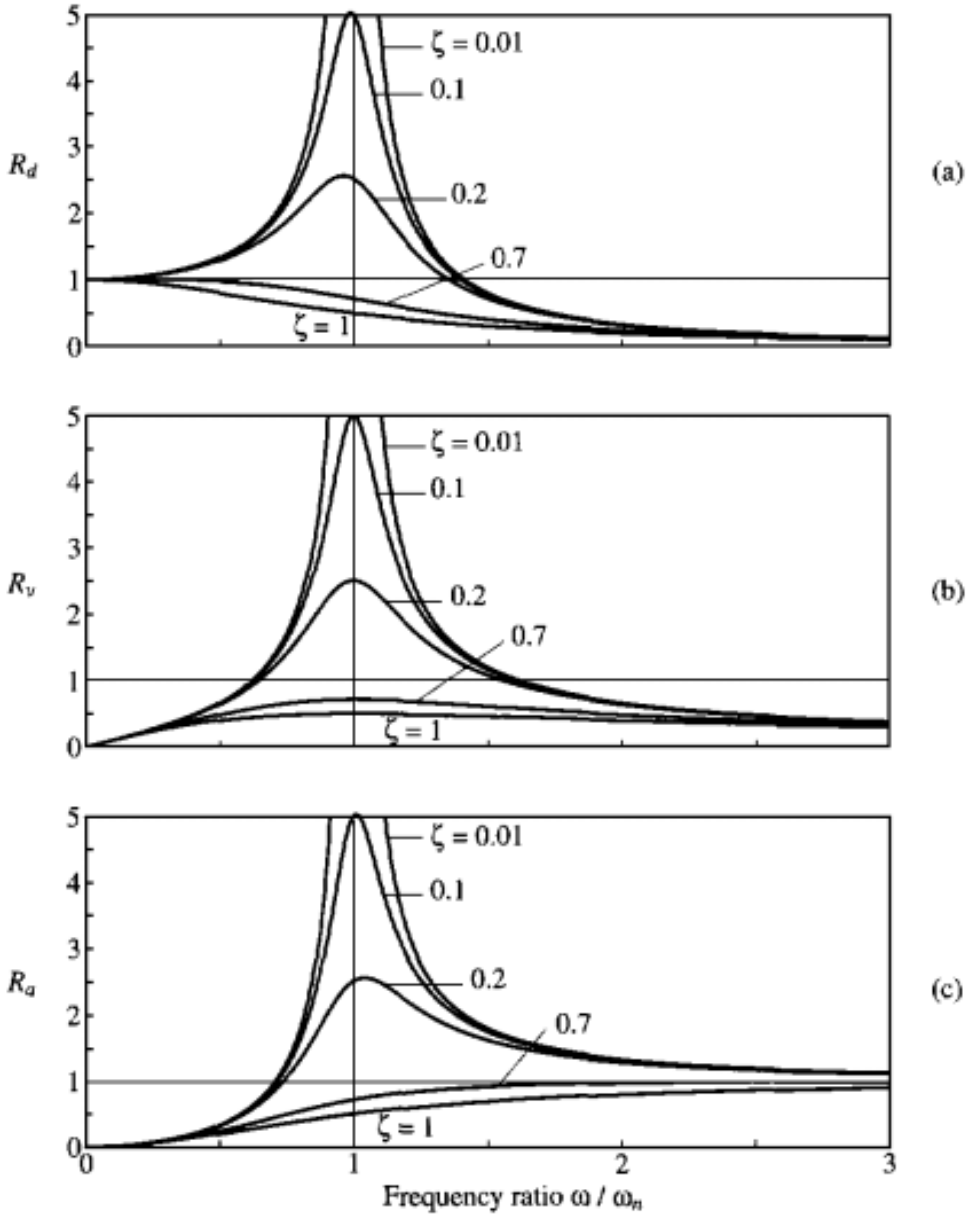


Figure 3.2.7 Deformation, velocity, and acceleration response factors for a dampe system excited by harmonic force.

La frequenza può essere determinata eguagliando a zero la derivata prima di

R_v , R_d ed R_a rispetto ad (ω/ω_n) ; per $\zeta < 1/\sqrt{2}$

Spostamento frequenza di risonanza $\omega_n * \sqrt{(1-2\zeta)}$

Velocità frequenza di risonanza ω_n

Accelerazione frequenza di risonanza $\omega_n \div \sqrt{(1-2\zeta)}$

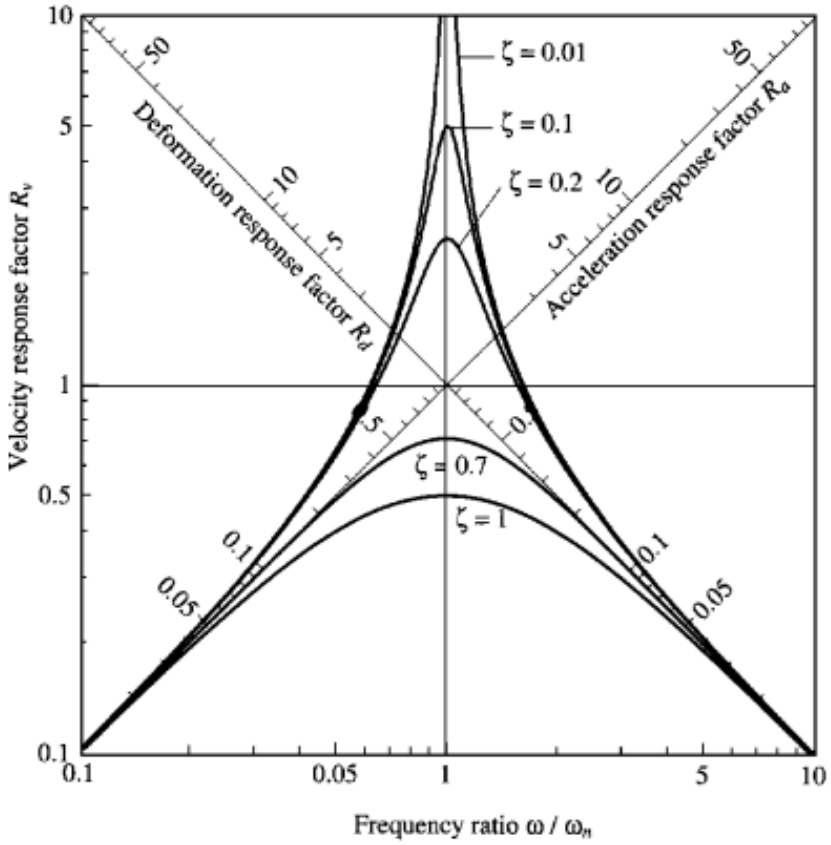
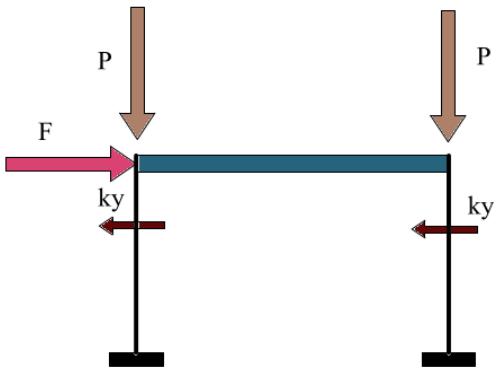


Figure 3.2.8 Four-way logarithmic plot of deformation, velocity, and acceleration response factors for a damped system excited by harmonic force.

4-Effetto P-Δ

L'effetto P-Δ sui traduce in una diminuzione della rigidezza

$K = K_O - P/H$; *P sforzo normale* *H altezza del telaio*



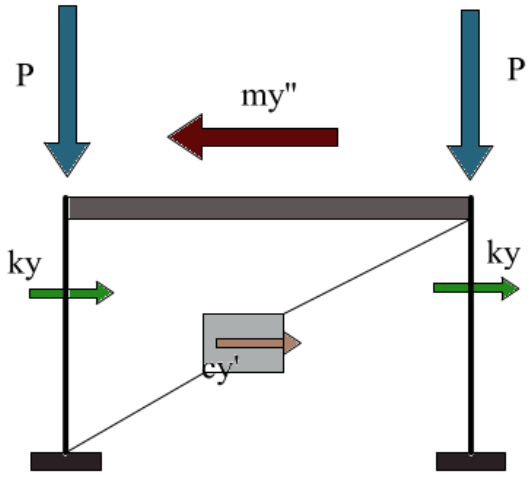
L'incremento di forza orizzontale dovuto alla instabilità

$F_O + P/H^* Y$; ;*Lo spostamento statico* $Y = F/K$

$Y = (F_O + P/H^* Y)/K$; $K^*Y = F_O + P/H^* Y$

$Y = F_O/(K-P/H)$

4.1 Vibrazioni libere



L'equazione differenziale

$Y'' + c/m^*Y' + (K- P/H)/m^*Y = 0$ $\omega^2 = (K-P/H)/m$; $T = 2^*\pi/\omega$

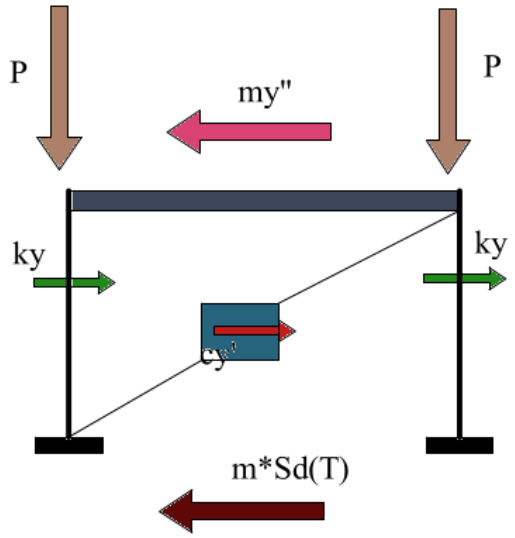
$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2 *Y =0$

Cambiano sola pulsazione ω ed il periodo T le soluzioni sono analoghe.

4.2 Accelerazione sismica

$Y'' +c/m*Y' + (K- P/H)/m*Y =Sd(T)$ $\omega^2 = (K-P/H)/m$; $T = 2*\pi/\omega$

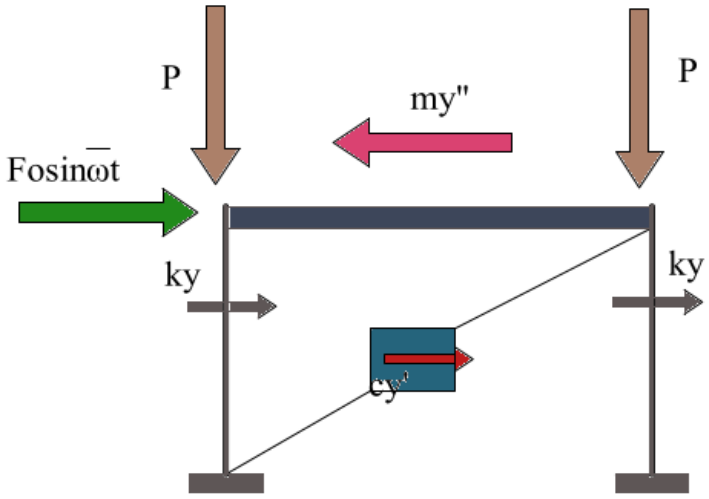
$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2 *Y =Sd(T)$



4.3 Forzante

$Y'' +c/m*Y' + (K- P/H)/m*Y =Fo/m*sin\underline{\omega}t$ $\omega^2 = (K-P/H)/m$; $T = 2*\pi/\omega$

$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2 *Y = Fo/m*sin\underline{\omega}t$

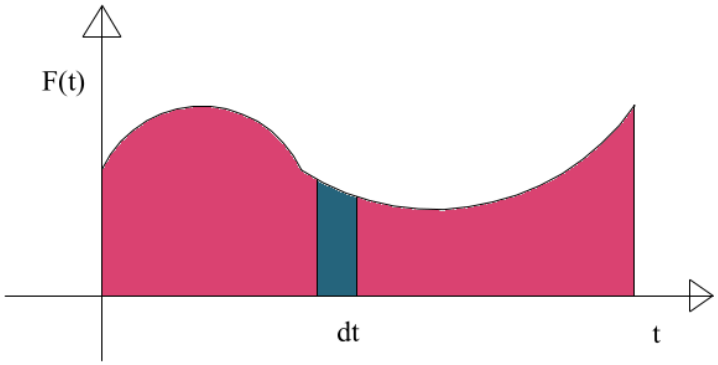


5- Integrale di Duammhel

Un carico impulsivo è un carico che agisce in un istante infinitesimo e corrisponde alla variazione della quantità di moto

$m*dv/dt = F(t)$

In una storia di carico dove la forza è funzione del tempo:



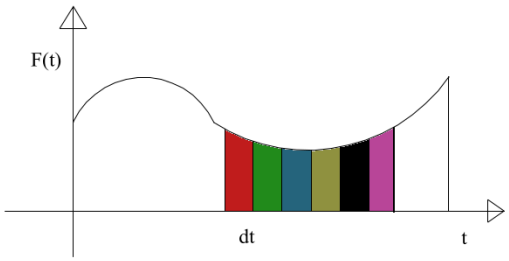
$dv = F(t)/m*dt$;

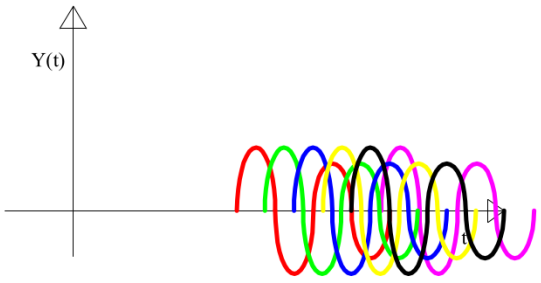
La risposta al singolo impulso

$F = m*Y''$; $\int F dt = m*dv$; *La risposta ad un generico impulso*

Sistema non smorzato $y(t) = 1/(m*\omega)*\sin\omega(t-\tau)$ $t \geq \tau$

Sistema smorzato $y(t) = e^{\xi(t-\tau)}/(m*\omega_D)*\sin\omega_D(t-\tau)$ $t \geq \tau$





La risposta globale prevede la somma delle forze ennesime di impulso per cui si passa alla integrazione delle risposte

$Y(t) = \int e^{-\xi\omega t} * [S_0 * \cos\omega_D t + (V_0 + S_0 * \omega * \xi)/\omega_D * \sin\omega_D t]dt$

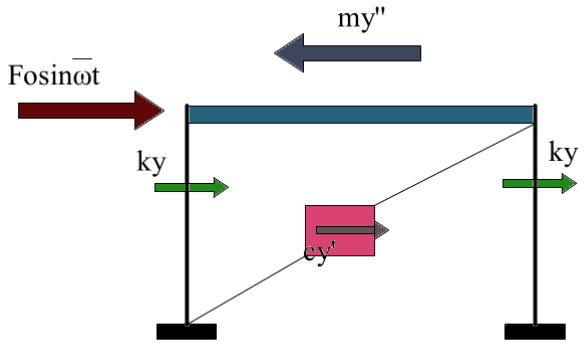
La risposta ad una forza generica

Sistema non smorzato $Y(t) = 1/(m*\omega)\int F(t)\sin\omega(t-\tau)dt$

Sistema smorzato $Y(t) = 1/(m*\omega_D)\int F(t)*e^{\xi(t-\tau)}*\sin\omega_D(t-\tau)dt$

6-Analisi dinamica non lineare

Esistono dei metodi numerici per la valutazione della risposta che tengono conto anche della variazione di rigidezza degli elementi strutturali e quindi so adattano ad analisi dinamiche non lineari ; consideriamo la equazione del moto



$m*Y'' + c*Y' + K*Y = F(t)$ $\omega^2 = K/m$

$Y''+2*\xi*\omega*Y' + \omega^2 * Y = F(t)$ *la massa è costante*

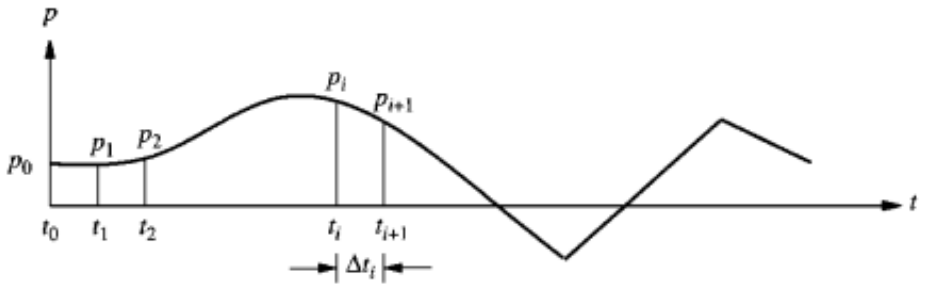
Con le condizioni iniziali $Y(0) = Yo$; $Y'(0) = Y'o$ *per l'istante* $t = 0$

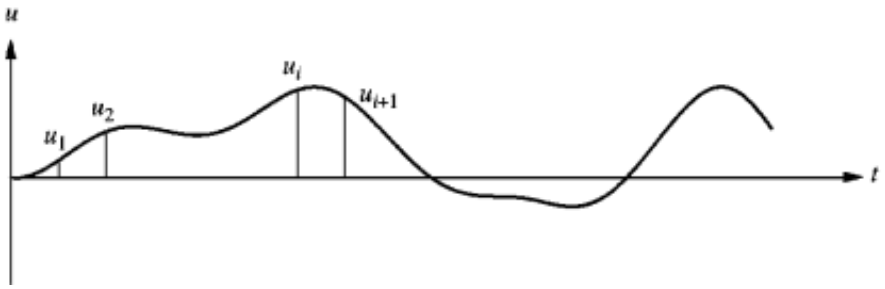
Per un intervallo di tempo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ *La forza applicata* $F(t_i)$; *La rigidezza* $K(t_i)$ *all'istante* t_i

$m*Y''(t_i) + c*Y'(t_i) + K*Y(t_i) = F(t_i)$

all'istante t_{i+1}

$m*Y''(t_{i+1}) + c*Y'(t_{i+1}) + K*Y(t_{i+1}) = F(t_{i+1})$

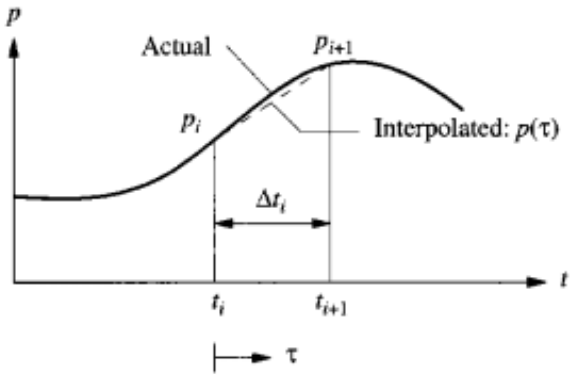




Si utilizza la interpolazione lineare :

$F(t_i) = F(t_i) + \Delta F(t_i)/\Delta t * \tau$

$\Delta F(t_i) = F(t_{i+1}) - F(t_i)$



per sistema non smorzato

$m*Y'' + K*Y = F(t_i) + \Delta F(t_i)/\Delta t * \tau$ *con* $0 \leq \tau \leq \Delta t$

la soluzione di questa equazione

Integrale omogenea associata $Y(t_i) = Y(t_i)*\cos\omega_n\tau + Y(t_i)/\omega_n * \sin\omega_n\tau$

Integrale particolare $Yo(t_i) = F(t_i)/k *(1-\cos\omega_n\tau) + \Delta F(t_i)/k* [\tau/\Delta t - \sin\omega_n\tau/(\Delta t\omega_n)]$

L'integrale generale *in termini di displacement istante* t_i

$Y(t_i) = Y(t_i)*\cos\omega_n\tau + Y(t_i)/\omega_n * \sin\omega_n\tau + F(t_i)/k *(1-\cos\omega_n\tau) + \Delta F(t_i)/k* [\tau/\Delta t - \sin\omega_n\tau/(\Delta t\omega_n)]$

Velocity t_i

$Y'(t_i)/\omega_n = -Y(t_i)*\sin\omega_n\tau + Y(t_i)/\omega_n * \cos\omega_n\tau + F(t_i)/k \sin\omega_n\tau) + \Delta F(t_i)/(k\Delta t\omega_n)* [1- \cos\omega_n\tau/(\Delta t\omega_n)]$

All'istante $\tau = \Delta t$

L'integrale generale *in termini di displacement istante* t_{i+1}

$Y(t_{i+1}) = Y(t_{i+1})*\cos\omega_n\Delta t + Y(t_{i+1})/\omega_n * \sin\omega_n\Delta t + F(t_{i+1})/k *(1-\cos\omega_n\Delta t)$
$+\Delta F(t_{i+1})/k* [\tau/\Delta t - \sin\omega_n\Delta t/(\Delta t\omega_n)]$

Velocity t_{i+1}

$Y'(t_{i+1})/\omega_n = -Y(t_{i+\backslash 1i})*\sin\omega_n\Delta t + Y(t_{i+1})/\omega_n * \cos\omega_n\Delta t + F(t_{i+1})/k \sin\omega_n\Delta t)$
$+\Delta F(t_{i+1})/(k\Delta t\omega_n)* [1- \cos\omega_n\Delta t/(\Delta t\omega_n)]$

Questa equazione può essere scritta nella forma seguente

$$Y(t_{i+1}) = A*Y(t_i) + B*Y'(t_i) + C*F(t_{i+1}) + D*F'(t_{i+1})$$

$$Y'(t_{i+1}) = A'*Y(t_i) + B'*Y'(t_i) + C'*F(t_{i+1}) + D'*F'(t_{i+1})$$

I coefficienti di queste formule sono riportati nella figura seguente

TABLE 5.2.1 COEFFICIENTS IN RECURRENCE FORMULAS ($\zeta < 1$)

$$A = e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)$$

$$B = e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\frac{1}{\omega_D}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$C = \frac{1}{k}\left\{\frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left[\left(\frac{1-2\zeta^2}{\omega_D\Delta t} - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t - \left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t}\right)\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D = \frac{1}{k}\left[1 - \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\frac{2\zeta^2-1}{\omega_D\Delta t}\sin\omega_D\Delta t + \frac{2\zeta}{\omega_n\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

$$A' = -e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

$$B' = e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\cos\omega_D\Delta t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D\Delta t\right)$$

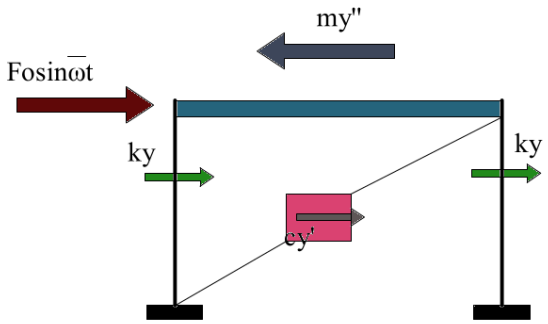
$$C' = \frac{1}{k}\left\{-\frac{1}{\Delta t} + e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left[\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{\zeta}{\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_D\Delta t + \frac{1}{\Delta t}\cos\omega_D\Delta t\right]\right\}$$

$$D' = \frac{1}{k\Delta t}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n\Delta t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D\Delta t + \cos\omega_D\Delta t\right)\right]$$

6.1-Metodo Wilson-θ

E' un metodo che consente di eseguire l'analisi dinamica non lineare tenendo conto anche della variazione di rigidezza :

*L'equazione di equilibrio dinamico m*Y'' +c*Y' + K*Y =F(t)*



*si ipotizza che nell'intervallo di tempo da [t ; t+θ*Δt] le variazioni delle singole grandezze siano lineari*

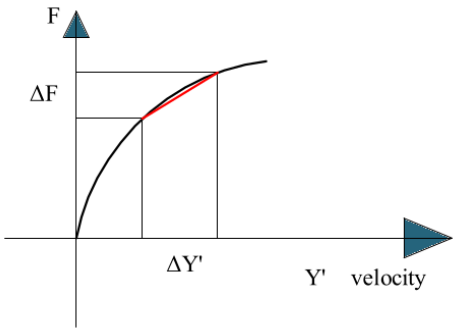
*m*ΔY'' +c(y')*ΔY' + K(y)*ΔY =ΔF(t)*

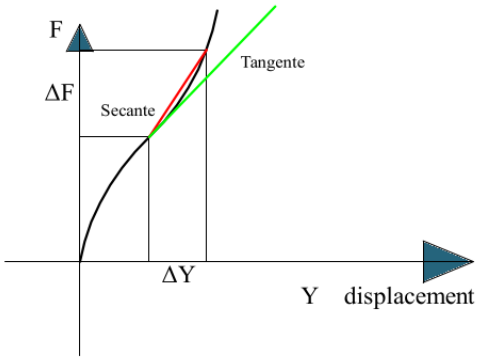
dove :

ΔY= Y(t+τ) - Y(t)
ΔY'= Y'(t+τ) - Y'(t)
ΔY''= Y''(t+τ) - Y''(t)
ΔF(t) = F(t+τ) - F(t)

La rigidezza K(y) = ΔF/ΔY ;

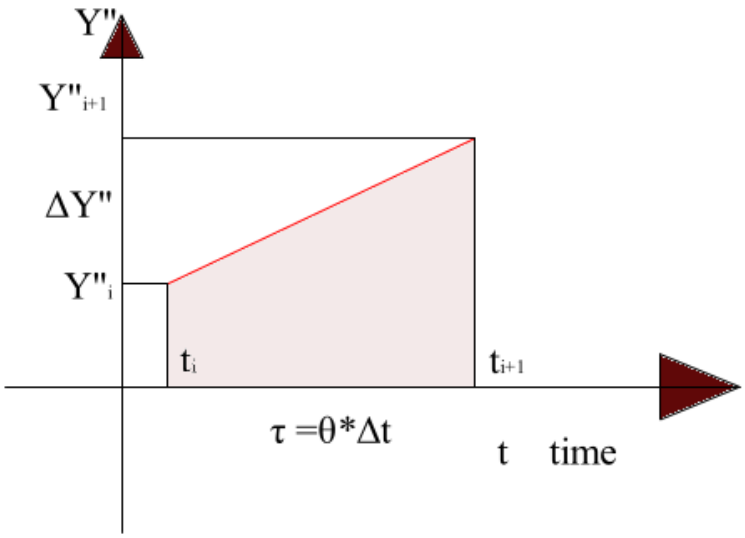
Lo smorzamento c = ΔF/ΔY ;





Smorzamento viscoso non lineare ; *rigidezza non lineare ;*

La integrazione delle equazioni non lineari del moto attraverso il metodo di Wilson-θ viene eseguito nella ipotesi che nell'intervallo di tempo $t = \theta * \Delta t$ la accelerazione vari in modo lineare



$Y''(t) = Y''(t_i) + \Delta Y''/\tau * (t-t_i)$

La velocità si ottiene dalla integrazione della accelerazione

$Y'(t) = Y'(t_i) + Y''(t_i)*(t-t_i) + 1/2 * \Delta Y''/\tau * (t-t_i)^2$

Dalla integrazione della velocità si ottiene lo spostamento

$Y(t)=Y(t_i)+Y'(t_i)*(t-t_i)+1/2*Y''*(t-t_i)^2 + 1/6*\Delta Y''/\tau * (t-t_i)^3$

$\Delta Y'=Y''(t_i)*\tau + 1/2 * \Delta Y''*\tau$

$\Delta Y=Y'(t_i)*\tau + 1/2*Y''*\tau^2 + 1/6*\Delta Y''*\tau^2$

Risolviamo questa equazione rispetto a ΔY"

$\Delta Y'' = 6/\tau^2 * \Delta Y - 6/\tau * Y'(t_i) - 3*Y''$ *sostituiamo nella equazione precedente*

$\Delta Y' = 3/\tau * \Delta Y - 3*Y' - \tau/2 * Y''$

L'equazione del moto

$m*\Delta Y'' + c(y')*\Delta Y' + K(y)*\Delta Y = \Delta F(t)$

Risulta dalla definizione di rigidezza $K(y)*\Delta Y = \Delta F(t)$
sostituiamo gli incrementi dello spostamento e della velocità

$m*[6/\tau^2*\Delta Y - 6/\tau *Y'(t_i) -3*Y'']+c(y')*[3/\tau *\Delta Y -3*Y'-\tau/2* Y'']\Delta Y +K(y)*\Delta Y = \Delta F(t)$

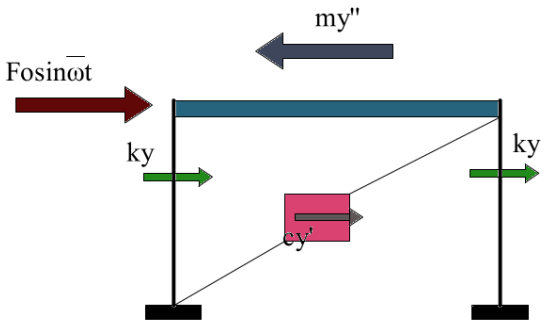
risulta $K= K(y) +m*6/\tau^2+c(y')*3/\tau$

$\Delta F=\Delta F(t) + m*[6/\tau *Y'(t_i) +3*Y'']+c(y')*[3*Y '+\tau/2* Y'']$

la equazione da risolvere è la seguente

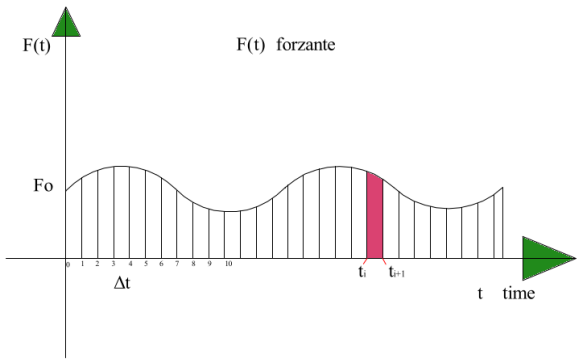
$K(y)*\Delta Y = \Delta F(t)$ Determinando $\Delta Y = \Delta F(t)/ K(y)$

Consideriamo per la nostra struttura una time history come riportata in figura



L'andamento del forzante nel tempo

$K(y)*\Delta Y = \Delta F(t)$; $K(y)*\Delta Y = M *\Delta S''(t)$;



Si parte dall'istante $t =0$ $F(t) = Fo$; $S(t) = So$ Siamo in fase elastica $K = k(0)$

Al tempo $t_1 = \tau = \Delta t$ $Y'= 0$; $Y= 0$;
$\Delta Y' = Y''*\Delta t + 1/2*\Delta Y''\Delta t$; $\Delta Y = Y*\Delta t + 1/2*Y''\Delta t^2+1/6*\Delta Y''\Delta t^2$

$\Delta Y' = 1/2*\Delta Y''\Delta t$; $\Delta Y =1/6*\Delta Y''\Delta t^2$
$Y_1 = Y_0 + \Delta Y$; $Y'_1 = Y'_0 + \Delta Y'$; $Y''_1 = Y''_0 + \Delta Y''$;
$Y_1 = \Delta Y$; $Y'_1 = \Delta Y'$; $Y''_1 = Y''_0 + \Delta Y''$; $\tau= \Delta t$

first step *Le grandezze sono riferite all'istante 0*

L'accelerazione iniziale

$M^* Y''o = Fo - c^* y'o - K^* yo \; ; \quad Y''o = Fo/M$

Rigidezza

$\Delta K = Ko + m^* 6/\tau^2 + c_o^* 3/\tau \; ;$

Forza

$\Delta F = \Delta F(t) + m^*[\, 6/\tau \, ^* Y'(t_i) + 3^* Y''] + c(y')^*[\, 3^* Y' + \tau/2^* Y'']$

Il carico incrementale per interpolazione lineare

$\Delta F(t) = F_1 - F_0$; *noto dalla storia di carico*

$\Delta Y = \Delta F/\Delta K = [\, Ko + m^* 6/\tau^2 + c_o^* 3/\tau \,] / [\, m^* 3^* Y''o + c^* \tau/2^* Y''o]$

l'accelerazione incrementale

$\Delta Y'' = 6/\tau^2 ^* \Delta Y - 6/\tau \, ^* Y'(t_i) - 3^* Y'' = 6/\tau^2 ^* \Delta Y - 3^* Y''o$

La velocità incrementale

$\Delta Y' = 1/2^*[6/\tau^2 ^* \Delta Y - 3^* Y''o \,] \Delta t \; ;$

Lo spostamento incrementale

$\Delta Y = 1/6^* \Delta Y'' \Delta t^2 = 1/6^*[6/\tau^2 ^* \Delta Y - 3^* Y''o \,] \Delta t^2$

$Y_1 = \Delta Y \; ; \quad Y'_1 = \Delta Y' \; ; \; Y''_1 = Y''_0 + \Delta Y'' \; ;$

Second step *Le grandezze sono riferiti all'istante 1*

$Y_1 = \Delta Y \; ; \quad Y'_1 = \Delta Y' \; ; \; Y''_1 = Y''_0 + \Delta Y'' \; ;$

$\Delta K = K_1 + m^* 6/\tau^2 + c_o^* 3/\tau \; ;$ K_1 *dal diagramma forza spostamento*

$\Delta F = \Delta F(t) + m^*[\, 6/\tau \, ^* Y'_1 + 3^* Y''] + c(y')^*[\, 3^* Y' + \tau/2^* Y'']$ $\Delta F(t)$ *storia di carico*

$\Delta Y = \Delta F/\Delta K = \{\Delta F(t) + m^*[6/\tau^* Y'_1 + 3^* Y''] + c(y')^*[3^* Y' + \tau/2^* Y'']\,\} /$

$[\, K_1 + m^* 6/\tau^2 + c_o^* 3/\tau \,]$

l'accelerazione incrementale

$\Delta Y'' = 6/\tau^2 * \Delta Y - 6/\tau * Y' - 3 * Y''$

La velocità incrementale

$\Delta Y' = 3/\tau * \Delta Y - 3 * Y' - \tau/2 * Y''$

Lo spostamento incrementale

$\Delta Y = Y'(t_i) * \tau + 1/2 * Y'' * \tau^2 + 1/6 * \Delta Y'' * \tau^2$

All'istante 2

$Y_2 = Y_1 + \Delta Y ; \quad Y'_2 = Y'_1 + \Delta Y' ; \quad Y''_2 = Y''_1 + \Delta Y'' ;$

Third Step *Le grandezze sono riferiti all'istante 2*

$\Delta K = K_1 + m * 6/\tau^2 + c_o * 3/\tau ; \quad K_1$ *dal diagramma forza spostamento*

$\Delta F = \Delta F(t) + m * [6/\tau * Y'_1 + 3 * Y''] + c(y') * [3 * Y' + \tau/2 * Y''] \quad \Delta F(t)$ *storia di carico*

$\Delta Y = \Delta F / \Delta K = \{\Delta F(t) + m * [6/\tau * Y'_1 + 3 * Y''] + c(y') * [3 * Y' + \tau/2 * Y''] \} /$

$[K_1 + m * 6/\tau^2 + c_o * 3/\tau]$

l'accelerazione incrementale

$\Delta Y'' = 6/\tau^2 * \Delta Y - 6/\tau * Y' - 3 * Y''$

La velocità incrementale

$\Delta Y' = 3/\tau * \Delta Y - 3 * Y' - \tau/2 * Y''$

Lo spostamento incrementale

$\Delta Y = Y'(t_i) * \tau + 1/2 * Y'' * \tau^2 + 1/6 * \Delta Y'' * \tau^2$

All'istante 3

$Y_3 = Y_2 + \Delta Y ; \quad Y'_3 = Y'_2 + \Delta Y' ; \quad Y''_3 = Y''_2 + \Delta Y'' ;$

i-mo step

Al generico istante i $Y_I = Y_{I-1} + \Delta Y$; $Y'_I = Y'_{i-1} + \Delta Y'$; $Y''_i = Y''_{i-1} + \Delta Y''$;

$\Delta K = K_i + m*6/\tau^2 + c_o*3/\tau$; K_i *dal diagramma forza spostamento*

$\Delta F = \Delta F_i + m*[6/\tau *Y'_i + 3*Y''_i] + ci*[3*Y'_i + \tau/2* Y''_i]$ ΔF_i *storia di carico*

$\Delta Y = \Delta F/\Delta K = \{\Delta F_i + m*[6/\tau *Y'_i + 3*Y''_i] + ci*[3*Y'_i + \tau/2* Y''_i]\}/$

$[K_i + m*6/\tau^2 + c_o*3/\tau]$

l'accelerazione incrementale

$\Delta Y'' = 6/\tau^2 * \Delta Y - 6/\tau *Y'_i - 3*Y''_i$

La velocità incrementale

$\Delta Y' = 3/\tau *\Delta Y - 3*Y'_i - \tau/2* Y''_i$

Lo spostamento incrementale

$\Delta Y = Y'_i*\tau + 1/2*Y''_i*\tau^2 + 1/6*\Delta Y''*\tau^2$

All'istante 3

$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y$; $Y'_{i+1} = Y'_i + \Delta Y'$; $Y''_{i+1} = Y''_i + \Delta Y''$;

Ovviamente possiamo ottenere dalla composizione degli spostamenti la risposta della nostra struttura ovvero i diagrammi

$Y = Y(t)$ *displacement*

$Y' = Y'(t)$ *Velocity*

$Y'' = Y''(t)$ *Acceleration*

le sollecitazioni possono essere ottenute dalla relazione

$S = K(y)*Y(t)$

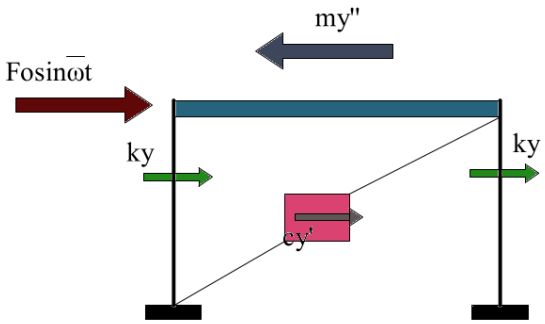
o più semplicemente applicando alla struttura le forze di inerzia

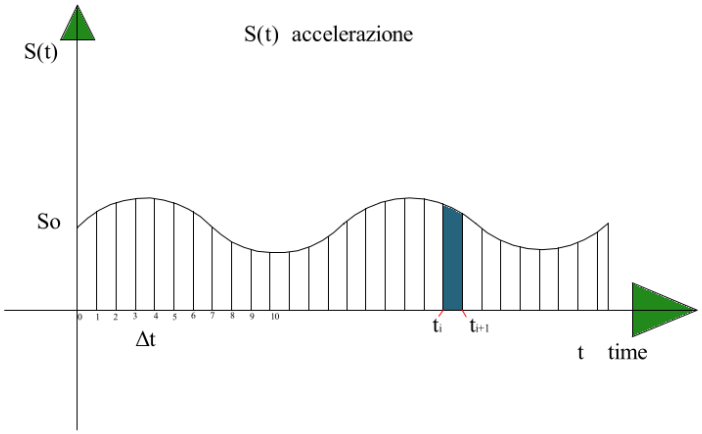
$M*Y''(t)$ ***step by step*** *e risolvendola staticamente.*

6.2-Metodo di Newmark

Il metodo di Newmark è più semplice di quello visto in precedenza poichè si tratta di integrare ***step by step*** *l'equazione del moto*

$m*\Delta Y''+c(y')*\Delta Y'+ K(y)*\Delta Y = m*\Delta S(t)$





La soluzione ovvero l'integrale generale della equazione differenziale per sistema sottosmorzato

$\Delta Y(t) = e^{-\xi\omega t}*[\, A_1*\cos\omega_D t + A_2*\sin\omega_D t\,] + \Delta S/\omega^2 \qquad T = 2*\pi/\omega$

ricordiamo che $\omega_D = \omega*(\xi^2 - 1)^{1/2}$; $\omega = \sqrt{k/m}$; $T_D = 2*\pi/[\,\omega*(\xi^2 - 1)^{1/2}\,]$

Le costanti per le seguenti condizioni iniziali

$Y(0) = 0$; $Y'(0) = 0$

$A_2 = 0$; $A_1 = e^{-\xi\omega t}*\Delta S/\omega^2$

$\Delta Y(t) = \Delta S/\omega^2 * e^{-\xi\omega t}*[\, 1-\cos\omega_D t\,]$

First step

$Y_o = 0$; $Y'_o = 0$ Ko all'origine ; c_o all'origine

$m*\Delta Y''+c_o*\Delta Y'+ Ko*\Delta Y = m*\Delta So$

$\Delta Y(t) = \Delta S/ \omega^2 * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,]$

$\Delta Y'(t) = \Delta S/ \omega^2 * \omega_D * e^{-\xi\omega t} * \sin\omega_D t$

Second Step

$Y_1 = \Delta Y$; $Y'_1 = \Delta Y'$ $K_1 = \Delta F/\Delta Y$ al punto 1 ; $c_1 = \Delta F/\Delta Y'$; ΔS_1

l'equazione istante 1

$m*\Delta Y''+c_1*\Delta Y'+ K_1*\Delta Y = m*\Delta S_1$

$\Delta Y(t) = \Delta S/ \omega^2 * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,]$

$\Delta Y'(t) = \Delta S/ \omega^2 * \omega_D * e^{-\xi\omega t} * \sin\omega_D t$

Third step

$Y_2 = Y_1 + \Delta Y$; $Y'_1 = Y'_1 + \Delta Y'$

$K_2 = (F_2 - F_1)/\Delta Y$; dal diagramma forza spostamento

$c_2 = (F_2 - F_1)/\Delta Y'$; dal diagramma forza velocità

$\Delta S_2 = S_2 - S_1$; dall'accelerogramma

$m*\Delta Y''+c_1*\Delta Y'+ K_1*\Delta Y = m*\Delta S_1$

$\Delta Y(t) = \Delta S_2 / \omega^2 * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,]$

$\Delta Y'(t) = \Delta S_2/ \omega^2 * \omega_D * e^{-\xi\omega t} * \sin\omega_D t$

$Y_3 = Y_2 + \Delta Y$; $Y'_3 = Y'_2 + \Delta Y'$; $Y''_3 = Y''_2 + \Delta Y''$;

i-mo step

$Y_i = Y_{i-1} + \Delta Y$; $Y'_i = Y'_{i-1} + \Delta Y'$

$K_i = (F_i - F_{i-1})/\Delta Y$; dal diagramma forza spostamento

$c_i = (F_i - F_{i-1})/\Delta Y'$; dal diagramma forza velocità

$\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$; dall'accelerogramma

$m*\Delta Y'' + c_1*\Delta Y' + K_1*\Delta Y = m*\Delta S_i$

$\Delta Y(t) = \Delta S_i / \omega^2 * e^{-\xi\omega t} * [\, 1 - \cos\omega_D t \,]$

$\Delta Y'(t) = \Delta S_i / \omega^2 * \omega_D * e^{-\xi\omega t} * \sin\omega_D t$

$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y$; $Y'_{i+1} = Y'_i + \Delta Y'$; $Y''_{i+1} = Y''_i + \Delta Y''$;

Risolvendo step by step si esegue un analisi dinamica non lineare della nostra struttura che tiene conto della variazione della rigidezza della viscosità e dell'accelerogramma .

Ovviamente possiamo ottenere dalla composizione degli spostamenti la risposta della nostra struttura ovvero i diagrammi

$Y = Y(t)$ *Displacement*

$Y' = Y'(t)$ *Velocity*

$Y'' = Y''(t)$ *Acceleration*

le sollecitazioni possono essere ottenute dalla relazione

$S = K(y) * Y(t)$

o più semplicemente applicando alla struttura le forze di inerzia

$m*Y''(t)$ ***step by step*** *e risolvendola staticamente determinando per ogni elemento strutturale le funzioni del tempo*

$M = M(t)$ *Momento flettente*

$V = V(t)$ *Taglio*

$N = N(t)$ *Sforzo normale*

$M_T = M_T(t)$ *Momento torcente*

7- Spettri di risposta

Lo spettro di risposta è definito nella normativa italiana sulle costruzioni dove per ogni comune di Italia vengono forniti i valori caratteristici dello spettro con riferimento ai differenti stati limite quali :

SLO stato limite di operatività
SLD stato limite di danno
SLV stato limite di salvaguardia della vita
SLC stato limite di collasso

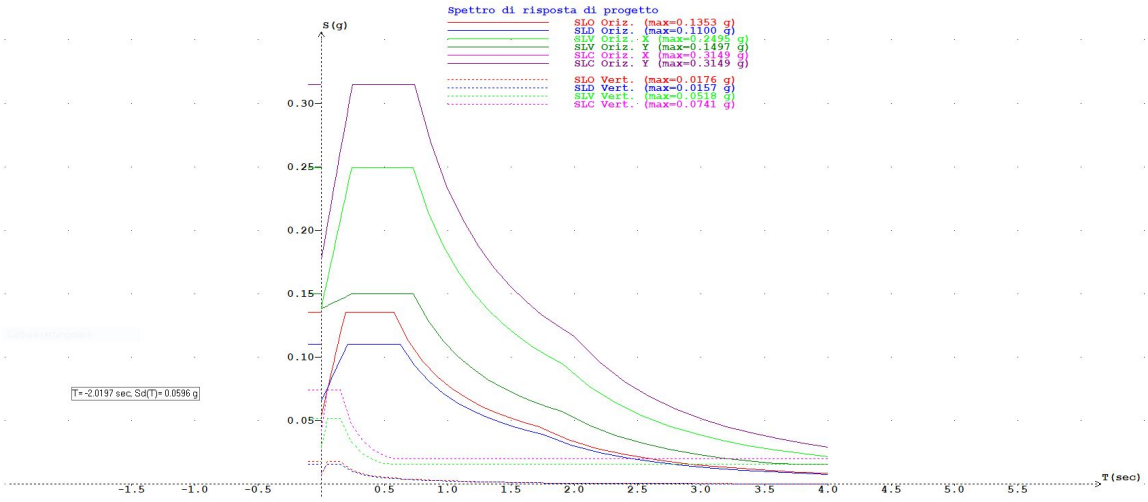
ad esempio per il mio comune di residenza quale Castel di Sangro lo spettro di risposta delle NTC è il seguente

Parametri di pericolosità sismica

	ag (g/10)	F0 (adim)	TC*(sec)
SLO	0.30169300	2.49135144	0.21000000
SLD	0.36282814	2.52700482	0.24885367
SLV	0.76744811	2.70924219	0.33549295
SLC	0.98480583	2.66475292	0.34837580

Parametri spettri orizzontali e Fv

	S	TB	TC	TD	Fv	Cc	Ss
SLO	1.800	0.191	0.573	1.721	0.584	2.728	1.800
SLD	1.800	0.208	0.624	1.745	0.650	2.506	1.800
SLV	1.800	0.241	0.724	1.907	1.013	2.158	1.800
SLC	1.800	0.246	0.738	1.994	1.129	2.118	1.800

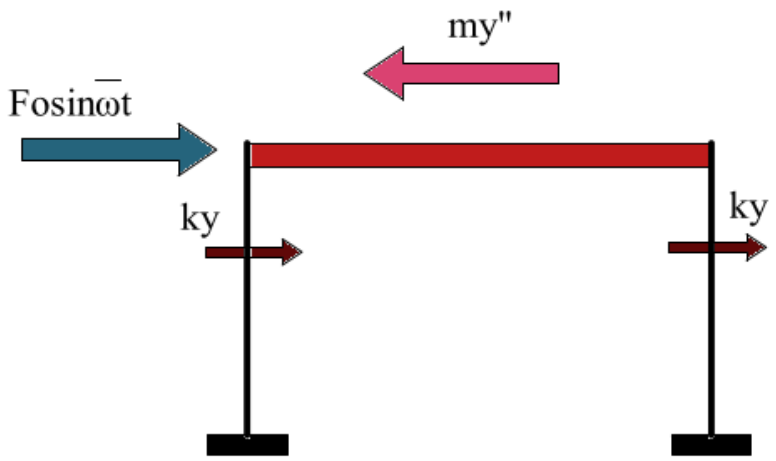


Lo spettro di risposta riporta in ordinata la accelerazione ed in ascissa il periodo T , di conseguenza in base al valore del periodo che è parametro intrinseco della nostra struttura poiché dipende dalla massa dalla rigidezza e per sistemo smorzati anche dallo smorzamento determiniamo la accelerazione sismica che sollecita la nostra struttura. Lo spettro di risposta può essere definito in tre forme

- Accelerazione
-Velocità
-Spostamento

e lo si calcola ricorrendo all'oscillatore semplice.

Consideriamo il portale riportato in figura:



L'equazione del moto

$m*Y'' + K*Y = Fo*\sin(\omega*t)$

l'integrale generale ha ancora una forma del tipo

$Y(t) = A*\sin(\omega_n t) + B*\cos(\omega_n t) + Y_O(t)$

dove l'integrale particolare

$Y_O(t) = Yo*\sin(\omega*t)$

sostituendo nella equazione differenziale

$-m*\omega^2*Yo*\sin(\omega*t) + K * Yo*\sin(\omega*t) = Fo*\sin(\omega*t)$

$Yo = Fo/(K-m*\omega^2)*\sin(\omega*t)$; $Yo = Fo/K/[1-(\omega/\omega_n)^2]*\sin(\omega*t)$;

L'integrale della equazione differenziale

$Y(t) = A*\sin(\omega_n t) + B*\cos(\omega_n t) + Fo/K/[1-(\omega/\omega_n)^2]*\sin(\omega*t)$

Imponendo le condizioni iniziali

$Y(0) = 0$; $Y'(0) = 0$;

$Y'(t) = \omega_n*A*\cos(\omega_n t) + B*\omega_n*\sin(\omega_n t) + \omega*Fo/K/[1-(\omega/\omega_n)^2]*\sin(\omega*t)$

$A = - r*Fo/K/[1-r^2]$ $B= 0$ $r = \omega/\omega_n$

L'integrale generale diventa

$Y(t) =+Fo/K/[1-r^2] *sin(\omega*t) - r* Fo/K/[1-(\omega/\omega_n)^2] *sin(\omega_n t)$

$Y(t)= Fo/K/[1-r^2] *[sin(\omega*t)- r*sin(\omega_n t)]$

$Y_{ST} =Fo/K ;$ $\omega = \pi/t_d$; $\omega_n = 2*\pi/T ;$

$Y(t)/Y_{ST} =1/(1-r^2) *[sin(\omega*t)- r*sin(\omega_n t)]= 1/[(1-r^2)] *[sin(\omega*t)- r*sin(\omega_n t)]=$

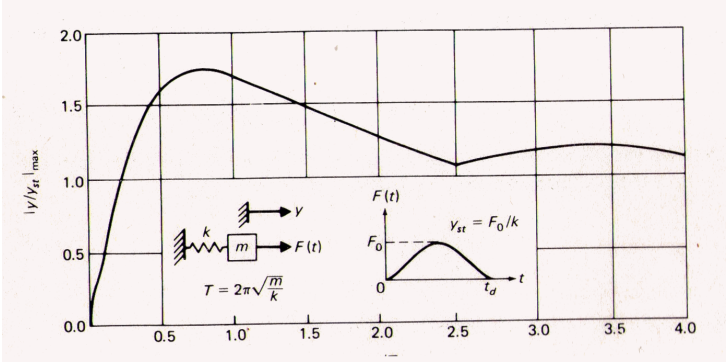
$= 1/[(1-(T/(2*t_d)^2] *[sin(\pi*t/t_d)- T/(2*t_d)*sin(\pi t/T)]$

$Y(t)/Y_{ST} = 1/[(1-(T/(2*t_d)^2] *[sin(\pi*t/t_d)- T/(2*t_d)*sin(\pi t/T)]$ per $0 \le t \le t_d$

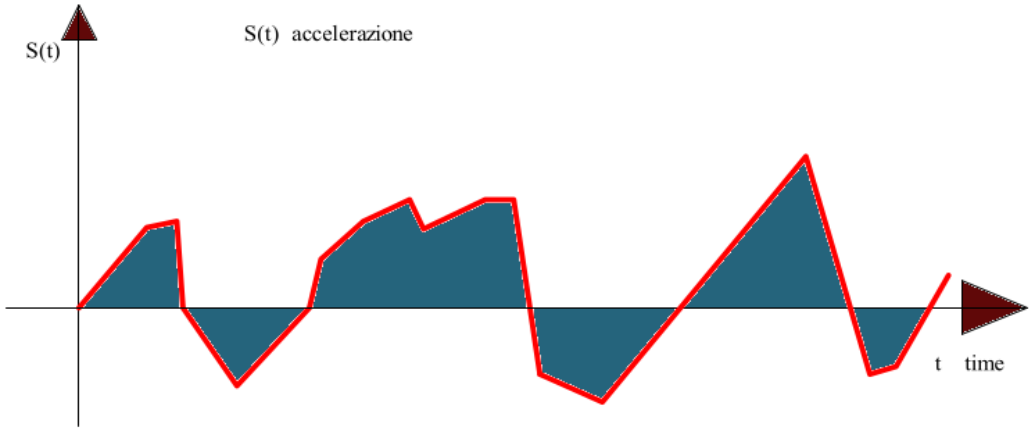
$Y(t)/Y_{ST} = (T/t_d)/[(T/(2*t_d)^2-1] *cos(\pi*t_d/T)*sin2\pi*(t/T- t_d/2T)]$ per $t \ge t_d$

derivando si può ottenere lo spettro di risposta in termini di velocità ed accelerazione

Il diagramma è riportato in figura :



Spettro di risposta per un accelerazione alla base funzione del tempo



L'equazione del moto per sistema smorzato

$m*Y'' + c*(Y'-S') + k*(Y-S) = 0 \;;\quad \omega = \sqrt{(k/m)} \;;\; \xi = c/c_{cri} \;;\; c_{cri} = 2\sqrt{(km)}$

$m*Y'' + 2*\xi*\omega*Y' + \omega^2*Y = \omega^2*S + 2*\xi*\omega*S'$

attraverso la posizione $u = Y-S$ *l'equazione diventa:*

$m*u'' + 2*\xi*\omega*u' + \omega^2*u = S(t)$

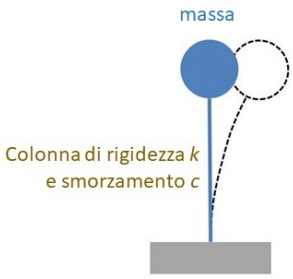
la cui soluzione può essere ottenuta attraverso l'integrale di duhamel

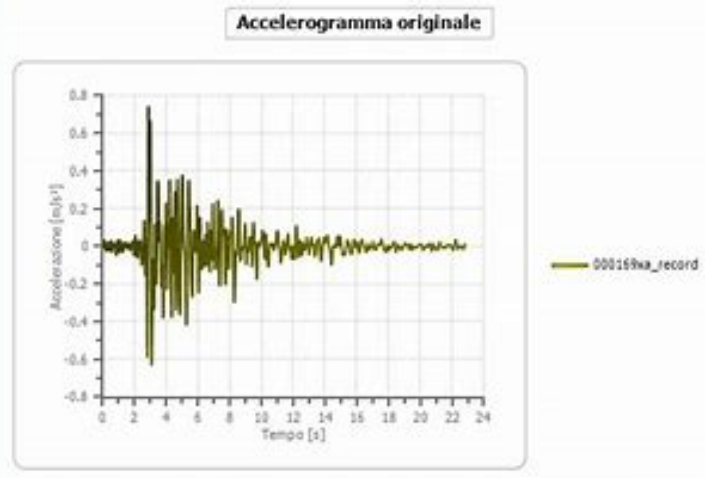
$$u(t) = -1/\omega \; * \int S(\tau) * e^{-\xi\omega(t-\tau)} * \sin\omega(t-\tau) d\tau$$

La costruzione dello spettro di risposta partendo da un accelerogramma può essere eseguita integrando la equazione del moto dinamico

$m*Y'' + c*Y' + k*Y = m*S$

attraverso il metodo di Newmark



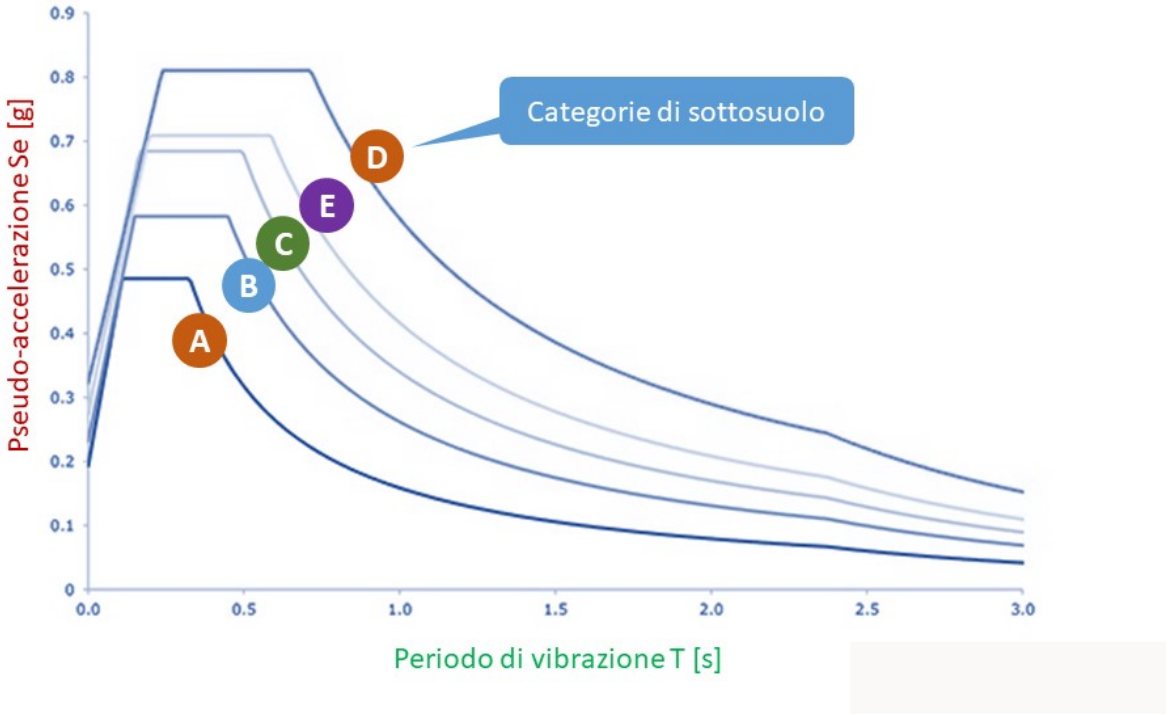


La soluzione è rappresentata dalle tre funzioni

Y(t) Spostamento ; Y'(t) Velocità ; Y''(t) Accelerazione ,

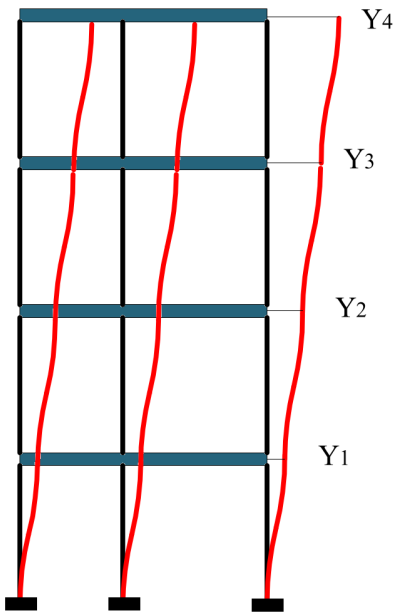
per costruire lo spettro di risposta si determina il valore max dell'accelerazione Y''(t) max utilizzando un numero elevato di oscillatori semplici ai quali corrispondono altrettanti periodi $0 < T_1, T_2, T_3, \ldots\ldots\ldots\ldots T_n < 24$ *sec*
determinando la funzione $Y = Y(T)$
Per costruire uno spettro di risposta non è sufficiente utilizzare un solo accelero-

gramma ma vanno utilizzati più accelerogrammi caratteristici della probabilità di accadimento previo inviluppo delle accelerazioni massime.



8-Strutture a telaio

L'analisi dinamica di una struttura a telaio può essere eseguita in modo molto semplice concentrando la massa in corrispondenza degli impalcati , assumendo un numero di gradi di libertà pari al numero dei piani e scrivendo le equazione di equilibrio di ogni traverso. Per semplificare la procedura si fa riferimento ad un telaio Shear Type alla Grinter dove la definizione della rigidezza è immediata; in questi appunti no ci interessa il calcolo matriciale delle strutture intelaiate poichè demandato ai software di calcolo.



La rigidezza del singolo pilastro $k = 12*EI/H^3$

E modulo elastico del materiale
I inerzia della sezione
H altezza del piano

per tener conto della fessurazione la rigidezza può essere dimezzata . Il traverso è infinitamente rigido la rigidezza di ciascun piano

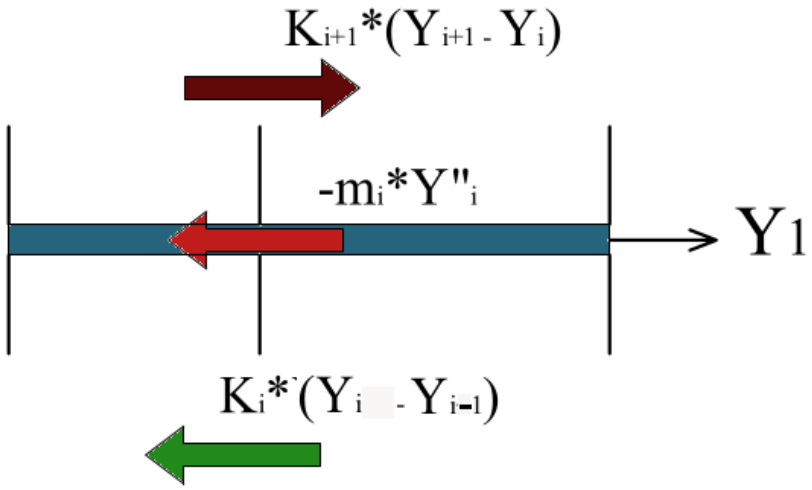
$k_i = 3/2*12*E*I_i/H_i \qquad i = 1,2,3,4$

la massa m_i $i = 1,2,3,4$ *concentrata su ogni traverso*

i gradi di libertà del telaio Y_1 ; Y_2 ; Y_3 ; Y_4 ;

8.1-Vibrazioni libere

La vibrazione libera della struttura va determinata in assenza di smorzamento imponendo l'equilibrio alla traslazione orizzontale di ogni traverso ottenendo un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine omogeneo e a coefficienti costanti.



Le equazioni del moto dinamico sono immediate :

$m_1* Y''_1 + K_1 * Y_1 - K_2 *(Y_2 - Y_1) = 0$

$m_2* Y''_2 + K_2 * (Y_2 - Y_1) - K_3 *(Y_3 - Y_2) = 0$

$m_3* Y''_3 + K_3 *(Y_3 - Y_2) - K_4 *(Y_4 - Y_3) = 0$

$m_4* Y''_4 + K_4 * (Y_4 - Y_3) = 0$

che diventa

$m_1 * Y''_1 + K_{11} * Y_1 + K_{12} * Y_2 = 0$

$m_2 * Y''_2 + K_{21} * Y_1 + K_{22} * Y_2 + K_{23} * Y_3 = 0$

$m_3 * Y''_3 + K_{32} * Y_2 + K_{33} * Y_3 + K_{34} * Y_4 = 0$

$m_4 * Y''_4 + K_{43} * Y_3 ++ K_{44} * Y_4 = 0$

dove :

$K_{11} = K_1 + K_2$
$K_{12} = K_{21} = K_2 + K_3$
$K_{22} = K_2 + K_3$
$K_{23} = K_{32} = - K_3$
$K_{33} = K_3 + K_4$
$K_{34} = K_{43} = - K_4$
$K_{44} = +K_4$

Il sistema di equazioni differenziali è lineare omgeneo ammette la soluzione banale corrispondente alla configurazione indeformata;I 4 modi di vibrare come per ogni sistema omogeneo si ottengono eguagliando a zero la matrice dei coefficienti.
Un integrale del sistema è $Y = Y_o * \sin\omega t$ *, sostituendo*

$-m_1 * \omega^2 * Y_o * \sin\omega t + K_{11} * Y_o * \sin\omega t + K_{12} * Y_o * \sin\omega t = 0$

$-m_2 * \omega^2 * Y_o * \sin\omega t + K_{21} * Y_o * \sin\omega t + K_{22} * Y_o * \sin\omega t + K_{23} * Y_o * \sin\omega t = 0$

$-m_3 * \omega^2 * Y_o * \sin\omega t + K_{32} * Y_o * \sin\omega t + K_{33} * Y_o * \sin\omega t + K_{34} * Y_o * \sin\omega t = 0$

$-m_4 * \omega^2 * Y_o * \sin\omega t + K_{43} * Y_o * \sin\omega t ++ K_{44} * Y_o * \sin\omega t = 0$ *Semplificando*

$(K_{11} - m_1 * \omega^2) + K_{12} = 0$

$K_{21} + (K_{22} - m_2 * \omega^2) + K_{23} = 0$

$K_{32} + (K_{33} - m_3 * \omega^2) + K_{34} = 0$

$K_{43} + (K_{44} - m_4 * \omega^2) = 0$

Il determinante di questa matrice deve essere uguale a zero

$$\begin{vmatrix} (K_{11} - m_1*\omega^2) & K_{12} & 0 & 0 \\ K_{21} & (K_{22} - m_2*\omega^2) & K_{23} & 0 \\ 0 & K_{32} & (K_{33} - m_3*\omega^2) & K_{34} \\ 0 & 0 & K_{43} + (K_{44} - m_4*\omega^2) & \end{vmatrix} = 0$$

si ottiene una equazione di quarto grado nella incognita $p = \omega^2$ *alla quale corrispondono le quattro pulsazioni ed i periodi*

ω_1 ; $T_1 = 2*\pi/\omega_1$; ω_2 ; $T_2 = 2*\pi/\omega_2$; ω_3 ; $T_3 = 2*\pi/\omega_3$; ω_4 ; $T_4 = 2*\pi/\omega_4$;

il periodo fondamentale di oscillazione T corrisponde al minimo valore dei periodi calcolati .
Le 4 forme modali definite dagli spostamenti dei traversi ovvero dei piani, possono essere determinate dalla risoluzione del sistema normalizzando gli spostamenti al primo traverso : $A_1 = 1$

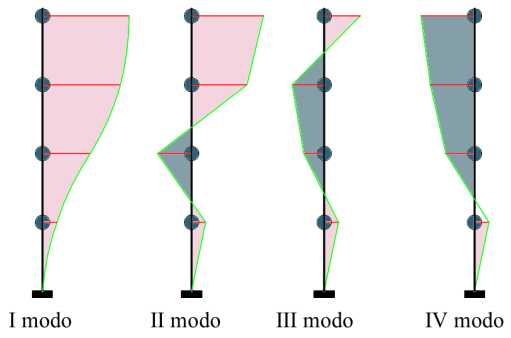
$$(K_{11} - m_1*\omega^2)* A_1 + K_{12} *A_2 = 0$$

$$A_1* K_{21} + A_2* (K_{22} - m_2*\omega^2) + A_3* K_{23} = 0$$

$$A_2*K_{32} + A_3*(K_{33} - m_3*\omega^2) + A_4* K_{34} = 0$$

$$A_{43}*K_3 + A_4* (K_{44} - m_4*\omega^2) = 0$$

si determinano per ogni valore della pulsazione $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
4 quaterne di valori $A_1 = 1$ A_2 ; A_3 ; A_4 ; *che definiscono le deformate modali riportate in figura . ovvero i quattro modi di vibrazione libera del telaio .*



8.2-Accelerazione sismica

Le equazioni del moto dinamico per sistema smorzato ed accelerazione sismica alla base :

$m_1*Y''_1+c_1*Y_1'+K_1*Y_1+c_2*(Y_2'-Y_1')-K_2*(Y_2-Y_1)=m_1*Sd(T)$

$m_2*Y''_2+c_2*(Y_2'-Y_1')+K_2*(Y_2-Y_1)-c_2*(Y_3'-Y_2')+K_3*(Y_3-Y_2)=m_2*Sd(T)$

$m_3*Y''_3+c_3*(Y_3'-Y_2')+K_3*(Y_3-Y_2-c_4*(Y_4'-Y_3')+K_4*(Y_4-Y_3)=m_3*Sd(T)$

$m_4*Y''_4+c_4*(Y_4'-Y_3')+K_4*(Y_4-Y_3)=m_4*Sd(T)$

$m_1*Y''_1+c_{11}*Y_1'+K_{11}*Y_1+c_{12}*Y_1'+K_{12}*Y_2=0$

$m_2*Y''_2+c_{21}*Y_1'+K_{21}*Y_1+c_{22}*Y_2'+K_{22}*Y_2+c_{23}*Y_3'+K_{23}*Y_3=0$

$m_3*Y''_3+c_{32}Y_2+K_{32}*Y_2+c_{33}Y_3'+K_{33}*Y_3+c_{34}Y_4'+K_{34}*Y_4=0$

$m_4*Y''_4+c_{43}Y_4'+K_{43}*Y_3+c_{44}Y_4'+K_{44}*Y_4=0$

dove : K rigidezze , c smorzamento

$K_{11}=K_1+K_2$	$c_{11}=c_1+c_2$
$K_{12}=K_{21}=K_2+K_3$	$c_{12}=c_{21}=c_2+c_3$
$K_{22}=K_2+K_3$	$c_{22}=c_2+c_3$
$K_{23}=K_{32}=-K_3$	$c_{23}=c_{32}=-c_3$
$K_{33}=K_3+K_4$	$c_{33}=c_3+c_4$
$K_{33}=K_3+K_4$	$c_{33}=c_3+c_4$
$K_{44}=+K_4$	$c_{44}=+c_4$

Per risolvere le equazioni del moto dobbiamo disaccopiarle e ricondurle tutte a quelle dell'oscillatore semplice , pertanto introduciamo la trasformazione di coordinate in forma matriciale

$$[y]=[\phi]*[z] \quad ,$$

La sostituzione nel sistema di equazioni differenziali

$$[M]*[y'']+[c]*[y']+[k]*[y]=[S(t)]$$

$$[M]*[\phi]*[z'']+[c]*[\phi]*[z']+[k]*[\phi]*[z]=[S(t)]$$

Moltiplicando per la trasporta della matrice $[\phi]$ *che rappresenta il vettore modale, ricordando che la matrice trasposta si ottiene scambiando le righe con le colonne*

$$[\phi]^T*[M]*[\phi]*[z''] + [\phi]^T*[c]*[\phi]*[z'] + [\phi]^T*[k]*[\phi]*[z] = [\phi]^T*[S(t)]$$

dalle proprietà di ortogonalità delle forme modali

$$[\phi]^T_n*[M]*[\phi]_m = 0$$

$$[\phi]^T_n*[k]*[\phi]_m = 0 \quad per\ m \neq n$$

$$[\phi]^T_n*[c]*[\phi]_m = 0 \quad per\ m \neq n$$

L'equazione può scriversi nella forma

$$M_n*z''_n + c_n*z'_n + k_n*z_n = S_n(T)$$

dove

$M_n = [\phi]^T_n*[M]*[\phi]_n$

$c_n = [\phi]^T_n*[c]*[\phi]_n$

$k_n = [\phi]^T_n*[k]*[\phi]_n$

$S_n = [\phi]^T_n*[S]$

l' equazione diventa

$$z''_n + 2*\zeta_n*\omega_n*z'_n + \omega^2_n*z_n = S_n(T)/M_n \quad *)$$

per i quattro impalcati possiamo scrivere le seguenti equazioni :
L'accelerazione Sd(t) è applicata alle fondazioni le equazioni vanno scritte nella forma

$$z''_1 + 2*\zeta_1*\omega_1*z'_1 + \omega^2_1*z_1 = \Gamma_1*S(T)$$

$$z''_2 + 2*\zeta_2*\omega_2*z'_2 + \omega^2_2*z_2 = \Gamma_2*S(T)$$

$$z''_3 + 2*\zeta_3*\omega_3*z'_3 + \omega^2_3*z_3 = \Gamma_3*S(T)$$

$$z''_4 + 2*\zeta_4*\omega_4*z'_4 + \omega^2_4*z_4 = \Gamma_4*S(T)$$

dove Γ_i è il coefficiente di partecipazione modale

$$\Gamma_i = [m_1*a_{11} + m_2*a_{21} + m_3*a_{31} + m_4*a_{41}]/[m_1*a_{11}^2 + m_2*a_{21}^2 + m_3*a_{31}^2 + m_4*a_{41}^2]$$

lo spostamento Y si ottiene come combinazione lineare dei 4 spostamenti

$$y_1 = \phi_{11}*z_1 + \phi_{12}*z_2 + \phi_{13}*z_3 + \phi_{14}*z_4$$

$$y_2 = \phi_{21}*z_1 + \phi_{22}*z_2 + \phi_{23}*z_3 + \phi_{24}*z_4$$

$$y_3 = \phi_{31}*z_1 + \phi_{32}*z_2 + \phi_{33}*z_3 + \phi_{34}*z_4$$

$$y_1 = \phi_{41}*z_1 + \phi_{42}*z_2 + \phi_{43}*z_3 + \phi_{44}*z_4$$

La matrice $[\phi]$ è la matrice modale ottenuta calcolando le vibrazioni libere del nostro telaio definita dai coefficienti $A_{i.}$
Il cambio di variabili richiesto è $z_i = \Gamma_i * g_i$ per cui le equazioni diventano disaccoppiate

$$g''_1 + 2*\zeta_1 * \omega_1 * g'_1 + \omega^2_1 * g_1 = S(T)$$

$$g''_2 + 2*\zeta_2 * \omega_2 * g'_2 + \omega^2_2 * g_2 = S(T)$$

$$g''_3 + 2*\zeta_3 * \omega_3 * g'_3 + \omega^2_3 * g_3 = S(T)$$

$$g''_4 + 2*\zeta_4 * \omega_4 * g'_4 + \omega^2_4 * g_4 = S(T)$$

*La soluzione della equazione *) è riportata nel paragrafo 3.3*
sistema sottosmorzato

$$g_n(t) = S(T)/\omega^2_n * e^{-\xi\omega t} * [1 - \cos\omega_{nD} t]$$

per cui abbiamo quattro soluzioni

$$g_1(t) = S(T)/\omega^2_1 * e^{-\xi\omega t} * [1 - \cos\omega_{1D} t]$$

$$g_2(t) = S(T)/\omega^2_2 * e^{-\xi\omega t} * [1 - \cos\omega_{2D} t]$$

$$g_3(t) = S(T)/\omega^2_3 * e^{-\xi\omega t} * [1 - \cos\omega_{3D} t]$$

$$g_4(t) = S(T)/\omega^2_4 * e^{-\xi\omega t} * [1 - \cos\omega_{4D} t]$$

$$[y] = [\phi] * [z], \quad \text{dove } [z] = [\Gamma_i] * [g]$$

gli spostamenti dei singoli piani

$y_1 = \Gamma_1 * \phi_{11} * g_1 + \Gamma_2 * \phi_{12} * g_2 + \Gamma_3 * \phi_{13} * g_3 + \Gamma_4 * \phi_{14} * g_4$

$y_2 = \Gamma_1 * \phi_{21} * g_1 + \Gamma_{21} * \phi_{22} * g_2 + \Gamma_3 * \phi_{23} * g_3 + \Gamma_4 * \phi_{24} * g_4$

$y_3 = \Gamma_1 * \phi_{31} * g_1 + \Gamma_2 * \phi_{32} * g_2 + \Gamma_3 * \phi_{33} * g_3 + \Gamma_4 * \phi_{34} * g_4$

$y_4 = \Gamma_1 * \phi_{41} * g_1 + \Gamma_2 * \phi_{42} * g_2 + \Gamma_3 * \phi_{43} * g_3 + \Gamma_4 * \phi_{44} * g_4$

esistono due metodi di combinazione per gli spostamenti e le sollecitazioni riportati nelle norme tecniche sulle costruzioni

SRS $Y_{max} = \sqrt{(\sum Y_i^2)}$

CQC combinazione quadratica completa NTC 2018

per lo spostamento

$Y = [\sum\sum \rho_{ij} * Y_i * Y_j]^{1/2}$

per la generica grandezza E sia essa sollecitazione o deformazione

$E = [\sum\sum \rho_{ij} * E_i * E_j]^{1/2}$

il coefficiente

$\rho_{ij} = [8 * \sqrt{(\zeta_i * \zeta_j)} * (\beta_{ij} * \zeta_i + \zeta_j) * \beta_{ij}^{3/2}] / [(1-\beta_{ij}^2)^2 + 4 * (\beta_{ij} * \zeta_i * \zeta_j) * (1+\beta_{ij}^2) + 4 * (\zeta_i^2 + \zeta_j^2) * \beta_{ij}^2]$

dove

ζ_i , ζ_j *smorzamento viscoso dei modi i e j* $\zeta = c/c_{cr}$

β_{ij} *è l'inverso del rapporto dei periodi tra i modi i e j* T_J / T_i

9-Strutture a Telaio Spaziale

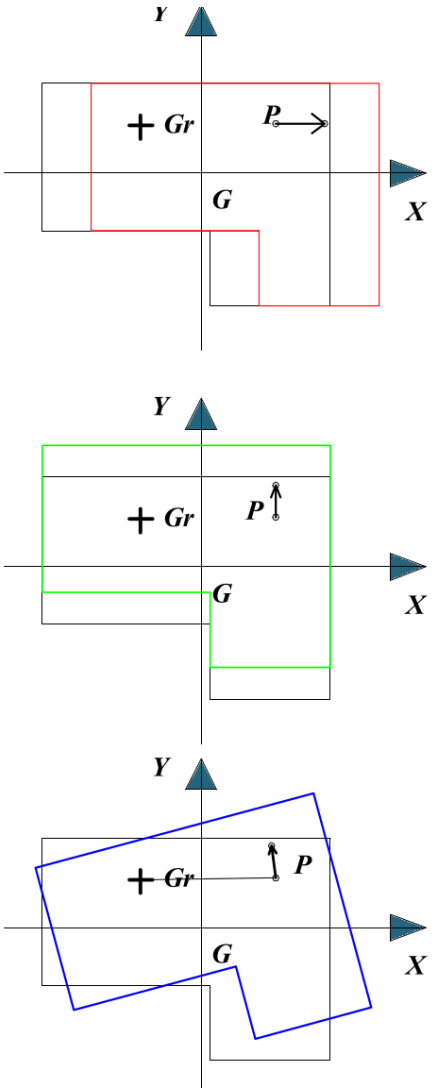
Per le strutture a telaio spaziale nella trattazione comune si fa la ipotesi di impalcato rigido e per ogni piano si considerano tre gradi libertà , quali

- spostamento in direzione X
-spostamento in direzione Y
- rotazione θ

Le coordinate del baricentro delle rigidezze

$X_{GR} = (\sum K_{XI} * Y_I) / \sum K_{XI}$; $Y_{GR} = (\sum K_{YI} * X_I) / \sum K_{YI}$;

La rotazione avviene intorno al baricentro delle rigidezze che coincide con il baricentro delle masse soltanto quando vi è simmetria nelle rigidezze; il baricentro delle masse dove sono applicate le azioni sismiche viene fatto coincidere con il baricentro geometrico dell'impalcato ed in esso assumiamo l'origine del sistema di riferimento



Lo spostamento δ del punto P ha due componenti , direzione X ed Y

$\delta x = u + d^{*}\theta * \sin\alpha; \quad \delta y = v + d^{*}\theta * \cos\alpha ;$

u traslazione secondo X

v traslazione secondo Y

θ rotazione intorno al baricentro delle rigidezze

d distanza del punto P dal baricentro delle rigidezze

α angolo che il segmento $G_R P$ forma con l'asse X $d^{*}\sin\alpha = d_X ; \; d^{*}\cos\alpha = d_y ;$
$\delta x = u - d_Y {}^{*}\theta ; \quad \delta y = v + d_X {}^{*}\theta ;$

Se l'origine del sistema di riferimento è nel baricentro delle rigidezze

$\delta x = u + Y_P {}^{*}\theta ; \quad \delta y = v + X_P {}^{*}\theta ;$

L'equazione di equilibrio dinamico si un telaio spaziale ad un piano è molto semplice

$m * u'' + c^{*}u' + k_X * u = S_X$ *direzione X*

$m * v'' + c^{*}v' + k_Y * v = S_Y$ *direzione Y*

rotazione intorno al baricentro delle rigidezze

$I * \theta'' + c^{*}\theta' + k_T {}^{*}\theta = S_T$

I momento di inerzia rotazionale della massa rispetto al baricentro delle rigidezze

$I = m^{*}\int (X^2 + Y^2)\,dA$

$k_T = \sum(Y_i {}^{*}k_{XI} + X_i {}^{*}k_{YI})$ *; anche c è una viscosità torsionale* $C_T = \sum(Y_i {}^{*}C_{XI} + X_i {}^{*}C_{YI})$

rigidezza torsionale calcolata rispetto al baricentro delle rigidezze

S_T *accelerazione torsionale* $S(T)^{*}d$ *; di distanza di G da* G_R

In questa maniera l'analisi dinamica del telaio viene eseguita separatamente nelle due direzioni ed alla rotazione. Passare da un telaio spaziale monopiano ad un edificio multipiano è abbastanza semplice nella ipotesi che non vi sia variazione di rigidezza in altezza e che i baricentri delle rigidezze siano allineati tutti lungo un asse verticale che definisce l'asse di rotazione del nostro edificio.

Direzione X

$m_1 * X''_1 + c_{11} * X_1' + K_{11} * X_1 + c_{12} * X_1' + K_{12} * X_2 = S_X$

$m_2 * X''_2 + c_{21} * X_1' + K_{21} * X_1 + c_{22} * X_2' + K_{22} * X_2 + c_{23} * X_3' + K_{23} * X_3 = S_X$

$m_3 * X''_3 + c_{32} X_2 + K_{32} * X_2 + c_{33} X_3' + K_{33} * X_3 + c_{34} X_4' + K_{34} * X_4 = S_X$

$m_4 * X''_4 + c_{43} X_4' + K_{43} * X_3 + c_{44} X_4' + K_{44} * X_4 = S_X$

Direzione Y

$m_1 * Y''_1 + c_{11} * Y_1' + K_{11} * Y_1 + c_{12} * Y_1' + K_{12} * Y_2 = S_Y$

$m_2 * Y''_2 + c_{21} * Y_1' + K_{21} * Y_1 + c_{22} * Y_2' + K_{22} * Y_2 + c_{23} * Y_3' + K_{23} * Y_3 = S_Y$

$m_3 * Y''_3 + c_{32} Y_2 + K_{32} * Y_2 + c_{33} Y_3' + K_{33} * Y_3 + c_{34} Y_4' + K_{34} * Y_4 = S_Y$

$m_4 * Y''_4 + c_{43} Y_4' + K_{43} * Y_3 + c_{44} Y_4' + K_{44} * Y_4 = S_Y$

Rotazione intorno asse verticale passante per G_R

$I_1 * \theta''_1 + c_{11} * \theta_1' + K_{11} * \theta_1 + c_{12} * \theta_1' + K_{12} * \theta_2 = S_X * Y_G + S_Y * X_G$

$I_2 * \theta''_2 + c_{21} * \theta_1' + K_{21} * \theta_1 + c_{22} * \theta_2' + K_{22} * Y_2 + c_{23} * \theta_3' + K_{23} * \theta_3 = S_X * Y_G + S_Y * X_G$

$I_3 * \theta''_3 + c_{32} * \theta_2 + K_{32} * \theta_2 + c_{33} \theta_3' + K_{33} * \theta_3 + c_{34} \theta_4' + K_{34} * \theta_4 = S_X * Y_G + S_Y * X_G$

$I_4 * \theta''_4 + c_{43} * \theta_4' + K_{43} * \theta_3 + c_{44} \theta_4' + K_{44} * \theta_4 = S_X * Y_G + S_Y * X_G$

L'analisi dinamica può essere estesa anche ad edifici multipiano irregolari in altezza dove i baricentri delle rigidezze non sono allineati per i quali vanno introdotti dei momenti di inerzia torsionali dovuti al disallineamento dei baricentri.

E' metodo usuale per eseguire l'analisi dinamica di un telaio spaziale utilizzando le formule della meccanica razionale per i corpi rigidi secondo le quali l'equilibrio alla rotazione può essere eseguito rispetto a qualsiasi punto P dell'impalcato
Le accelerazioni nelle due direzioni per un generico punto P

$u''_P = u''_0 + y_P * \theta'' + s''$
$v''_P = v''_0 + x_P * \theta''$

Le risultanti delle forze di inerzia lungo gli assi x ed y

$Q_X = -m*u''_0 + S_X*\theta'' + s''$

$Q_Y = -m*v''_0 + S_Y*\theta''$

$Q_\theta = -S_X*u''_0 + S_Y*v''_0 - I_0*\theta'' - s''*S_X$

Le equazioni del moto

$Q_X = c*(u'_0 + y_P*\theta') + K_X*(u_0 + y_P*\theta) = -m*u''_0 + S_X*\theta'' + s''$

$Q_X = c*(v'_0 - x_P*\theta') + K_Y*(v_0 + x_P*\theta) = -m*v''_0 + S_Y*\theta''$

$Q_\theta = u_0*\sum K_X*y - v_0*\sum K_y*x - \theta*(\sum K_X*y - \sum K_y*x) +$

$u_0*\sum c_X*y - v_0*\sum c_y*x - \theta*(\sum c_X*y - \sum c_y*x) = -S_X*u''_0 + S_Y*v''_0 - I_0*\theta'' - s''*S_X$

Le equazioni dinamiche deliranti *del sistema spaziale monopiano riferite ad un generico punto P dell'impalcato di coordinate* $(x_p ; y_p)$

$m*u''_0 + c*(u'_0 + y_P*\theta') + K_X*(u_0 + y_P*\theta) = S_X*\theta'' + s''$

$m*v''_0 + c*(v'_0 - x_P*\theta') + K_Y*(v_0 + x_P*\theta) = S_Y*\theta''$

$-S_X*u''_0 + S_Y*v''_0 - I_0*\theta''\ u_0*\sum K_X*y - v_0*\sum K_y*x - \theta*(\sum K_X*y - \sum K_y*x) +$

$u_0*\sum c_X*y - v_0*\sum c_y*x - \theta*(\sum c_X*y - \sum c_y*x) = -s''*S_X$

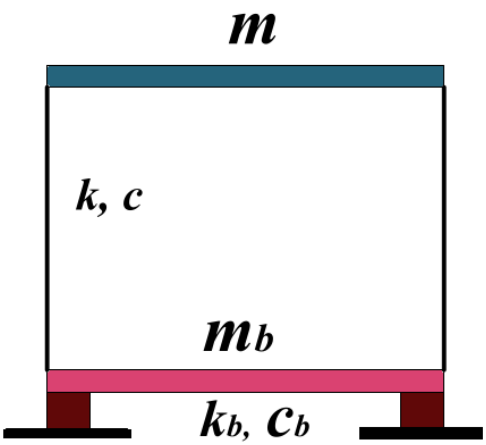
dove

S_X *momento statico della massa rispetto all'asse X*
S_Y *momento statico della massa rispetto all'asse Y*
I momento di inerzia rotazionale rispetto ad O origine del sistema di assi cartesiani

è evidente che il sistema di riferimento non deve essere baricentrico .
Queste formulazioni estese al telaio spaziale vengono utilizzate da tutti i software di calcolo agli elementi finiti per il calcolo strutturale nei quali le masse vengono concentrate nei nodi si supera la ipotesi di impalcato rigido i gradi libertà per la presenza di elementi ***plate-shell*** *aumentano considerevolmente , con modelli di calcoli differenti.*

10-L'analisi dinamica di edifici isolati

Consideriamo inizialmente un portale monopiano isolato alla base con isolatori sismici elastomerici , sollecitato da una accelerazione sismica Sd(T) , determinata dallo spettro di risposta in corrispondenza del periodo di oscillazione T.



La equazione fondamentale del moto

$M^* Y'' + C^* Y' + K^* Y = M^* Sd(T)$

La rigidezza K è quella complessiva della struttura , sono due molle in serie

$K = (k_i * k_s) /(k_i + k_s)$; $M = m+m_s$

La soluzione di questa equazione per sistema sottosmorzato

$Y(t) = Sd(T)/ \omega^2 * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,]$

dove $\omega^2 = K/M$;

$K = (k_i * k_s) /(k_i + k_s) = k_i /(k_i + k_s) + k_s/(k_i + k_s)$

Possiamo separare lo spostamento relativo al sistema di isolamento e quello relativo alla sovrastruttura

$Y(t) = Y_i + Y_s =$

$= M^* Sd(T) * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,] * k_i/(k_i + k_s) + M^* Sd(T) * e^{-\xi\omega t} * [\, 1-\cos\omega_D t \,] * k_s /(k_i + k_s)$

La forza da applicare sulla sovrastruttura è pari a $M^* Y''$

$F = \omega_D^2 * M * Sd(T) * e^{-\xi\omega t} * \cos\omega_D t * k_i/(k_i+k_s) + \omega_D^2 * M * Sd(T) * e^{-\xi\omega t} * \cos\omega_D t * k_s/(k_i+k_s)$

Il periodo di oscillazione $T = 2*\pi/\omega_D^2$; $\omega_D^2 = \zeta*(1- \omega^2)$; $\omega^2 = K/M$

$K = (k_i * k_s) /(k_i + k_s)$ $\zeta = c/c_{cr}$ $c_{cr} = 2*\sqrt{(km)}$

La accelerazione Sd(T) possiamo leggerla sullo spettro di risposta in corrispondenza del periodo T

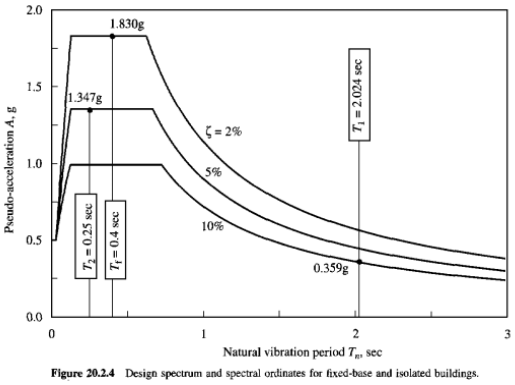
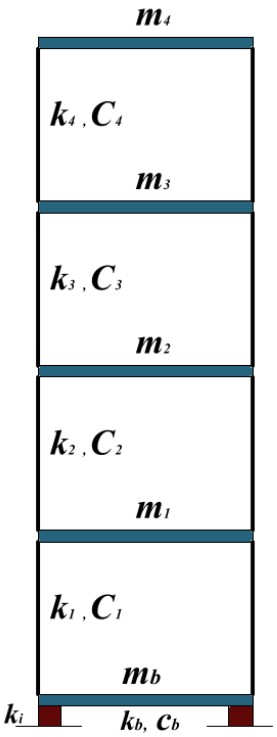


Figure 20.2.4 Design spectrum and spectral ordinates for fixed-base and isolated buildings.

L'incremento del periodo di oscillazione deriva dalla riduzione della rigidezza complessiva della struttura

$K = (k_i * k_s) /(k_i + k_s) < k_s$

Per un telaio multipiano isolato alla base :



Le equazioni del moto del telaio non isolato :

$m_1*Y''_1+c_1*Y_1'+K_1*Y_1+c_2*(Y_2'-Y_1')-K_2*(Y_2-Y_1)=m_1*Sd(T)$

$m_2*Y''_2+c_2*(Y_2'-Y_1')+K_2*(Y_2-Y_1)-c_2*(Y_3'-Y_2')+K_3*(Y_3-Y_2)=m_2*Sd(T)$

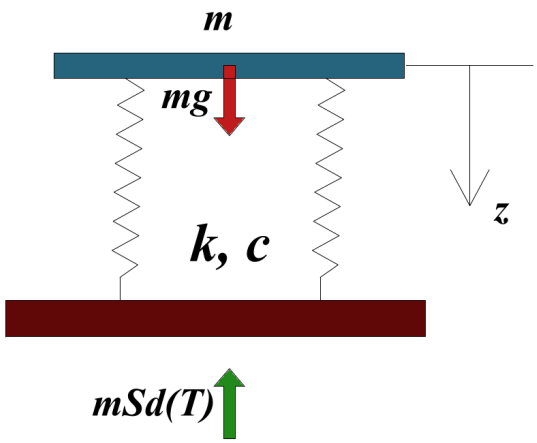
$m_3*Y''_3+c_3*(Y_3'-Y_2')+K_3*(Y_3-Y_2-c_4*(Y_4'-Y_3')+K_4*(Y_4-Y_3)=m_3*Sd(T)$

$m_4*Y''_4+c_4*(Y_4'-Y_3')+K_4*(Y_4-Y_3)=m_4*Sd(T)$

a questa va aggiunta una ulteriore equazione di equilibrio

$m_b*Y_b+c_b*Y_b'+K_b*Y_b+c_1*(Y_1'-Y_b')-K_1*(Y_1-Y_b)=m_b*Sd(T)$

11- Sisma verticale



Le forze verticali sono in equilibrio dinamico

Forza di inerzia m z''*
*Forza peso m*g*
*Forza reattiva di rigidezza K*z*
*Forza viscosa c*z'*
*Forza alla base m*Sd(t)*

$m*z''+c*z'+K*z=m[g\pm Sd(T)]$;

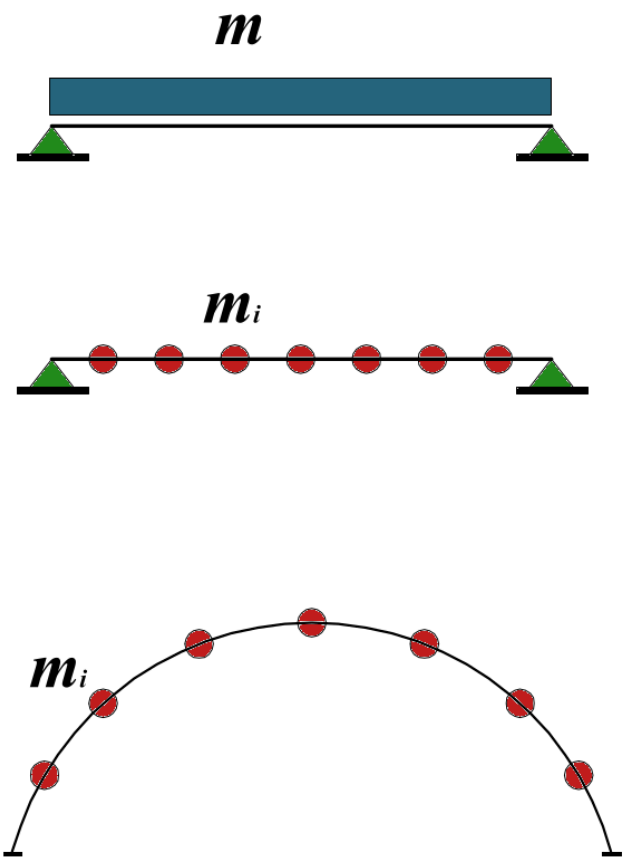
in un sisma sussultorio Sd(T) inverte il suo segno

La soluzione per sistema sottosmorzato :
$Z(t)=[g\pm Sd(T)]/\omega^2 * e^{-\xi\omega t}*[1-\cos\omega_D t]$ $\omega_D^2=\zeta*(1-\omega^2)$; $T_D=2*\pi/\omega_D^2$

La rigidezza $K=\sum EA/H$; $\omega^2=K/M$; $\zeta=c/c_{cr}$ $c_{cr}=2*\sqrt{(km)}$ $T=2*\pi/\omega^2$

12-Dinamica di travi continue

I sistemi continui possono essere trattati attraverso la discretizzazione e concentrazione delle masse, con un numero finito di gradi di libertà o considerando direttamente l'equazione della linea elastica imponendo l'equilibrio dinamico con un numero infinito di gradi di libertà



12.1-La trave appoggiata

L'equazione differenziale delle vibrazioni libere di una trave omogenea a sezione costante



$EI*V^{IV} + \mu*V^{II} = 0$; μ massa distribuita a metro lineare

Mediante la posizione

$V(z,t)= g(t)*f(z)$

$V^{IV} = g(t)*f(z)^{IV}$ derivata rispetto a z ;

$V^{II} =g(t)^{II} *f(z)$ derivata rispetto al tempo

$g(t)*EI*f(z)^{IV} +g(t)^{II} *\mu*f(z)= 0$

possiamo separare le variabili

$-g(t)/g(t)^{II} =\mu/EI *f(z)/f(z)^{IV}$

ottenendo le due equazioni

$g(t)^{II} + \omega^2 * g(t) = 0$

$f(z)^{IV} - \alpha^4 * f(z) = 0$

avendo posto $\omega^2 = EI/\mu* f(z)^{IV} /f(z)$

$\alpha^4 = \omega^2*\mu/EI$

la soluzione

$f(z) = A*sin\alpha z+B*cos\alpha z + C*sinh\alpha z+D*cosh\alpha z$

imponendo le condizioni ai limiti

$z= 0 \quad f(0)= 0 \ ; f''(0) = 0$

$z= L \quad f(L)= 0 \ ; f''(L) = 0$

si ottiene il sistema

$$B + D = 0$$

$$-\alpha^2*B + \alpha^2*D = 0$$

$A*sin\alpha L+ B*cos\alpha L + C*sinh\alpha L+ D*cosh\alpha L = 0$

$-A*\alpha^2 sin\alpha L- B\alpha^2*cos\alpha L + C*\alpha^2*sinh\alpha L+ D*\alpha^2*cosh\alpha L = 0$

il cui determinante deve essere nullo

$\sin\alpha L * \sinh\alpha L = 0$

$\alpha L = n*\pi \quad ; \quad \alpha^4 = n^4 * \pi^4 / L^4$

le pulsazioni fondamentali

$\omega_n = n^2 * \pi^2 / L^2 * \sqrt{(EI/\mu)} \quad T = 2*\pi/\omega$; *la frequenza* $f = 1/T$

la deformata $f(z) = \sum A_n * \sin(n*\pi*z/L)$

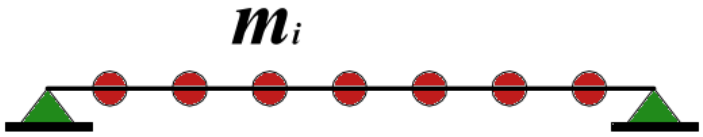
la deformata temporale

$g(t) = A*\cos\omega t + B*\sin\omega t$ *per* $t = 0$ $g(t) = 0$ $g'(t) = g_o$

la deformata relativa al modo i-mo $i = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n$

$V(z,t) = [A_i * \sin(i*\pi*z/L)] * [A*\cos\omega t + B*\sin\omega t]$

Se discretizziamo la trave appoggiata



Aussumiamo come gradi di libertà gli spostamenti verticali dei singoli nodi le equazioni di equilibrio dinamico in assenza di smorzamento assumono la forma

$m_1 * v''_1 + k_{11} * v_1 + k_{12} * v_2 + k_{13} * v_3 + k_{14} * v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{1n} * v_n = m_1 * S(T)$

$m_2 * v''_2 + k_{21} * v_1 + k_{22} * v_2 + k_{23} * v_3 + k_{24} * v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{2n} * v_n = m_2 * S(T)$

$m_3 * v''_3 + k_{31} * v_1 + k_{32} * v_2 + k_{33} * v_3 + k_{34} * v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{3n} * v_n = m_3 * S(T)$

$m_4 * v''_4 + k_{41} * v_1 + k_{42} * v_2 + k_{43} * v_3 + k_{44} * v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{4n} * v_n = m_4 * S(T)$

.....

$m_n * v''_n + k_{n1} * v_1 + k_{n2} * v_2 + k_{n3} * v_3 + k_{n4} * v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{nn} * v_n = m_n * S(T)$

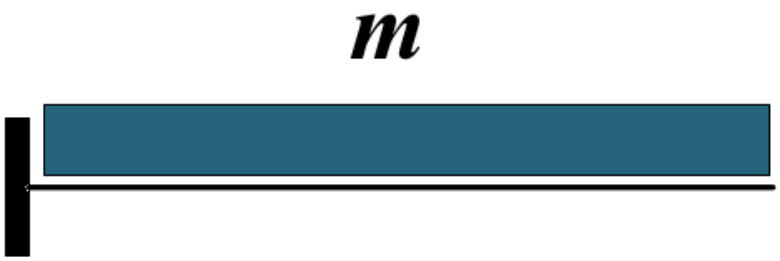
i coefficienti $K_{IJ} = 1/V_{IJ}$ dove V_{IJ} è lo spostamento verticale che si ha nel nodi i per effetto di una forza unitaria applicata nel nodo j e viceversa per il teorema di Betti.
Le pulsazioni possono essere calcolate attraverso la risoluzione del determinante della matrice dei coefficienti dove si ottiene una equazione di grado 2n che presenta n soluzioni ω^2 ; ω_1; ω_2; ω_3; ω_4;..... ω_n;

i periodi di vibrazione $T = 2*\pi/\omega$; T_1; T_2; T_3; T_4;.....T_n;

le n forme modali dalla risoluzione del sistema normalizzato alla mezzeria della trave n/2;
La soluzione e la combinazione dei risultati è analoga a quella vista per i telai multipiano

12.2-La mensola

L'equazione differenziale delle vibrazioni libere di una trave a mensola omogenea a sezione costante



$EI*V^{IV} + \mu*V^{II} = 0$; μ massa distribuita a metro lineare

Mediante la posizione

$V(z,t) = g(t)*f(z)$

$V^{IV} = g(t)*f(z)^{IV}$ derivata rispetto a z ;

$V^{II} = g(t)^{II} *f(z)$ derivata rispetto al tempo

$g(t)*EI*f(z)^{IV} + g(t)^{II} *\mu*f(z) = 0$

possiamo separare le variabili

$-g(t)/g(t)^{II} = \mu/EI *f(z)/f(z)^{IV}$

ottenendo le due equazioni

$g(t)^{II} + \omega^2 * g(t) = 0$

$f(z)^{IV} - \alpha^4 * f(z) = 0$

avendo posto $\omega^2 = EI/\mu * f(z)^{IV}/f(z)$

$\alpha^4 = \omega^2 * \mu/EI$

la soluzione
$f(z) = A*\sin\alpha z + B*\cos\alpha z + C*\sinh\alpha z + D*\cosh\alpha z$

imponendo le condizioni ai limiti

$z = 0 \quad f(0) = 0 \; ; f'(0) = 0$

$z = L \quad f''(L) = 0 \; ; f'''(L) = 0$

si ottiene il sistema

$B + D = 0$

$-A + C = 0$

$+A*\sin\alpha L + B*\cos\alpha L + C*\sinh\alpha L + D*\cosh\alpha L = 0$

$A*\cos\alpha L - B*\sin\alpha L + C*\cosh\alpha L + D*\cosh\alpha L = 0$

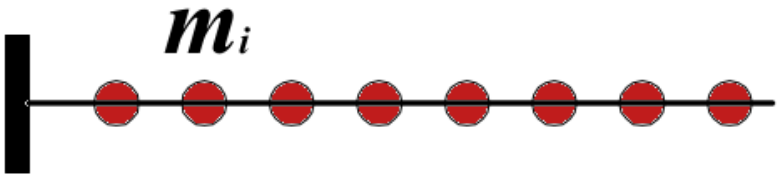
Eguagliando a zero il determinante della matrice dei coefficienti si ootiene l'equazione :

$1 + \cos\alpha L * \cosh\alpha L = 0$ *m massa per unità di lunghezza*

i cui primi autovalori sono dati da

n	ω
1	$3{,}5160*1/l^2*\sqrt{(EI/m)}$
2	$22{,}0345*1/l^2*\sqrt{(EI/m)}$
3	$61{,}6972*1/l^2*\sqrt{(EI/m)}$
4	$120{,}9019*1/l^2*\sqrt{(EI/m)}$
5	$199{,}8595*1/l^2*\sqrt{(EI/m)}$

Se discretizziamo la trave a mensola



Le equazioni di equilibrio dinamico

$m_1*v''_1 + k_{11}*v_1 + k_{12}*v_2 + k_{13}*v_3 + k_{14}*v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{1n}*v_n = m_1*S(T)$

$m_2*v''_2 + k_{21}*v_1 + k_{22}*v_2 + k_{23}*v_3 + k_{24}*v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{2n}*v_n = m_2*S(T)$

$m_3*v''_3 + k_{31}*v_1 + k_{32}*v_2 + k_{33}*v_3 + k_{34}*v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{3n}*v_n = m_3*S(T)$

$m_4*v''_4 + k_{41}*v_1 + k_{42}*v_2 + k_{43}*v_3 + k_{44}*v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{4n}*v_n = m_4*S(T)$

.....

$m_n*v''_n + k_{n1}*v_1 + k_{n2}*v_2 + k_{n3}*v_3 + k_{n4}*v_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots k_{nn}*v_n = m_n*S(T)$

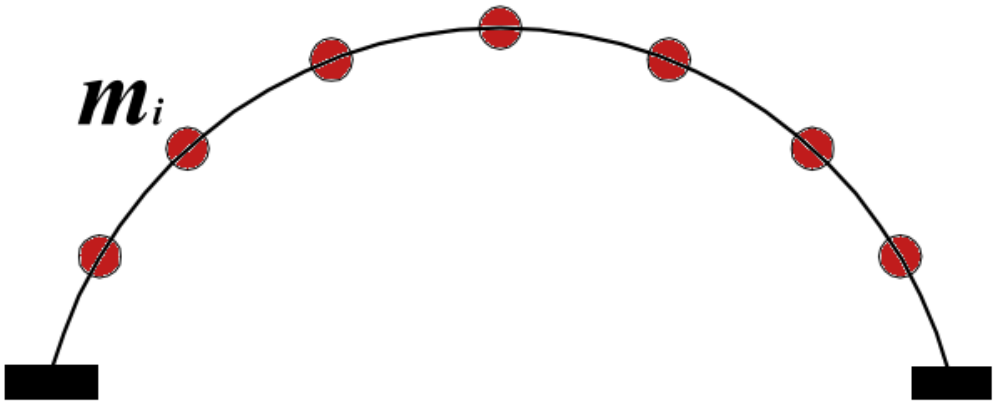
i coefficienti hanno lo stesso significato definito nel paragrafo precedente $K_{IJ} = 1/V_{IJ}$ *dove* V_{IJ} *è lo spostamento verticale che si ha nel nodi i per effetto di una forza unitaria applicata nel nodo j e viceversa per il teorema di Betti.*
Le pulsazioni possono essere calcolate attraverso la risoluzione del determinante della matrice dei coefficienti dove si ottiene una equazione di grado 2n che presenta n soluzioni ω^2 ; $\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \ldots\ldots\ldots\ldots \omega_n;$

i periodi di vibrazione $T = 2*\pi/\omega$; $T_1; T_2; T_3; T_4; \ldots\ldots\ldots\ldots T_n;$

le n forme modali dalla risoluzione del sistema normalizzato alla mezzeria della trave n/2;

12.3-L'arco

Lo studio della dinamica delle strutture ad arco più complesso e può avvenire esclusivamente attraverso la discretizzazione e concentrazione delle masse; è evidente che la azione sismica può essere orizzontale e verticale per ogni nodo vanno considerati 2 gradi di libertà u_i e v_i , inoltre il nodo per entrambi i tipi di sollecitazione può subire deformazioni orizzontali e verticali.



In una modellazione agli elementi finiti , per il singolo nodo essendo lo schema piano si considerano tre gradi di libertà u_i ,v_i e φ_i

per l'asta i j si calcolano le sollecitazioni agli estremi

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: Matrice di Rigidezza di Elemento, riferimento locale

Ora sono noti tutti i coefficienti di rigidezza dell'elemento e può essere scritta l'intera matrice di rigidezza dell'elemento.

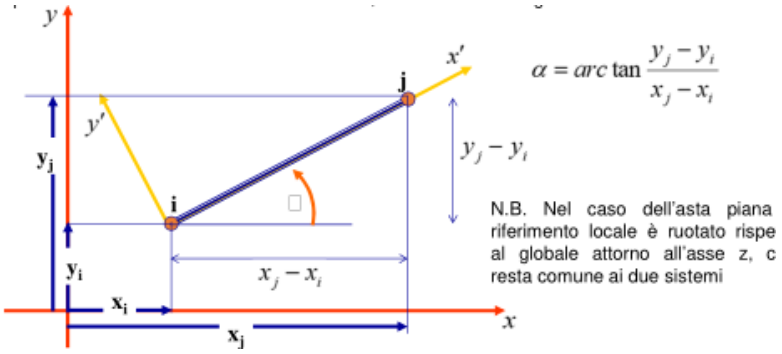
$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}$$

N.B. i termini nulli indicano che non vi è accoppiamento tra forze assiali e momento flettente e tra forze assiali e taglio. Questo è previsto dalla teoria elementare della trave.

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Per un asta inclinata si opera una trasformazione di coordinate e la matrice di rigidezza è la seguente :

$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$-\frac{EAc}{L}$	$-\frac{EAs}{L}$	0
$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0
$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$



Dove c = cosα ; s = sinα.

Le forze nodali sono rappresentate dalle forze di inerzia

$F_{XI} = -m_i * u''_i$; $F_{YI} = -m_i * v''_i$; $M_{ZI} = -I_i * \varphi''_i$;

$F_{XJ} = -m_J * u''_j$; $F_{YJ} = -m_J * v''_j$; $M_{ZJ} = -I_J * \varphi''_J$;

Ovviamente il calcolo viene eseguito attraverso un software FEM che utilizza la medesima metodologia e ci fornisce direttamente le pulsazioni i periodi e le deformate modali.

13-Conclusioni

La dinamica strutturale è una materia complessa piacevole da studiare poiché combina i metodi differenziali matematici con quelli della fisica e della meccanica razionale quale il principio di D'Alembert ; ovviamente è qualcosa di molto teorico distante dal comportamento effettivo di un edificio durante un evento sismico ma rappresenta un approccio moderno al calcolo strutturale eseguito attraverso software FEM . Nei paragrafi precedenti si è visto che l'analisi dinamica di un edificio multipiano regolare in altezza può essere eseguita anche mediante un semplice foglio elettronico determinando pulsazioni periodi di oscillazione e deformate modali utile dal punto di vista didattico ma palesemente filosofico e improduttivo nella pratica professionale dove è necessario avere un bagaglio formativo nella dinamica delle strutture per una corretta progettazione strutturale ed eseguire i calcoli dinamici con software FEM . In questa ottica sono molto interessanti le analisi eseguite con metodi non lineari che tengono conto della evoluzione delle rigidezze e della sollecitazione sismica caratterizzata da un accelerogramma sia per edifici con isolamento alla base che per edifici in muratura o in cemento armato. Lo scopo di questi appunti è stato quello di rinfrescare la mia preparazione in matematica soprattutto stimolare intuitivamente il cervello allontanando rotondità mentali dannose per ogni individuo.

Bibliografia

Prof. Mario Paz Dinamica Strutturale
Prof. Mario Como Giorgio Lanni Elementi di costruzioni antisismiche
Prof. Anil. K. Chopra Berkeley , Dynamics of Structures
Prof. Vincenzo Franciosi Problemi di scienze delle costruzioni Vol. 3

Video corsi YOU TUBE

Prof. Mohamed Noureldin Dynamics of structures
Prof. Riya Catherina George Hiroshima Japan Structural Dynamics for civil engineers

Elementi finiti per strutture

1- Introduzione

2- Matematica preliminare

3- Relazioni tensione deformazione

4- Descrizione del metodo

5-Il pendolo e la trave

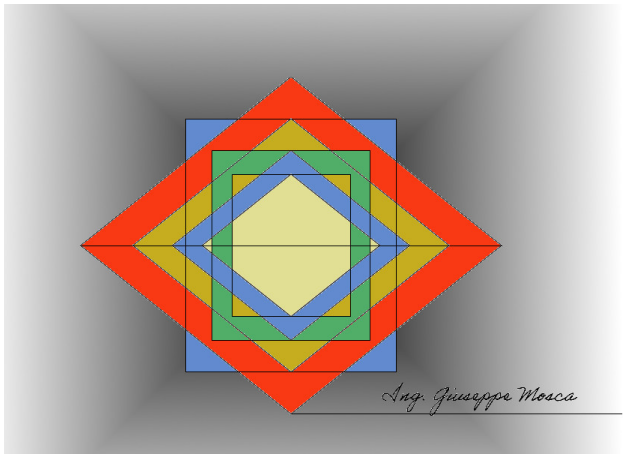
6 -La lastra

7 -La piastra

8- Il muro

9 -La volta

10- Conclusioni

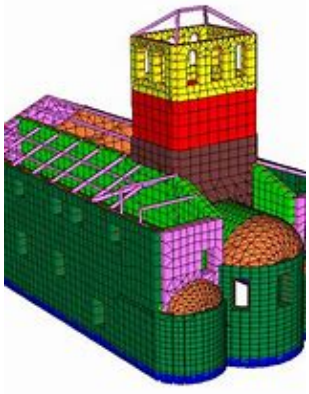


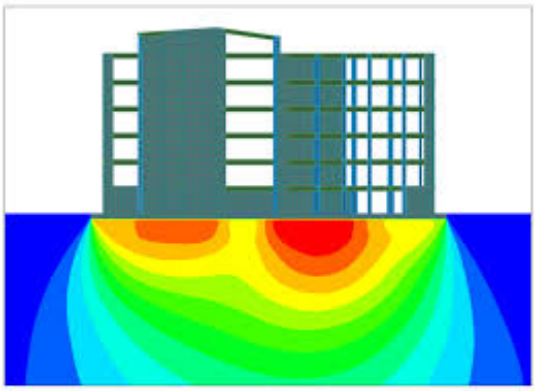
Ing. Giuseppe Mosca

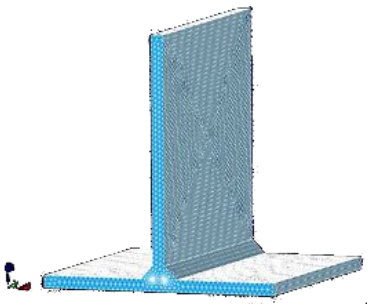
Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

La scienza delle costruzioni con l'introduzione dei personal computer a partire dagli anni 80 inizialmente da parte dei professionisti e poi degli studenti ha subito un mutamento radicale , le teorie risalenti al XVIII secolo del de Saint Venant di Navier , del semi spazio-elastico di Boussinnisques , i tradizionali metodi di risoluzione di sistemi piani e spaziali attraverso il principio dei lavori virtuali e le equazioni cardinali della statica sono state superate soppiantate dai metodi agli elementi finiti che prevedono la discretizzazione del continuo elastico deformabile in elementi aventi dimensioni finite ΔX; ΔY; ΔZ; trasformando le normali regole di integrazione numerica irti e piene di difficoltà in sommatorie risolvendo qualsiasi problematica strutturale. Soprattutto nella pratica professionale perdere del tempo a calcolare strutture ad arco anche a sezione variabile attraverso i metodi antichi della scienza delle costruzioni è controproducente si impiega tempo si rischia di sbagliare, per cui si fa ricorso a software ad elementi finiti che consentono di modellare qualsiasi struttura determinare lo stato tensionale ed eseguire la analisi dinamica. La problematica viene trasferita alla informatica ovvero difendersi da virus attacchi informatici che possono rendere vano il nostro lavoro per cui necessario conoscere non solo la teoria degli elementi finiti ma anche i metodi tradizionali in modo da poter interpretare correttamente i risultati forniti dal software di calcolo. Il calcolo agli elementi finiti trova applicazione non solo nelle strutture ma soprattutto nella meccanica diventa quindi fondamentale quando si calcola una struttura in legno essere in grado di modellare il collegamento tra travi e pilastri o in fondazione , ancora se si studiano le dispersioni di calore bisogna modellare un ponte termico che ci consente di determinare la trasmittanza lineare cosa che viene eseguita in modo semplice attraverso dei software free. Se si vuole studiare la interazione cinematica e dinamica tra edificio e terreno eseguire quindi una analisi dinamica che tenga conto di un volume significativo di terreno al di sotto dell'edificio esso va discretizzato e modellato agli elementi finiti utilizzando elementi piani plate shell o brick ovvero parallelepipedi. Questa metodologia negli ultimi 30 anni ha trovato largo impiego nel calcolo dei edifici antichi quali chiese con le strutture di copertura arcuate modellando la muratura non come parete ma come composta da tanti elementi brick o plateshell ;



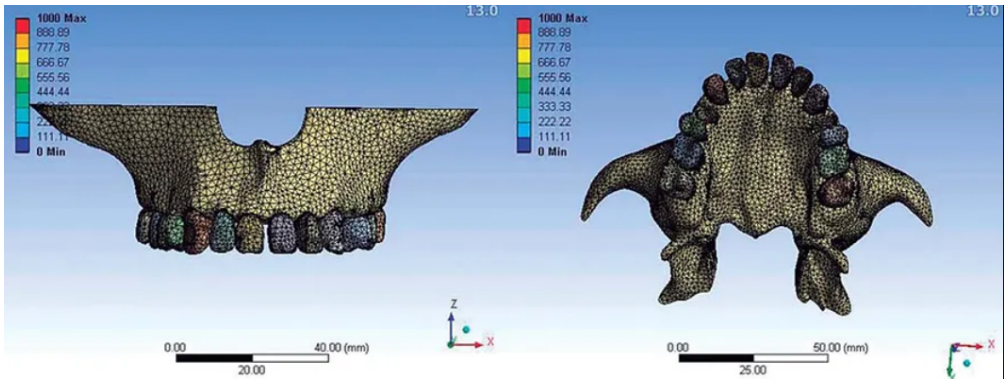




Lo studio della teoria del calcolo agli elementi finiti è puramente teorico non ha alcun risvolto pratico o forma di guadagno il tutto viene demandato al PC , ma per chi usa software FEM è necessario conoscere i fondamenti di questa teoria.

La modellazione FEM ha avuto molteplici applicazioni non solo nel calcolo strutturale ma anche nel settore medico utilizzato per modellare denti , determinare gli sforzi sugli arti o ancora nel settore della assistenza sociale per calcolare le protesi per le persone portatrici di handicap . La scienza delle costruzioni ha avuto larghissimo impiego ed utilità anche in medicina esiste oggi un corso di laurea quale biomeccanica dove vengono studiate in modo approfondito tali applicazioni, quel conflitto esistente tra medici e ingegneri le strumentalizzazioni politiche e televisive del nome prof. Adriano Galli (chiaro riferimento alla cultura francese De Saint Venant e Navier) gli esponenti di sinistra , Autonomia Operaia è andando via via scemando.

Ortodonzia



Calcolo di protesi per anca

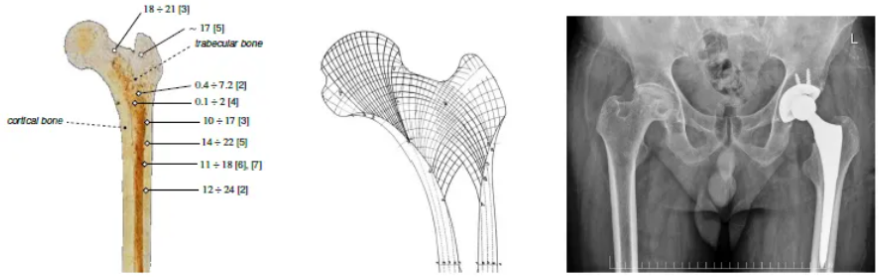


Fig. 1: Distribuzione del modulo di Young [GPa] e relativo riferimento per le differenti tipologie di osso in differenti zone del femore (a); linee di forza nel collo del femore [8]; radiografia dell'impianto THA [9].

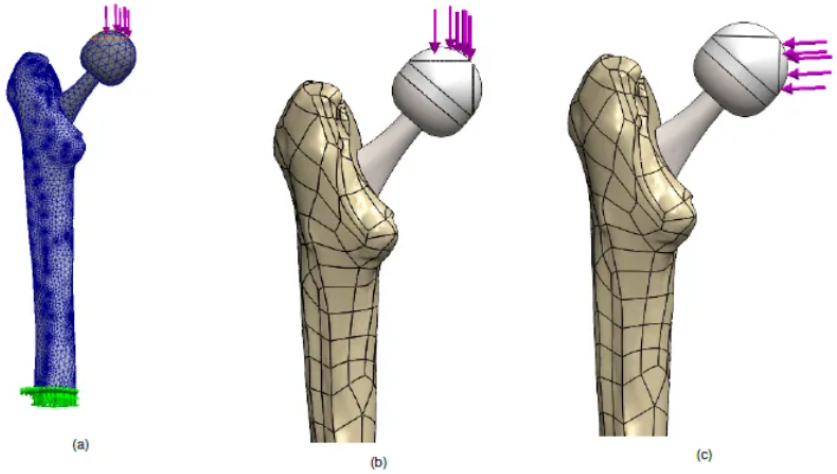


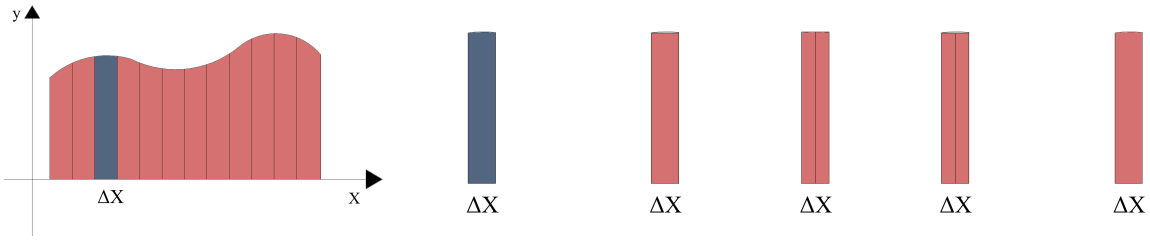
Fig. 3: Mesh (a) dove è possibile apprezzare i punti di densificazione dovuti alle asperità della superficie esterna del femore. Ingrandimento sull'applicazione del carico verticale (b) e orizzontale

2- Matematica preliminare

Un primo approccio matematico consiste nei metodi di integrazione, se abbiamo una funzione y = f(x) e vogliamo determinare l'area sottesa dalla funzione eseguiamo il calcolo integrale

$A = \int f(x)dx$ *che attraverso una discretizzazione si trasforma in sommatoria*

$A = \sum f(x)*\Delta X$ *determinando l'area come somma di tanti elementini .*



Per il calcolo della singola area elementare si possono utilizzare diverse soluzioni :

Area del rettangolo di lati $f(x)*\Delta X$ *parte superiore costante*

Area del trapezio $[f(x)+ f(x+\Delta)]*\Delta X/2$ *parte superiore lineare*

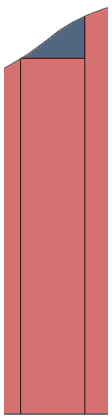
Area del settore di parabola

$f(x)*\Delta X + [f(x+\Delta X)- f(x)]*\Delta X /6$ *parte superiore a andamento quadratico*

$y = a*x^2$

Area del settore di cubica $y = a*x^3$ *ect*

La precisione dello sommmatoria dipende dalla dimensione del singolo elemento finito ; se questi è infinitesimo come nel calcolo integrale la soluzione è esatta se invece ha dimensioni finite che dipendono dal grado di discretizzazione diventa importante il calcolo dell'area elementare evidenziata in azzurro.



Consideriamo la funzione

$y = f(x) = x^2 - 2$ *i cui zeri sono* $x = \pm \sqrt{2}$

lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x = x_O$

$f(x) = f(x_0) + f'(x) * h + 1/2! * f''(x) * h^2 + 1/3! * f'''(x) * h^3 + 1/4! * f''''(x) * h^4 .....$

la derivata prima $f'(x) = 2*x$ *; la derivata seconda* $f''(x) = 2$,

le derivate successive sono nulle

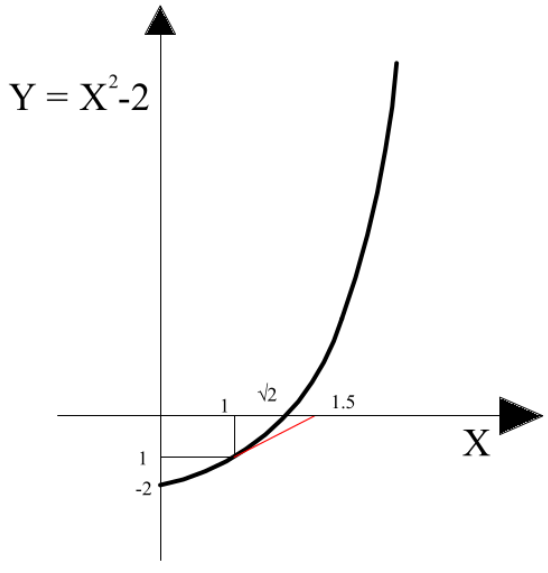
arrestiamoci ai termini del primo ordine

$f(x) = f(x_0) + f'(x) * h$ *ponendo* $f(x) = 0$ $h = f(x_0)/f'(x_0)$

la approssimazione della funzione per tratti lineari avviene step by step iniziando dal punto $x_0 = 1$ $y = f(x) = x^2 - 2 = -1$

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	h	$f(x_0+h)$	$x_0 + h$
1	-1	2	0,5	0	1,5
1,5	0,25	3	-0,083	0,505	1,417
1,417	0,007	2,834	0,0024	0,01469	1,419

il grafico della funzione con l'analisi al passo



3- Relazioni tensione deformazione

Prima di iniziare la trattazione agli elementi finirti è opportuno richiamare alcune considerazioni sul continuo elastico della scienza delle costruzioni quali :

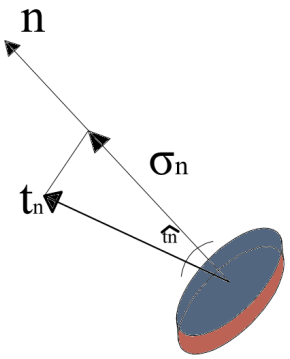
Definizione della tensione
Equazioni indefinite dell'equilibrio
Equazioni di Cauchy
Relazioni elastiche isotropia
Relazioni elastiche ortotropia
Relazioni elastoplastiche

Le ipotesi alla base della trattazione sono di continuo omogeneo linearmente elastico
Definito un elemento piano di normale n ed area elementare ΔA , sul quale agisce un forza ΔF la tensione

$t_n = \lim \Delta F/\Delta A$ *per* ΔA *che tende a zero*

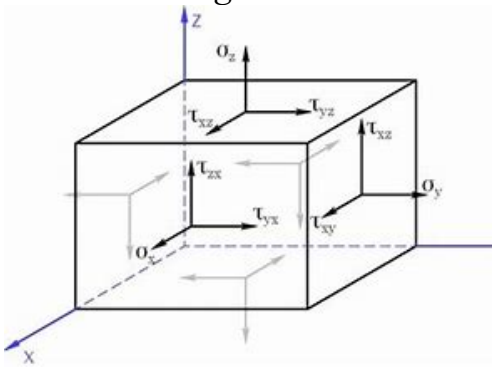
la tensione normale sull'elemento piano $\sigma_N = t_n * \cos tn$

tn è l'angolo che la forza ΔF forma con la normale n



Se consideriamo il volume elementare parallelepipedo di lati ΔX; ΔY; ΔZ; le tensioni normali sulle tre facce σx ; σy ; σz ; di normale X , Y e Z

le tensioni tangenziali simmetriche τxy= τyx ; τxz= τzx ; τyz= τzy ;



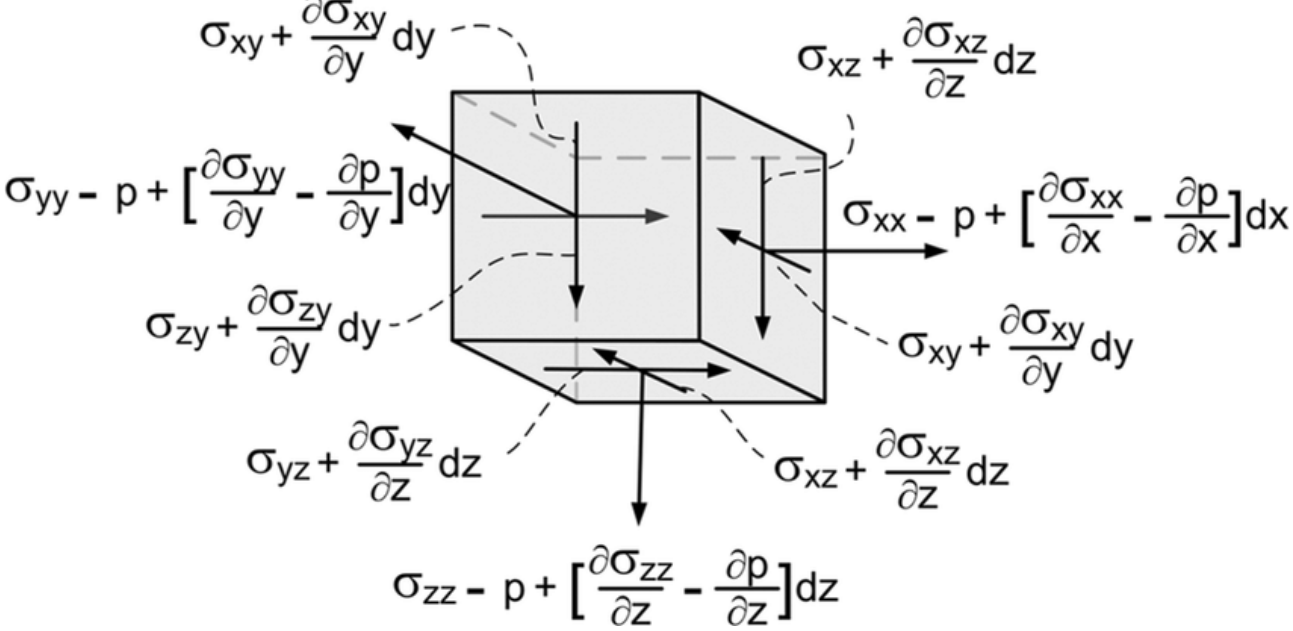
Le equazioni indefinite dell'equilibrio fanno riferimento al continuo omogeneo sollecitato dalle forze di massa X Y Z per unità di volume

$X/V = \int \rho * g_x \, dV \; ; \; Y/V = \int \rho * g_Y \, dV \; ; \; Z/V = \int \rho * g_Z \, dV \; ;$

$X = \rho * g_x \; ; \; Y = \rho * g_Y \; ; \; Z = \rho * g_Z \; ; \; \rho$ *densità*

$g_x \; ; \; g_Y \; ; \; g_Z \; ;$ *componenti della accelerazione di gravità verticale secondo gli assi*

dall'equilibrio alla traslazione in direzione x y e z del volume elementare tenendo presente gli incrementi



nella ipotesi di densità costante e assenza di forze di superficiali

$d\sigma x/dx * \Delta X * \Delta Y * \Delta Z + d\tau xy/dy * \Delta X * \Delta Y * \Delta Z + d\tau xz/dz * \Delta X * \Delta Y * \Delta Z =$

$m * g_x \, \Delta X * \Delta Y * \Delta Z$

la prima equazione diventa

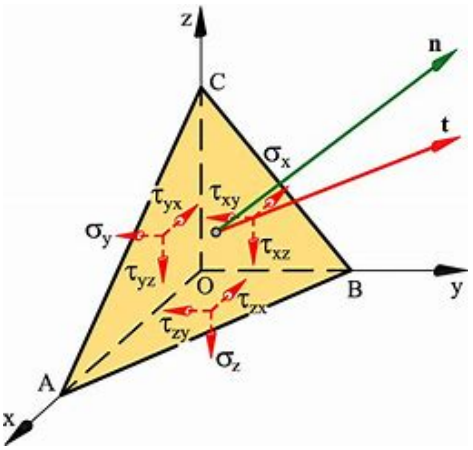
$d\sigma x/dx + d\tau xy/dy + d\tau xz/dz = m * g_x = X$ *forza per unità di volume* $[F * L^{-3}]$

le altre due equazioni

$d\tau xy/dx + d\sigma y/dy * + d\tau yz/dz = m * g_y = Y$

$d\tau zx/dx + d\tau zy/dy * + d\sigma z/dz = m * g_z = Z$

L'equilibrio delle tensioni con le forze di superficie lo si ottiene attraverso il tetraedro di ***Cauchy***



indicate rispettivamente con cosnx ; cosny; cosnz; i coseni direttori della normale all'elemento piano con gli assi del sistema di riferimento x y e z , le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo i tre assi

$\sigma x * \Delta A_X + \tau xy * \Delta A_Y + \tau xz * \Delta A_Z = P_X * \Delta A + m * g_X * \Delta V + m * a_X * \Delta V$

al tendere di ΔV a zero le due forze di inerzia su annullano i coseni direttori sono individuati dalle relazioni

g_X *componente accelerazione di gravità secondo x*

a_X *componente accelerazione sismica secondo x*

$cosnx = \Delta A_X / \Delta A$; $cosny = \Delta A_Y / \Delta A$; $cosnz = \Delta A_Z / \Delta A$

le equazioni diventano

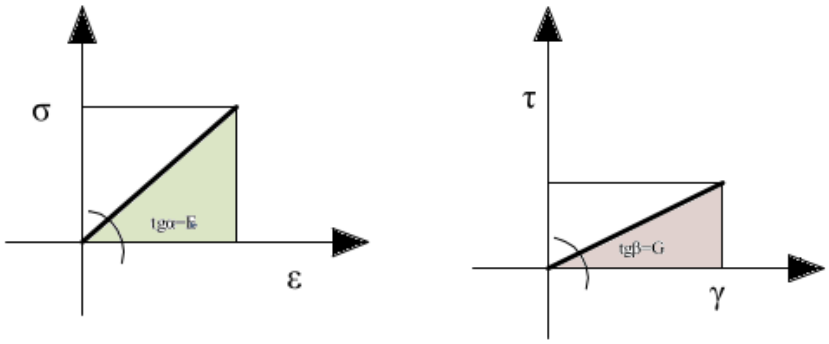
$\sigma x * cosnx + \tau xy * cosny + \tau xz * cosnz = P_X$

$\tau xy * cosnx + \sigma y * cosny + \tau xz * cosnz = P_Y$

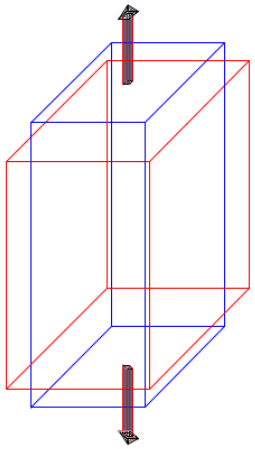
$\tau xz * cosnx + \tau yz * cosny + \sigma z * cosnz = P_Z$

meglio note come equazioni del tetraedro di ***Cauchy***

Le relazioni elastiche nella ipotesi di materiale omogeneo isotropo e linearmente elastico



la deformazione con contrazione laterale



$\varepsilon_X = \sigma_X/E$; $\varepsilon_Y = -\upsilon*\sigma_X/E$; $\varepsilon_Z = -\upsilon*\sigma_X/E$;

$\varepsilon_Y = \sigma_Y/E$; $\varepsilon_X = -\upsilon*\sigma_Y/E$; $\varepsilon_Z = -\upsilon*\sigma_Y/E$;

$\varepsilon_Z = \sigma_Z/E$; $\varepsilon_Y = -\upsilon*\sigma_Z/E$; $\varepsilon_X = -\upsilon*\sigma_Z/E$;

υ = 1/m coefficiente di Poisson

$\varepsilon_X = \sigma_X/E - \upsilon*(\sigma_Y + \sigma_Z)/E$

$\varepsilon_Y = \sigma_Y/E - \upsilon*(\sigma_X + \sigma_Z)/E$

$\varepsilon_Z = \sigma_Z/E - \upsilon*(\sigma_X + \sigma_Y)/E$

$\gamma_{XY} = \tau_{XY}/G$; $\gamma_{XZ} = \tau_{XZ}/G$; $\gamma_{YZ} = \tau_{YZ}/G$;

*nella ipotesi di **ortotropia** sono altresì immediate le relazioni tra deformazioni e tensioni , sempre nella ipotesi di elasticità lineare con tre moduli di elasticità normale e tre moduli di elasticità tangenziale*

E_X ; E_Y ; E_Z ; G_{XY} ; G_{XZ}; G_{YZ} ;

$\varepsilon_X = \sigma_X / E_X$; $\varepsilon_Y = - \upsilon_{XY} * \sigma_X / E_X$; $\varepsilon_Z = - \upsilon_{XZ} * \sigma_X / E_X$;

$\varepsilon_Y = \sigma_Y / E_Y$; $\varepsilon_X = - \upsilon_{XY} * \sigma_Y / E_Y$; $\varepsilon_Z = - \upsilon_{YZ} * \sigma_Y / E_Y$;

$\varepsilon_Z = \sigma_Z / E_Z$; $\varepsilon_Y = - \upsilon_{YZ} * \sigma_Z / E_Z$; $\varepsilon_X = - \upsilon_{XZ} * \sigma_Z / E_Z$;

$\gamma_{XY} = \tau_{XY} / G_{XY}$; $\gamma_{XZ} = \tau_{XZ} / G_{XZ}$; $\gamma_{YZ} = \tau_{YZ} / G_{YZ}$;

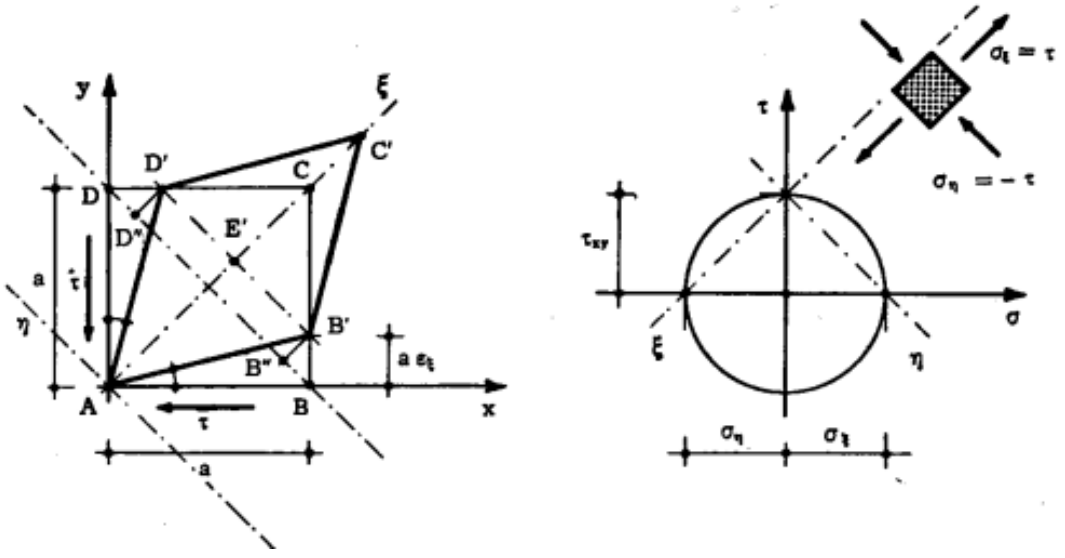
$\varepsilon_X = \sigma_X / E_X - \upsilon_{XY} * \sigma_Y / E_Y - \upsilon_{XZ} * \sigma_Z / E_Z$

$\varepsilon_Y = \sigma_Y / E_Y - \upsilon_{XY} * \sigma_X / E_X - \upsilon_{XZ} * \sigma_Z / E_Z$

$\varepsilon_Z = \sigma_Z / E_Z - \upsilon_{XY} * \sigma_Y / E_Y - \upsilon_{XZ} * \sigma_X / E_X$

$\gamma_{XY} = \tau_{XY} / G_{XY}$; $\gamma_{XZ} = \tau_{XZ} / G_{XZ}$; $\gamma_{YZ} = \tau_{YZ} / G_{YZ}$;

Per quanto concerne gli scorrimenti nella ipotesi di taglio puro ovvero sola tensione tangenziale la deformazione dell'elemento piano



$\gamma_{XY} = 2 * \tau_{XY} * (1+\upsilon) / E$ *con* $G = E / [2*(1+\upsilon)]$ $\upsilon = 1/m$

*le relazioni inverse nella ipotesi di materiale ad **elasticità lineare omogeneo ed isotropo***
Si tratta di ricavare la inversa della matrice

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

*per materiale ad **elasticità lineare omogeneo ed ortotropo** vale un analogo ragionamento*
*Per uno **stato tensionale piano***

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - (T-T_o) \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

con $\upsilon_{XY} * E_Y = \upsilon_{YX} * E_X$

$$G_{xy} = \frac{E_x E_y}{E_x + E_y + 2E_y\nu_{xy}}$$

Per uno stato tensionale tridimensionale si tratta di determinare la inversa della matrice dei coefficienti

$\varepsilon_X = \sigma_X/E_X - \upsilon_{XY}*\sigma_Y/E_Y - \upsilon_{XZ}*\sigma_Z/E_Z$

$\varepsilon_Y = -\upsilon_{XY}*\sigma_X/E_X + \sigma_Y/E_Y - \upsilon_{XZ}*\sigma_Z/E_Z$

$\varepsilon_Z = -\upsilon_{XZ}*\sigma_X/E_X - \upsilon_{XY}*\sigma_Y/E_Y + \sigma_Z/E_Z$

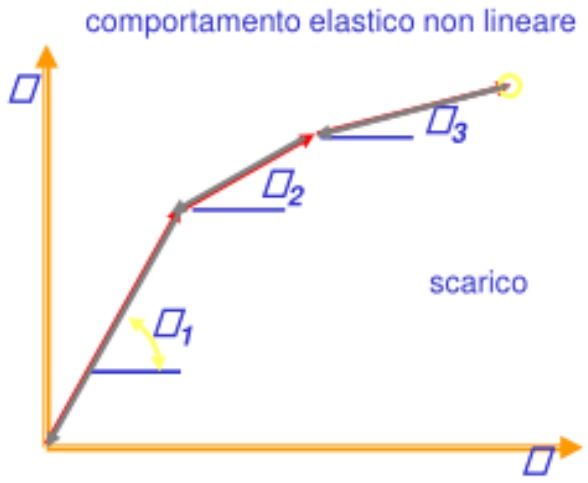
$\gamma_{XY} = \tau_{XY}/G_{XY}$;

$\gamma_{XZ} = \tau_{XZ}/G_{XZ}$;

$\gamma_{YZ} = \tau_{YZ}/G_{YZ}$;

Relazioni elastoplastiche

Il legame tra tensioni e deformazioni viene ottenuto con un metodo incrementale approssimando la curva ad una spezzata e per ogni tratto sono valide le relazioni elastiche viste in precedenza



La curva che definisce il diagramma σ- ε viene suddivisa i tratti lineari che approssimano il suo andamento ad inclinazione variabile con differente valore

del modulo elastico : E_1 ; E_2 ; E_3 ;
della tensione superiore : σ_1 ; σ_2 ; σ_3 ;
della deformazione : ε_1 ; ε_2 ; ε_3 ;

per $0 \le \sigma \le \sigma_1$; $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$; $E = E_1$; $\nu = \nu_1$ $G_1 = E_1 / [2*(1+\nu_1)]$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

per $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$; $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$; $E = E_2$; $\nu = \nu_2$ $G_2 = E_2 / [2*(1+\nu_2)]$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

per $\sigma_2 \le \sigma \le \sigma_3$; $\varepsilon_2 \le \varepsilon \le \varepsilon_3$; $E = E_3$; $\nu = \nu_3$ $G_3 = E_3 / [2*(1+\nu_3)]$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

ovviamente si determinano gli incrementi tensionali $\Delta\sigma$ *e di deformazione* $\Delta\varepsilon$

$\sigma_1 ; \varepsilon_1$ $\sigma_1 + \Delta\sigma_2$; $\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2$; $\sigma_2 + \Delta\sigma_3$; $\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3$;

La trattazione può essere eseguita per qualsiasi curva tensione deformazione e può essere estesa a materiali omogenei ed ortotropi

4- Descrizione metodo elementi finiti

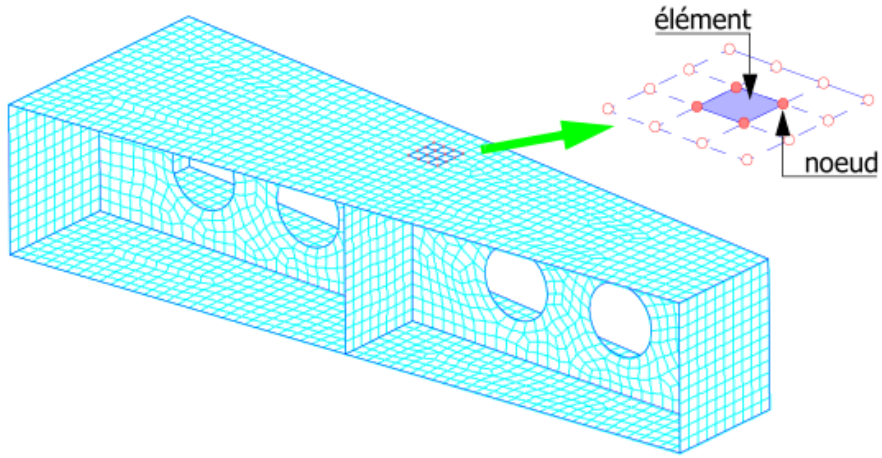
Il metodo agli elementi finito è un metodo di simulazione numerica utilizzato per il calcolo di qualsiasi tipo di struttura , attraverso una discretizzazione definendo l'elemento finito le cui equazioni locali e globali sono espresse in forma matriciale :

$F = K^* \Delta$

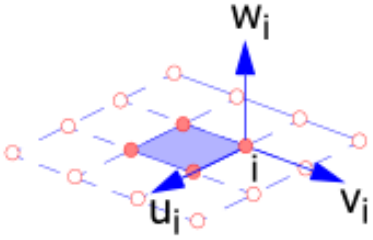
F forze esterne di massa e superficie
K matrice di rigidezza
Δ matrice spostamento che tiene conto delle condizioni di vincolo

Tra le forze di massa sono comprese sia le azioni dovute alla gravità che alle accelerazioni sismiche orizzontali e verticali

Questo sistema di equazioni in forma matriciale ha una soluzione che è molto adatta al calcolo automatico tramite PC , anche se non è possibile avere la certezza del risultato a differenza di strutture intelaiata calcolate con il metodo dei cedimenti per i quali al progettista strutturale sono già noti i diagrammi a maniera delle sollecitazioni flettenti e taglianti . Il metodo consiste nella discretizzazione della struttura in elementi semplici (elementi finito) le cui dimensioni dipendono dal grado di approssimazione



I singoli elementi sono collegati tramite i nodi , e ad ogni nodo corrispondono tre gradi libertà (u_I; v_I ; w_I) per il nodo i



Vi sono tre grandi famiglie di elementi

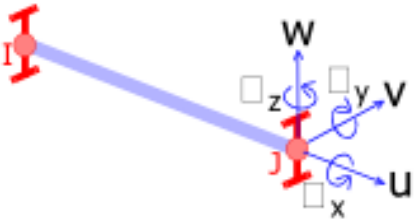
-unidimensionali
-bidimensionali
-tridimensionali

- Elementi finiti unidimensionali

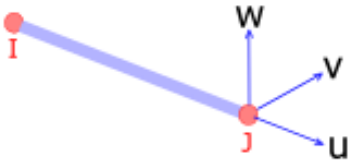
Sono di due tipi , ovvero asta di dimensioni finite avente due nodi alle quali corrispondono :

***-Trave** ,(beam) ha 6 gradi di libertà per nodo*

3 traslazioni $(u_I; v_I; w_I)$ *3 rotazioni* $(\theta_X; \theta_Y; \theta_Z)$



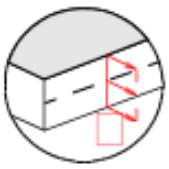
***-Pendolo** con tre gradi di libertà per nodo 3 traslazioni* $(u_I; v_I; w_I)$

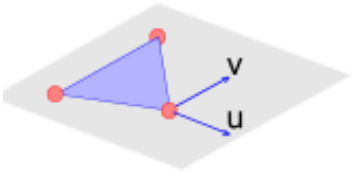


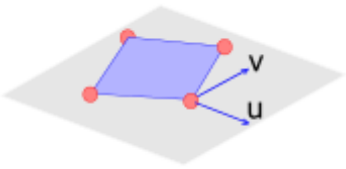
- Elementi finiti bidimensionali

Anche gli elementi bidimensionali sono di due tipi

***- Membrana :** Lastra Gli elementi sono triangolare e rettangolare con spostamenti e stato tensionale nel piano* $u; v; \sigma_X; \sigma_Y; \tau_{XY};$ *con rigidezza flessionale nulla e tensioni normali* $\sigma; = 0$



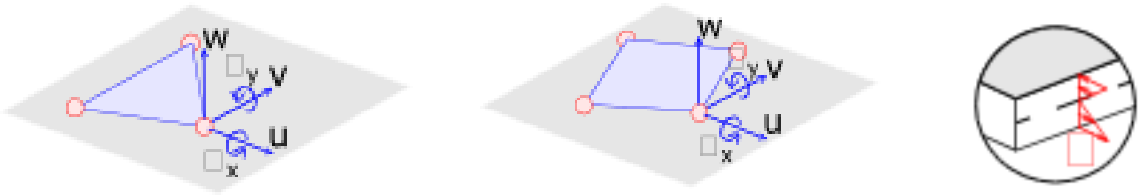




Piastra - Plate- Shell

a questi elementi corrisponde la rigidezza flessionale ogni nodo ha 6 gradi di libertà
tre spostamenti $(u_I; v_I; w_I)$ *3 rotazioni* $(\theta_X; \theta_Y; \theta_Z)$,
lo stato tensionale è tridimensionale
$\sigma_X; \sigma_Y; \sigma_Z; \tau_{XY}; \tau_{XZ}; \tau_{YZ};$

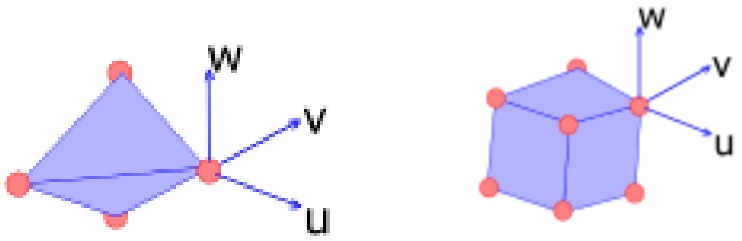
Gli elementi sono sempre triangolare e rettangolare



e tensioni normali nello spessore della piastra

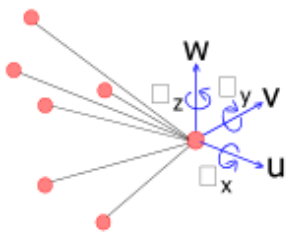
-Elementi finiti tridimensionali

Sono di due tipi tetraedri e parallelepipedi con tre gradi di libertà per nodo come riportati in figura :



il tetraedro si compone di 4 nodi , mentre il parallepipedo di 8 nodi

Link rigido o elemento di corpo rigido
è utilizzato per le strutture rigide che non subiscono deformazioni dove per ogni nodo vi sono 6 gradi di libertà
tre spostamenti $(u_I; v_I; w_I)$ *3 rotazioni* $(\theta_X; \theta_Y; \theta_Z)$

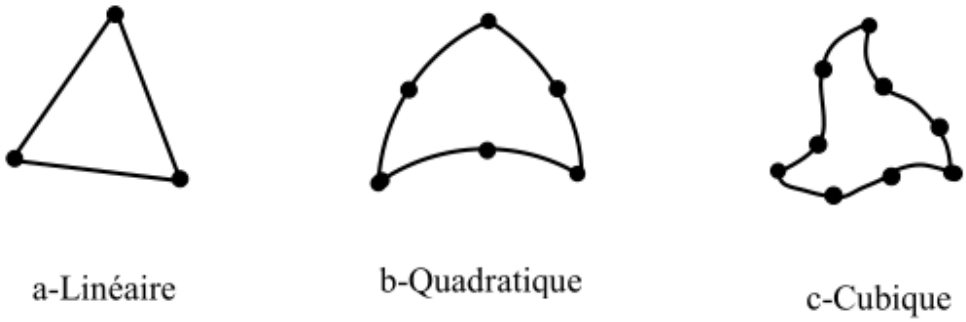


Discretizzata la struttura , si individua prima la matrice di rigidezza dell'elemento finito e tramite l'assemblaggio di tutte le matrici locali si ottiene quella globale.
Il legame forza spostamento per il singolo elemento finito è definito dagli spostamenti nodali e dalle forze nodali

$F = K^* \Delta$

F forze nodali
K matrice di rigidezza
Δ matrice spostamenti nodali

per un elemento triangolare 6 forze e 6 spostamenti nella ipotesi che la deformazione nel piano sia lineare ovvero che il triangolo si deformi in un altro triangolo , ovvero che gli spostamenti siano funzioni lineari delle coordinate dei nodi,; se si aggiunge un nodo interno si possono ottenere funzioni quadratiche, se aggiungiamo due nodi funzioni cubiche e cosi via.



Definite le funzioni spostamento u(x,y) e v(x,) in ogni punto dell'elementi finito in funzione delle coordinate nodali, è possibile individuare le deformazioni
$\varepsilon_X ; \varepsilon_Y ; \varepsilon_Z ; \gamma_{XY} ; \gamma_{XZ} ; \gamma_{YZ};$ *dalla semplici relazioni*

$\varepsilon_X = du/dx ; \varepsilon_Y = dv/dy ; \varepsilon_Z ;= dw/dz ;$

$\gamma_{XY} = dv/dx+du/dy ; \quad \gamma_{XZ} = dw/dx+du/dz ; \gamma_{YZ} = dv/dz+ dw/dy ;$

e tenendo presente le relazioni elastiche per materiale omogeneo e isotropo

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

Applicando il principio dei lavori virtuali al singolo elemento finito eguagliando il lavoro delle forze esterne a quello delle forze interne

$L_E = \sum[F_{Xi} * u_i + F_{Yi} * v_i + F_{Zi} * w_i]$ *lavoro delle forze esterne nodali*

$L_I = \int(\sigma_X * \varepsilon_X + \sigma_Y * \varepsilon_Y + \sigma_Z * \varepsilon_Z + \tau_{XY} * \gamma_{XY} + \tau_{XZ} * \gamma_{XZ} + \tau_{YZ} * \gamma_{YZ})\, dV$ *lavoro forze interne*

vanno aggiunte delle forze superficiali agenti sul singolo elemento piano

$L_E = \int[P_X * u_i + P_{Yi} * v_i + P_{Zi} * w_i]dV$

è possibile ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento finito i-mo ovvero il sistema

$F_I = K_I * \Delta_I$.

Combinando le varie matrici si ottiene la relazione matriciale globale per la struttura $F = K * \Delta$

F forze esterne di gravità sismiche e di superficie
K matrice di rigidezza
Δ matrice spostamento che tiene conto delle condizioni di vincolo

5-Il pendolo e la trave

Iniziamo la trattazione considerando un elemento finito unidimensionale che chiamiamo ***"pendolo"*** *deformabile ovvero estensibile assialmente al quale associamo la rigidezza K ; Un pendolo sollecitato da uno sforzo normale N costante o meglio da una forza F subisce*
un allungamento $u = \Delta L = F * L/EA$, *la rigidezza* $K = EA/L$,
la deformazione $\varepsilon_Z = \Delta L/L = F/(EA) = \sigma_Z/E$ *nella ipotesi di elasticità lineare*

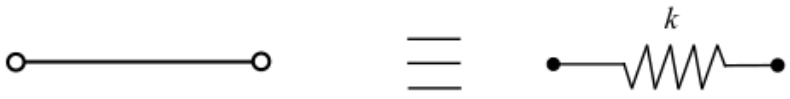
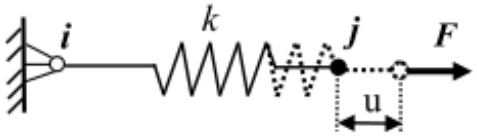
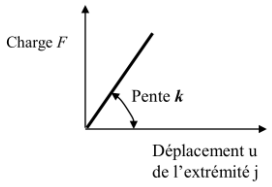


Figure 2.2 : Analogie barre- ressort





Strutture composte da aste incernierate ovvero pendoli per la cui risoluzioni si utilizzano i metodi tradizionali della scienza delle costruzioni quali equazioni cardinali della statica per strutture isostatiche ed equazioni di congruenza scritte attraverso il PLV per strutture iperstatiche sono le capriate per le quali è possibile utilizzare il metodo agli elementi finiti che di seguito esponiamo

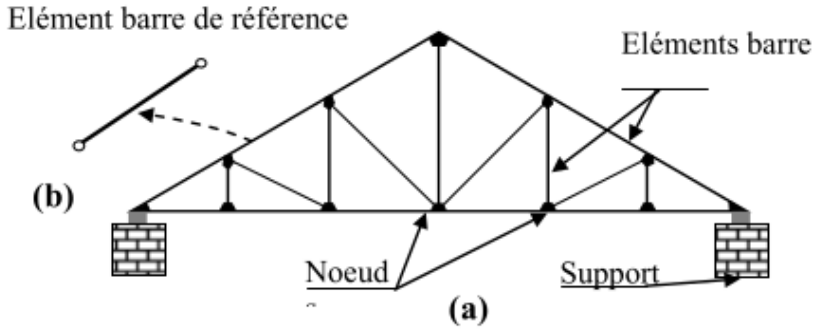


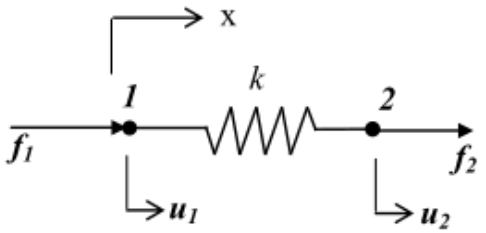
Figure 2.1 : (a) Structure à treillis représentant une ferme de toiture.
(b) Modèle d'élément barre

Considerato il pendolo di nodi i e j forze nodali F_I e F_J , spostamenti nodali u_I e u_J ,

per l'equilibrio $F_I = -k*(u_J - u_I)$; $F_J = k*(u_J - u_I)$; per l'equilibrio $F_I = -F_J$

Possiamo scrivere la relazione con notazione matriciale $K * U = F$

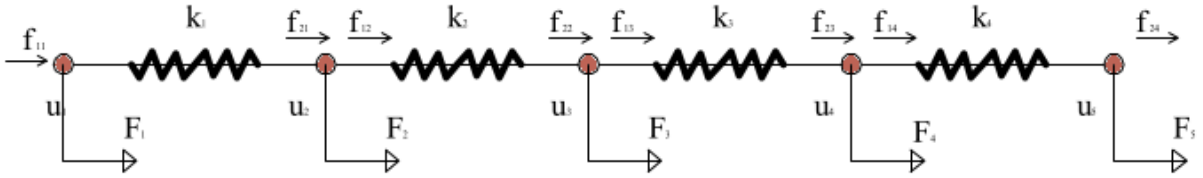
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$



u_1, u_2: Déplacements aux nœuds *1* et *2*

f_1, f_2 : Forces (internes) aux nœuds *1* et *2*

Dove k = EA/L , se assembliamo una serie di pendoli consecutivamente come riportati in figura



Le relazioni matriciali per ogni singolo elemento finito

$F_1 = K_1*u_1 - K_1*u_2$

$F_2 = K_1*(u_2 - u_1) + K_2*(u_2 - u_3)$

$F_3 = K_2*(u_3 - u_2) + K_3*(u_3 - u_4)$

$F_4 = K_3*(u_4 - u_3) + K_4*(u_4 - u_5)$

$F_5 = K_5*(u_5 - u_4)$

$F_1 = f_{11}$; $F_2 = f_{22} + f_{21}$; $F_3 = f_{32} + f_{33}$; $F_4 = f_{43} + f_{44}$; $F_5 = f_{54}$

il primo pedice indica il nodo, il secondo il pendolo 5 nodi 4 aste

$f_{11} = K_1*(u_1 - u_2)$; $f_{21} = K_1*(u_2 - u_1)$; $f_{22} = K_2*(u_2 - u_3)$; $f_{32} = K_2*(u_3 - u_2)$;

$f_{33} = K_3*(u_3 - u_4)$; $f_{43} = K_3*(u_4 - u_3)$; $f_{44} = K_4*(u_4 - u_5)$; $f_5 = K_5*(u_5 - u_4)$;

La matrice di rigidezza che definisce il legame forza spostamento

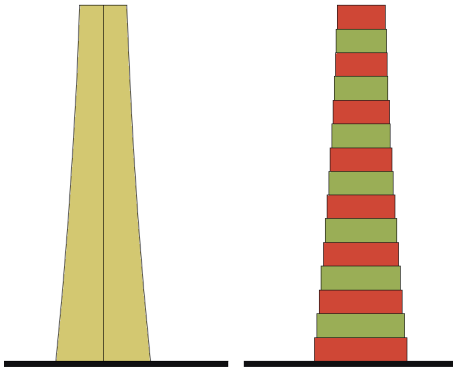
$F = K*U$ dove F ed U sono le matrici colonna

$F = (F_1 ; F_2 ; F_3 ; F_4 ; F_5)$; $u = (u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_5)$

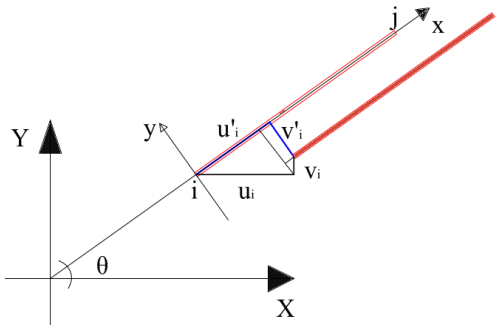
La matrice di rigidezza k è simmetrica 5x5

$$\begin{matrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & (k_3+k_4) & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & -k_4 \end{matrix}$$

il metodo si rivela utile per la discretizzazione di pilastri a profilo variabile , dove la definizione di conci con rigidezza k costante aventi lunghezza Δz consente il calcolo degli spostamenti e degli sforzi normali ; ovviamente tale modellazione integrata dal comportamento a trave si adatta al calcolo di pile da ponte, torri e serbatoi a profilo variabile sollecitate da azioni sismiche ad ogni concio è possibile applicare sia le forza orizzontali variabili lungo l'altezza che la forza peso di ogni concio.



La generica rigidezza del concio i-mo $K_I = A_I * E_I / L_I$ *dove teniamo conto in un calcolo incrementale non lineare anche della variabilità del modulo elastico.*
Se il legame forza spostamenti va riferimento ad un sistema di riferimento globale anziché locale è opportuno eseguire una trasformazione di coordinate



$u'_i = u_i * \cos\theta + v_i * \sin\theta \quad ; \quad v'_i = -u_i * \sin\theta + v_i * \cos\theta \quad ;$

Le matrici spostamento colonna $S' \ (u'_i , v'_i , u'_j , v'_j)$ $S \ (u_i , v_i , u_j , v_j)$

$S' = T * S$ *dove T è la matrice di trasformazione*

$$\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix}$$

La matrice locale dell'asta :

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

k = EA/L se consideriamo la coppia di spostamenti u e v per l'estremo i e j

*k'*S' = N' essendo S' = T* S N' = T*N*

*k'*T*S = T*N moltiplicando ambo i membri per la trasposta della matrice T^T*

*T^T*k'*T*S = T^T*T*N dove T^T*T= I matrice identità risulta*

*T^T*k'*T*S = N dove la matrice di rigidezza k nel sistema globale*

*K = T^T*k'*T*

la trasposta della matrice T si ottiene scambiano le righe con le colonne T^T

cosθ -sinθ 0 0

sinθ cosθ 0 0

0 0 cosθ -sinθ

0 0 sinθ cosθ

la matrice di rigidezza k' dove k = EA/L

k - k 0 0

0 0 0 0

-k k 0 0

0 0 0 0

*K *S= N*

S e N rispettivamente matrice colonna spostamento e forze nodali

S (u_i , v_i, u_j,v_j) ; N (N_i , N_i, N_j,N_j)

La matrice di rigidezza K

$k*\cos\theta^2$ $k*\cos\theta*\sin\theta$ $-k*\cos\theta^2$ $-k*\cos\theta*\sin\theta$

$k*\cos\theta*\sin\theta$ $k*\sin\theta^2$ $-k*\cos\theta*\sin\theta$ $-k*\sin\theta^2$

$-k*\cos\theta^2$ $-k*\cos\theta*\sin\theta$ $k*\cos\theta^2$ $k*\cos\theta*\sin\theta$

$-k*\cos\theta*\sin\theta$ $-k*\sin\theta^2$ $k*\cos\theta*\sin\theta$ $k*\sin\theta^2$

- La trave

Se la nostra asta è in grado di trasmettere sollecitazioni flettenti e taglianti ad ogni nodo nel piano associamo 3 gradi libertà ovvero 2 spostamenti e una rotazione;

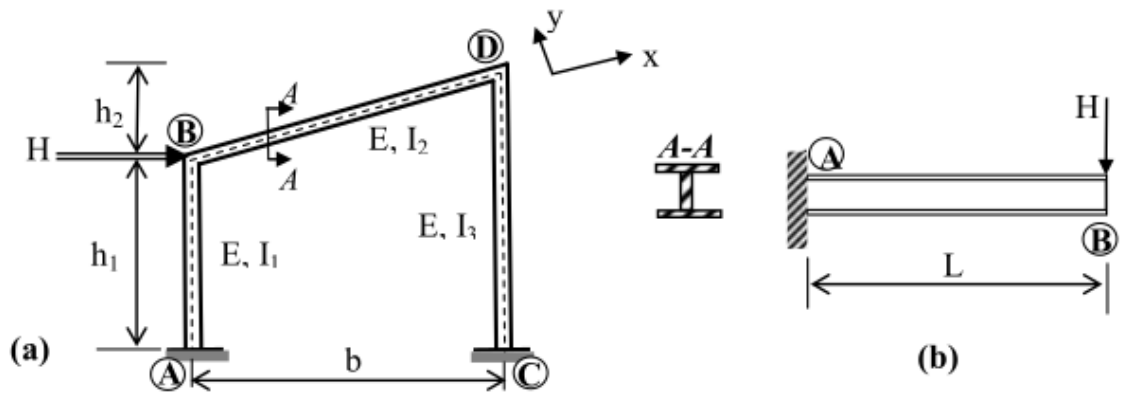
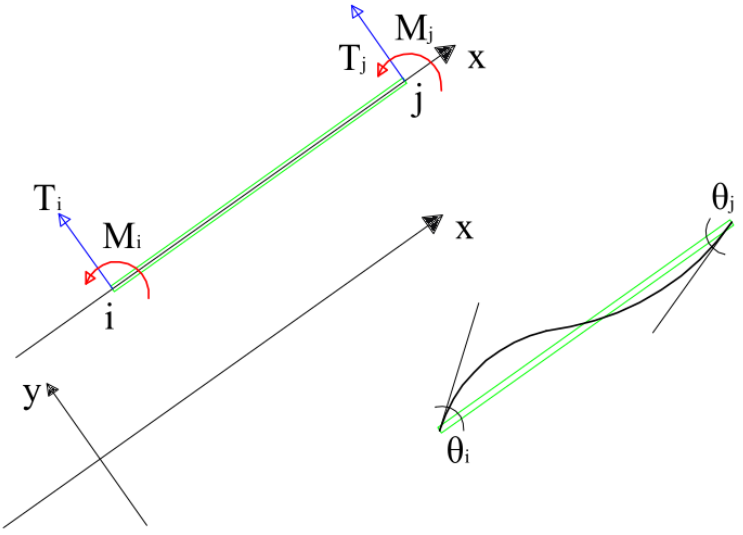


Figure 2.11 : (a) Portique plan à éléments poutres AB, BC, CD.
(b) Cantilever fixé en A et chargé en B

gli spostamenti nodali $\boldsymbol{u_i}$ **,** $\boldsymbol{v_i}$**,** $\boldsymbol{\theta_i}$**;** $\boldsymbol{u_J}$ **,** $\boldsymbol{v_J}$**,** $\boldsymbol{\theta_J}$ **;**



I momenti e i tagli alla estremità della asta sono quelli che derivano dallo schema di trave incastrata agli estremi sollecitata da spostamento e rotazione

$M_I = 6EI/L^2 * v_i + 4EI/L * \theta_i \; -6EI/L^2 * v_j + 2EI/L * \theta_j$

$M_J = 6EI/L^2 * v_i + 2EI/L * \theta_i \; -6EI/L^2 * v_j + 4EI/L * \theta_j$

i tagli alla estremità della nostra trave

$T_I = -T_J = (M_I + M_J)/L = 12EI/L^3 * v_i + 6EI/L^2 * \theta_i \; -12EI/L^3 * v_j + 6EI/L^2 * \theta_j$

Possiamo scrivere queste equazioni in forma matriciale dove le matrici colonna

Sollecitazioni $(T_I, -M_I, T_J, -M_J)$ *Spostamenti* $S (v_I, \theta_I, v_j, \theta_j)$

La matrice delle rigidezze K

$12EI/L^3$	$+6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$+6EI/L^2$
$6EI/L^2$	$+4EI/L$	$-6EI/L^2$	$+ 2EI/L$
$-12EI/L^3$	$-6EI/L^2$	$+12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
$6EI/L^2$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$+4EI/L$

Il legame scritto in forma matriciale $F = K * S$

se consideriamo anche lo spostamento assiale le matrici colonna

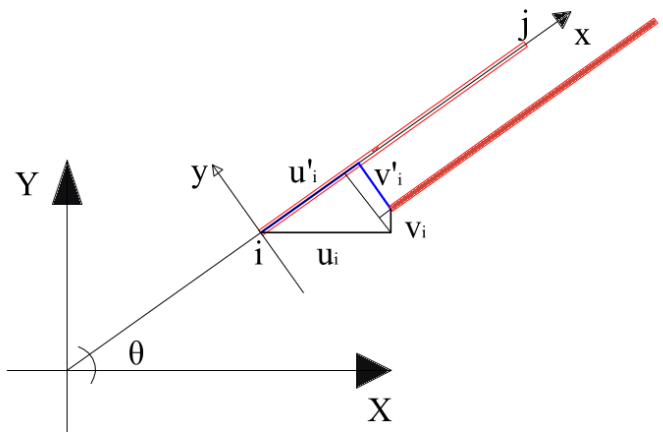
Sollecitazioni $(N_I, T_I, -M_I, N_J, T_J, -M_J)$ *Spostamenti* $S (u_i, v_I, \theta_I, u_J, v_j, \theta_j)$

La matrice delle rigidezze K 6x6

EA/L	0	0	EA/L	0	0
0	$12EI/L^3$	$+6EI/L^2$	0	$-12EI/L^3$	$+6EI/L^2$
0	$6EI/L^2$	$+4EI/L$	0	$-6EI/L^2$	$+ 2EI/L$
$-EA/L$	0	0	EA/L	0	0
0	$-12EI/L^3$	$-6EI/L^2$	0	$+12EI/L^3$	$-6EI/L^2$
0	$6EI/L^2$	$2EI/L$	0	$-6EI/L^2$	$+4EI/L$

gli spostamenti sono riferiti al sistema di riferimento locale , volendo fare un cambio di coordinate e passare al sistema globale , dobbiamo inserire la matrice T

Se consideriamo il riferimento globale



$u'_i = u_i * \cos\theta + v_i * \sin\theta \quad ; \quad v'_i = -u_i * \sin\theta + v_i * \cos\theta \quad ;$

Le matrici spostamento colonna $S' (u'_i, v'_i, \theta'_i, u'_j, v'_j, \theta'_j)$ $S (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j)$

La matrice di trasformazione T $S' = T*S$

$\cos\theta$	$\sin\theta$	0	0	0	0
$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$	0
0	0	0	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	0
0	0	0	0	0	1

Passando dal sistema di riferimento locale a quello globale

$F'=K'*S' \quad ; \quad F'=K'*T*S \quad ; \quad F'= T*F$

moltiplicando ambo i membri per la matrice trasposta di T

$T^T*T*F= T^T*K'*T*S$ *il prodotto* $T^T*T=I$ *fornisce la matrice identità*

$F = K*S$ *dove la matrice di rigidezza* $K =T^T*K'*T$

La matrice trasposta di T si ottiene scambiando le righe con le colonne T^T

$cos\theta$	$-sin\theta$	0	0	0	0
$sin\theta$	$cos\theta$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$cos\theta$	$-sin\theta$	0
0	0	0	$sin\theta$	$cos\theta$	0
0	0	0	0	0	1

La matrice di rigidezza $K = T^T * K' * T$

$$\underline{K} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.S^2 & (A - \frac{12I}{L^2}).c.s & -\frac{6I}{L}.s & -(A.c^2 + \frac{12I}{L^2}).s^2 & -(A - \frac{12I}{L^2})c.s & -\frac{6I}{L}.s \\ & A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2 & \frac{6I}{L}.c & -(A - \frac{12I}{L^2}).c.s & -(A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2) & \frac{6I}{L}.c \\ & & 4I & \frac{6I}{L}.s & -\frac{6I}{L}.c & 2I \\ & & & A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.s^2 & (A - \frac{12I}{L^2}).c.s & \frac{6I}{L}.s \\ & \text{SYMETRIQUE} & & & A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2 & -\frac{6I}{L}.c \\ & & & & & 4I \end{bmatrix}$$

dove $c=cos\theta$ *e* $s=sin\theta$

si possono introdurre i coefficienti di Timoshenko per tenere conto della instabilità degli effetti del II ordine e della conseguente diminuzione di rigidezza a compressione

taglio $k = 12EI/[(1+\phi_Y)*L^3]$; *flessione* $k = 6EI/[(1+\phi_Y)L^2]$ *per spostamento*

$k =(4+\phi_Y)*EI/[(1+\phi_Y)L]$; $k =(2-\phi_Y)*EI/[(1+\phi_Y)L]$; *rotazione nel nodo*

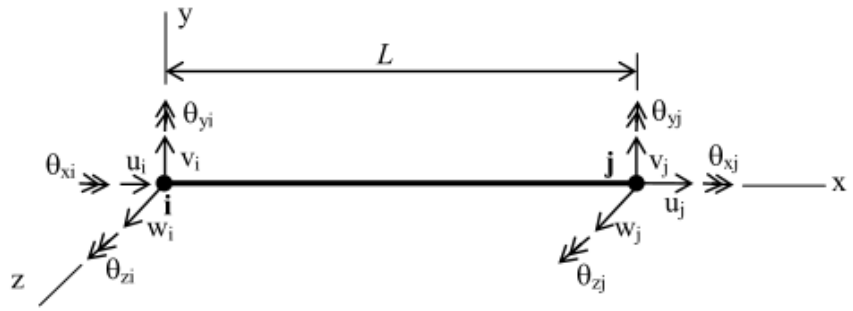
$\phi_Y=12*E*I*k_Y/(A*G*L^2)$ *G modulo di elasticità tangenziale*

$k_Y= 1,2$ *per sezione rettangolare* $k_Y= 2$ *per sezione tubolare*

A/k_Y *area effettiva di taglio*

L'asta è stata considerata nel piano se la consideriamo nello spazio ogni nodo ha 6 gradi di libertà

$(u_i, v_i, w_i, \theta_{iX}, \theta_{iY}, \theta_{iZ})$ $(u_j, v_j, w_j, \theta_{jX}, \theta_{jY}, \theta_{jZ})$



La matrice di rigidezza tiene conto della rigidezza torsionale dell'asta $G*I_P/L$ *se scritta per il sistema locale è necessario aggiungere la flessione trasversale*

$M_{YI} = 6EI_Y/L^2*v_i + 4EI_Y/L*\theta_{Yi} \ -6EI_Y//L^2*v_j + 2EII_Y/L*\theta_{Yj}$

$M_{YJ} = 6EI_Y/L^2*v_i + 2EI_Y/L*\theta_i \ -6EI_Y//L^2*v_j + 4EII_Y/L*\theta_{yj}$

$T_{YI} = -T_{YJ} = (M_{YI}+M_{YJ})/L = 12EI_Y/L^3*v_i + 6EI_Y/L^2*\theta_{Yi} - 12EI_Y/L^3*v_j + 6EI_Y/L^2*\theta_{Yj}$

$M_{XI} = 6EI_X/L^2*w_i + 4EI_X/L*\theta_{Xi} \ -6EI_X//L^2*w_j + 2EI_X/L*\theta_{Xj}$

$M_{XJ} = 6EI_X/L^2*w_i + 2EI_X/L*\theta_{Xi} \ -6EI_X//L^2*w_j + 4EI_X/L*\theta_{Xj}$

$T_{XI} = -T_{XJ} = (M_{XI}+M_{XJ})/L = 12EI_X/L^3*w_i + 6EI_X/L^2*\theta_{Xi} - 12EI_X/L^3*w_j + 6EI_{Xi}/L^2*\theta_{Xj}$

Il legame scritto in forma matriciale $F=K*S$ *K matrice 12x12*

se consideriamo anche lo spostamento assiale le matrici colonna

Sollecitazioni $(N_I, T_{XI}, T_{YI}\ M_{XI}, M_{YI}, \ M_{ZI}, \ N_J, T_{XJ}, T_{YJ}\ M_{XJ}, M_{YJ}, \ M_{ZJ})$

Spostamenti $S\ (u_i, v_I, w_I, \ \theta_{XI}, \ \theta_{YI}, \ \theta_{ZI}\ , u_J, v_J, w_J, \ \theta_{XJ}, \ \theta_{YJ}, \ \theta_{ZJ},)$

La matrice di rigidezza K' è per il sistema locale dell'asta , se vogliamo passare al sistema di riferimento globale basta una semplice trasformazione di coordinate molto simile a quella vista nel piano.

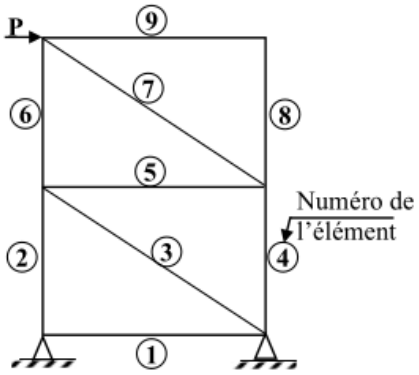
$S' = T*S \quad F' = T*F \quad F' = k'*S' \qquad T*F = K'*T*S \qquad K = T^T*K'*T$

$T^T*T*F = T^T*K'*T*S$ *il prodotto* $T^T*T=I$ *fornisce la matrice identità*

Matrice K' per sistema locale x,y e z

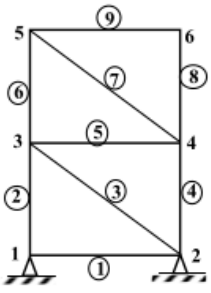
u_i	v_I	w_I	θ_{XI}	θ_{YI}	θ_{ZI}	u_J	v_J	w_J	θ_{XJ}	θ_{YJ}	θ_{ZJ}
EA/L	0	0	0	0	0	EA/L	0	0	0	0	0
0	$12EI_X/L^3$	0	$+6EI_X/L^2$	0	0	0	$-12EI_X/L^3$	0	$+6EI_X/L^2$	0	0
0	0	$12EI_Y/L^3$	0	$+6EI_Y/L^2$	0	0	0	$-12EI_Y/L^3$	0	$+6EI_Y/L^2$	0
0	$6EI_X/L^2$	0	$+4EI_X/L$	0	0	0	$-6EI_X/L^2$	0	$+2EI_X/L$	0	0
0	0	$+6EI_Y/L^2$	0	$4EI_Y/L$	0	0	0	$-6EI_Y/L^2$	0	$4EI_Y/L$	0
0	0	0	0	0	$G*I_P$	0	0	0	0	0	$-G*I_P$
$-EA/L$	0	0	0	0	0	EA/L	0	0	0	0	0
0	$-12EI_X/L^3$	0	$-6EI_X/L^2$	0	0	0	$+12EI_X/L^3$	0	$-6EI_X/L^2$	0	0
0	0	$-12EI_Y/L^3$	0	$-6EI_Y/L^2$	0	0	0	$-+12EI_Y/L^3$	0	$-6EI_Y/L^2$	0
0	$6EI_X/L^2$	0	$+2EI_X/L$	0	0	0	$-6EI_X/L^2$	0	$+4EI_X/L$	0	0
0	0	$+6EI_Y/L^2$	0	$2EI_Y/L$	0	0	0	$-6EI_Y/L^2$	0	$4EI_Y/L$	0
0	0	0	0	0	$-G*I_P$	0	0	0	0	0	$+G*I_P$

Il metodo descritto può essere utilizzato per il calcolo di strutture a telaio di qualsiasi forma composti da un sistema di aste ovvero travi e pilastri incernierate o incastrate nei nodi; si parte dalla matrice di rigidezza della singola asta per assemblare e passare alla matrice di rigidezza globale della struttura.

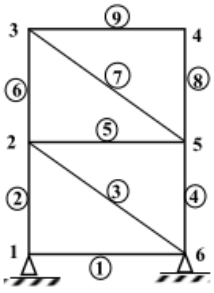


(a)

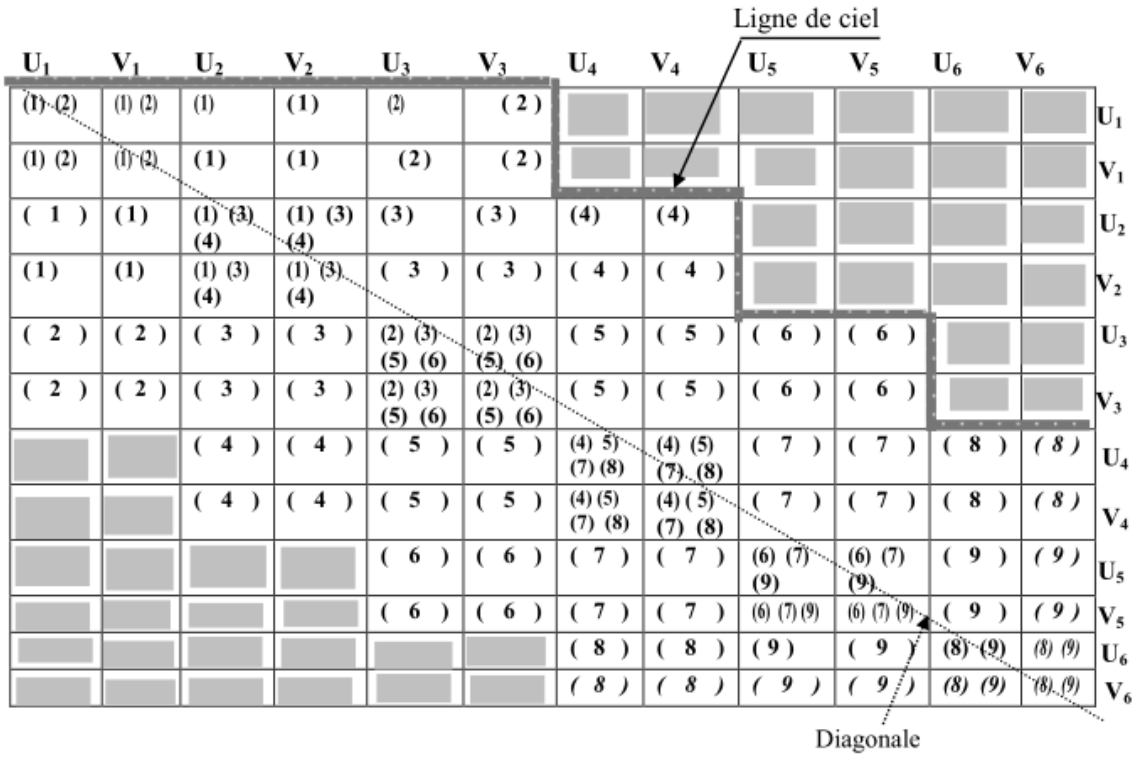
(b)



(c)



*Sono dei sistemi piani per i quali ad ogni nodo si associano tre gradi di libertà u_i ,v_i ,θ_i , se le aste come i figura sono dei pendoli ovvero strutture reticolari isostatiche i gradi di libertà corrispondenti ad ogni nodo sono 2 , u_i e v_i , per la strutture riportate in figura vi sono 6 nodi con 12 gradi di libertà , la matrice di rigidezza globale K F = K*S*



6 -La lastra

La lastra è un elemento bidimensionale piano caratterizzato da una stato di deformazione e tensionale piano definito dalle componenti della deformazione e della tensione

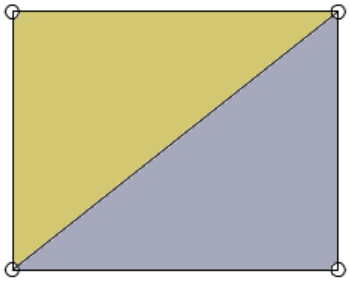
$\varepsilon_X; \varepsilon_Y; \gamma_{XY};$ $\sigma_X; \sigma_Y; \tau_{XY};$

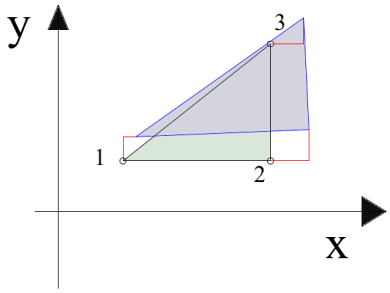
Per quanto concerne il materiale non si fa esclusivo riferimento al calcestruzzo ma a lastre di vetro , di materiale composito, ai materiali metallici che possono avere anche un comportamento ortotropo. La teoria della lastra in edilizia trova applicazione nella modellazione degli edifici in muratura per quanto concerne le pareti, si è soliti modellare la parete con un sistema a telaio e conci rigidi, il comportamento reale è di lastra con aperture sollecitata dalle forze dinamiche sismiche orizzontali conseguenti alla ripartizione derivante dalla ipotesi di impalcato rigido. Il modello a lastra può essere utilizzato per edifici a pareti con pannelli X-lam e Plateform o ancora per strutture PEDA quali sistema Nydion , blocco cassero in polistirolo legno cemento e sistema plastbau , oltre che per edifici a pannelli prefabbricati in cemento armato. I software FEM modellano la parete come un elemento ***plate-shell*** *ovvero lastra piastra tenendo conto anche della rigidezza dell'elemento strutturale fuori del piano ma visto l'esiguo spessore della lastra , le sollecitazioni flettenti sono trascurabili definendo uno stato tensionale tridimensionale attraverso la tensione normale* $\sigma_Z;$ *la tensione tangenziale* $\tau_{XZ};$ *e le deformazioni* $\varepsilon_Z;$ $\gamma_{XZ};$

Il calcolo della lastra lo si esegue attraverso la discretizzazione in elementi piani rettangolari o quadrati definiti da 2 triangoli ciascuno con 3 nodi ognuno con 2 gradi di libertà quali le traslazioni nel piano u e v come riportato in figura . Il triangolo è definito dalle coordinate dei vertici

(X_1, Y_1) ; (X_2, Y_2) ; (X_3, Y_3); i gradi di libertà (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) ; (u_3, v_3);

in questo primo approccio lineare la ipotesi a base della trattazione è che nella sua deformazione il triangolo si trasformi in un altro triangolo ovvero che le deformate dei lati siano dei segmenti di retta.





é possibile definire le funzioni spostamento in tutto l'elemento piano attraverso una una combinazione lineare

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 * x + \alpha_6 * y$$

le 6 costanti possono essere calcolate in funzione degli spostamenti nodali , nodi individuati dai pedici i , j , m

$$u_I = \alpha_1 + \alpha_2 * x_I + \alpha_3 * y_I \; ; \qquad v_I = \alpha_4 + \alpha_5 * x_I + \alpha_6 * y_I \; ;$$

$$u_J = \alpha_1 + \alpha_2 * x_J + \alpha_3 * y_J \; ; \qquad v_J = \alpha_4 + \alpha_5 * x_J + \alpha_6 * y_J \; ;$$

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 * x_m + \alpha_3 * y_m \; ; \qquad v_m = \alpha_4 + \alpha_5 * x_m + \alpha_6 * y_m \; ;$$

risolvendo i due sistemi di equazioni lineari possiamo esprimere le costanti in funzione degli spostamenti nodali e quindi le funzioni spostamento u(x,y);v(x,y) in ogni punto del triangolo dipendono dagli spostamenti dei nodi del triangolo. Per la risoluzione dei 2 sistemi utilizziamo il metodo di Cramer la cui generica soluzione si ottiene attraverso i determinanti

$S_I = det(A_I)/det(A)$ *dove*

la matrice A è quella dei coefficienti , mentre la matrice A_1 si ottiene sostituendo la colonna relativa , per la costante α_1

matrice A *matrice A_1*

$1 \quad x_I \quad y_I \qquad u_I \quad x_I \quad y_I$

$1 \quad x_J \quad y_J \qquad u_J \quad x_J \quad y_J$

$1 \quad x_m \quad y_m \qquad u_m \quad x_m \quad y_m$

Risolvendo i due sistemi ricaviamo le costanti

$\alpha_1 = 1/\Delta * [a_i*u_i + a_j*u_j + a_m*u_m]$

$\alpha_2 = 1/\Delta * [b_i*u_i + b_j*u_j + b_m*u_m]$

$\alpha_3 = 1/\Delta * [c_i*u_i + c_j*u_j + c_m*u_m]$

$\alpha_4 = 1/\Delta * [a_i*v_i + a_j*v_j + a_m*v_m]$

$\alpha_5 = 1/\Delta * [b_i*v_i + b_j*v_j + b_m*v_m]$

$\alpha_6 = 1/\Delta * [c_i*v_i + c_j*v_j + c_m*v_m]$

A rappresenta l'area del triangolo e può essere scritta nella maniera seguente

$A = 1/2*[x_1*(y_2 - y_3) + x_2*(y_3 - y_1) + x_3*(y_1 - y_2)]$

le costanti :

$\alpha_1 = 1/(2*A)*[(x_j*y_m - x_m*y_j)*u_i + (x_m*y_i - x_i*y_m)*u_j + (x_i*y_j - x_j*y_i)*u_m]$

$\alpha_2 = 1/(2*A)*[(y_j - y_m)*u_i + (y_m - y_i)*u_j + (y_i - y_j)*u_m]$

$\alpha_3 = 1/(2*A)*[(x_m - x_j)*u_i + (x_j - x_m)*u_j + (x_j - x_i)*u_m]$

$\alpha_4 = 1/(2*A)*[(x_j*y_m - x_m*y_j)*v_i + (x_m*y_i - x_i*y_m)*v_j + (x_i*y_j - x_j*y_i)*v_m]$

$\alpha_5 = 1/(2*A)*[(y_j - y_m)*v_i + (y_m - y_i)*v_j + (y_i - y_j)*v_m]$

$\alpha_6 = 1/(2*A)*[(x_m - x_j)*v_i + (x_j - x_m)*v_j + (x_j - x_i)*v_m]$

Si può utilizzare la seguente notazione matriciale

$N = X*A$ *dove* *N è la matrice colonna* (N_1, N_2, N_3)

$u(x,y) = N_1 * u_1 + N_2 * u_2 + N_3 * u_3$; $v(x,y) = N_1 * v_1 + N_2 * v_2 + N_3 * v_3$;

sostituendo i pedici 1 = i ; 2 = j ; 3 = m

$u(x,y) = N_i * u_i + N_j * u_j + N_m * u_m$; $v(x,y) = N_i * v_i + N_j * v_j + N_m * v_m$;

i termini

$N_1 = 1/(2A) * [(x_2 * y_3 - x_3 * y_2) + (y_2 - y_3) * x + (x_3 - x_2) * y]$

$N_2 = 1/(2A) * [(x_3 * y_1 - x_1 * y_3) + (y_3 - y_2) * x + (x_1 - x_3) * y]$

$N_3 = 1/(2A) * [(x_1 * y_2 - x_2 * y_1) + (y_1 - y_2) * x + (x_2 - x_1) * y]$

si possono scrivere le funzioni spostamento u(x,y), v(x,y)

dalla scienza delle costruzioni

$\varepsilon_X = du/dx = d/dx (N_1 * u_1 + N_2 * u_2 + N_3 * u_3)$

$\varepsilon_Y = dv/dy = d/dy(N_1 * v_1 + N_2 * v_2 + N_3 * v_3)$

$\gamma_{XY} = d/dy (N_1 * u_1 + N_2 * u_2 + N_3 * u_3) + d/dx(N_1 * v_1 + N_2 * v_2 + N_3 * v_3)$

definiamo le seguenti matrici ε , s , B

Matrice colonna delle deformazioni $(\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \gamma_{XY})$
Matrice colonna spostamenti nodali $(u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , u_3 , v_3)$
La matrice B delle derivate

dN_1/dx	0	dN_2/dx	0	dN_3/dx	0
0	dN_1/dy	0	dN_2/dy	0	dN_3/dy
$(dN_1/dy+dN_1/dx)$	0	$(dN_2/dy+dN_2/dx)$	0	$(dN_3/dy+dN_3/dx)$	0

Le derivate :
$dN_1/dx = (y_2 - y_3)$ $dN_1/dy = (x_3 - x_2)$;

$dN_2/dx = (y_3 - y_2)$ $dN_2/dy = (x_1 - x_3)$;

$dN_3/dx = (y_1 - y_2)$ $dN_3/dy = (x_2 - x_1)$;

Il legame tensioni deformazioni per uno stato tensionale piano :

$\sigma_X = E/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_X + E*\upsilon/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_Y$

$\sigma_Y = E*\upsilon/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_X + E/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_Y$

$\tau_{XY} = E/[2*(1+\upsilon)]*\gamma_{XY} = G*\gamma_{XY}$

La matrice di rigidezza dell'elemento triangolare si ottiene attraverso la applicazione del principio dei lavori virtuali uguagliando il lavoro delle forze interne a quello delle forze esterne .

Il lavoro delle forze interne $L_I = t*\int [\sigma_X*\varepsilon_X + \sigma_Y*\varepsilon_Y + \tau_{XY}*\gamma_{XY}]dA$

Il lavoro delle forze esterne , forze nodali e di superficie

$L_e = F_{1X}*u_1 + F_{1Y}*v_1 + F_{2X}*u_2 + F_{2Y}*v_2 + F_{3X}*u_3 + F_{3Y}*v_3$ *Forze nodali*

$L_e = \int [p_X*u(x,y) + p_Y*v(x,y)]dA$ *Forze di superficie*

in forma matriciale $F = K*S + P$

S matrice colonna spostamenti $(u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , u_3 , v_3)$
F matrice colonna forze nodali $(F_{1X} , F_{1Y} , F_{2X} , F_{2Y} , F_{3X} , F_{3Y})$

La matrice di rigidezza K è una matrice 6x6 , indicando con t lo spessore della lastra
$K = t* B^T *E * B$

dove E è la matrice 3x3

$$E/[(1+\upsilon)*(1-2*\upsilon)] * \begin{vmatrix} (1-\upsilon) & 0 & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\upsilon)/\upsilon \end{vmatrix}$$

la matrice B

$$\begin{vmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_2) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) + (y_2 - y_3) & 0 & (x_1 - x_3) + (y_3 - y_2) & 0 & (x_2 - x_1) + (y_1 - y_2) & 0 \end{vmatrix}$$

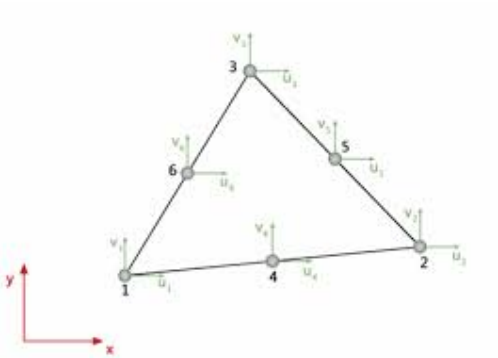
La trasposta della matrice B^T 3x6, si ottiene scambiando le righe con le colonne.

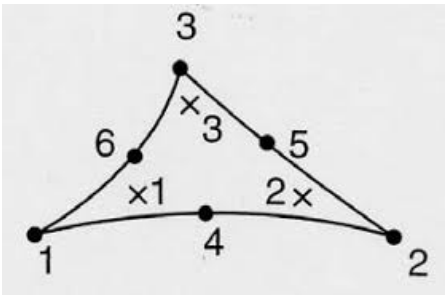
La matrice B non rappresenta altro che le deformazioni, mentre le tensioni

$\varepsilon = B*S \;\; ; \;\; \sigma = E*\varepsilon \quad \sigma = E*B*S \qquad F = \int E*B*S*dA = t*A*B^T*E*B*S*$

$K = t*A*B^T*E*B \qquad F = K*S$ *si deve introdurre la trasposta della matrice B*

*poiché nella equazione derivante dal PLV F è un vettore riga e S un vettore colonna mentre nella relazione F = K*S F ed S sono due vettori colonna e K una matrice quadrata 6x6 .*
Eseguiamo un ulteriore approccio considerando la deformazione dei lati non lineare ma parabolica inserendo un ulteriore nodo nel lato con elemento finito triangolare a 6 nodi. Consideriamo un elemento triangolare a 6 nodi



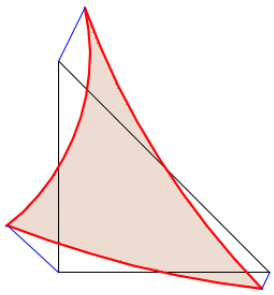


Gli spostamenti in tutto l'elemento piano in direzione x e y sono definiti da una funzione quadratica con 6 costanti

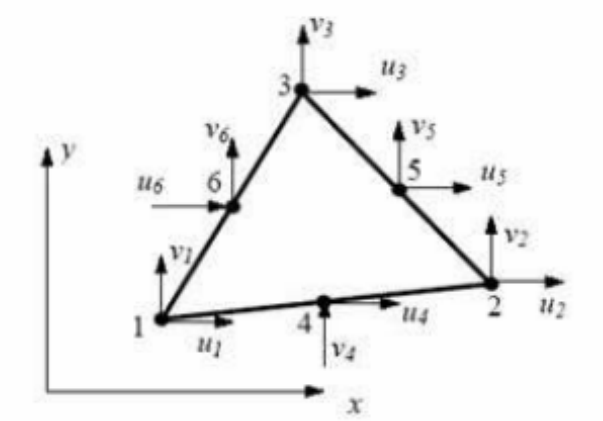
$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2*x + \alpha_3*y + \alpha_4*x^2 + \alpha_5*y^2 + \alpha_6*x*y$

$v(x,y) = \beta_1 + \beta_2*x + \beta_3*y + \beta_4*x^2 + \beta_5*y^2 + \beta_6*x*y$

Nella ipotesi di linearità si ipotizzava che la deformata dei lati del triangolo fosse lineare , in questo casi si ipotizza che la deformata dei lati è quadratica e passa per i punto medio del lato come riportato in figura.



Al solito le costanti vanno determinate in funzione degli spostamenti nodali definiti dalle coordinate dei nodi, per i nodi mediani tali spostamenti sono nulli



$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_1 + \alpha_3 * y_1 + \alpha_4 * x_1^{\,2} + \alpha_5 * y_1^{\,2} + \alpha_6 * x_1 * y_1$
$v_1 = \beta_1 + \beta_2 * x_1 + \beta_3 * y_1 + \beta_4 * x_1^{\,2} + \beta_5 * y_1^{\,2} + \beta_6 * x_1 * y_1$

$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_2 + \alpha_3 * y_2 + \alpha_4 * x_2^{\,2} + \alpha_5 * y_2^{\,2} + \alpha_6 * x_2 * y_2$
$v_2 = \beta_1 + \beta_2 * x_2 + \beta_3 * y_2 + \beta_4 * x_2^{\,2} + \beta_5 * y_2^{\,2} + \beta_6 * x_2 * y_2$

$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_3 + \alpha_3 * y_3 + \alpha_4 * x_3^{\,2} + \alpha_5 * y_3^{\,2} + \alpha_6 * x_3 * y_3$
$v_3 = \beta_1 + \beta_2 * x_3 + \beta_3 * y_3 + \beta_4 * x_3^{\,2} + \beta_5 * y_3^{\,2} + \beta_6 * x_3 * y_3$

$u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_4 + \alpha_3 * y_4 + \alpha_4 * x_4^{\,2} + \alpha_5 * y_4^{\,2} + \alpha_6 * x_4 * y_4$
$v_4 = \beta_1 + \beta_2 * x_4 + \beta_3 * y_4 + \beta_4 * x_4^{\,2} + \beta_5 * y_4^{\,2} + \beta_6 * x_4 * y_4$

$u_5 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_5 + \alpha_3 * y_5 + \alpha_4 * x_5^{\,2} + \alpha_5 * y_5^{\,2} + \alpha_6 * x_5 * y_5$
$v_5 = \beta_1 + \beta_2 * x_5 + \beta_3 * y_5 + \beta_4 * x_5^{\,2} + \beta_5 * y_5^{\,2} + \beta_6 * x_5 * y_5$

$u_6 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_6 + \alpha_3 * y_6 + \alpha_4 * x_6^{\,2} + \alpha_5 * y_6^{\,2} + \alpha_6 * x_6 * y_6$
$v_6 = \beta_1 + \beta_2 * x_6 + \beta_3 * y_6 + \beta_4 * x_6^{\,2} + \beta_5 * y_6^{\,2} + \beta_6 * x_6 * y_6$

Vanno ricavate le dodici costanti in funzione delle coppie di spostamenti nodali in notazione matriciale utilizzando la formula di ***Cramer*** *per la risoluzione dei sistemi lineari di equazioni , (le coordinate dei nodi sono dei numeri)*

Indicato con Δ il determinante della matrice dei coefficienti e rispettivamente con

Δ_1 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la prima colonna con il termine noto*
Δ_2 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna con il termine noto*
Δ_3 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la terza colonna con il termine noto*
Δ_4 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quarta colonna con il termine noto*
Δ_5 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quinta colonna con il termine noto*
Δ_6 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la sesta colonna con il termine noto*

Per i due sistemi di 6 equazioni risulta

$\alpha_1 = \Delta_1 / \Delta$; $\alpha_2 = \Delta_2 / \Delta$; $\alpha_3 = \Delta_3 / \Delta$; $\alpha_4 = \Delta_4 / \Delta$; $\alpha_5 = \Delta_5 / \Delta$; $\alpha_6 = \Delta_6 / \Delta$;

$\beta_1 = \Delta_1 / \Delta$; $\beta_2 = \Delta_2 / \Delta$; $\beta_3 = \Delta_3 / \Delta$; $\beta_4 = \Delta_4 / \Delta$; $\beta_5 = \Delta_5 / \Delta$; $\beta_6 = \Delta_6 / \Delta$;

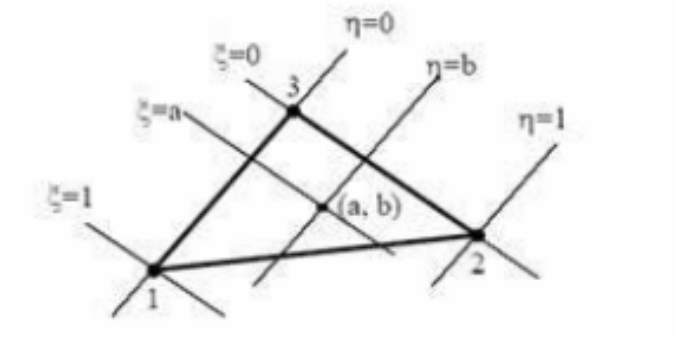
I determinanti $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$, *sono funzione degli spostamenti nodali combinazione lineare degli stessi tenendo presente che nei punti medi dei lati*
$u=0$; $v=0$
Si può utilizzare la seguente notazione matriciale

$N = X*A$ *dove* N *è la matrice colonna* $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$

$u(x,y) = N_1 *u_1 + N_2 *u_2 + N_3 *u_3 + N_4 *u_4 + N_5 *u_5 + N_6 *u_6$;

$v(x,y) = N_1 *v_1 + N_2 *v_2 + N_3 *v_3 + N_4 *v_4 + N_5 *v_5 + N_6 *v_6$;

Se modifichiamo il sistema di riferimento ed introduciamo le coordinate naturali del triangolo rettangolo $\boldsymbol{\xi, \eta}$



Possiamo definire le 6 costanti

$N_1 = \xi*(2*\xi-1)$; $N_2 = \eta*(2*\eta-1)$; $N_3 = \zeta*(2*\zeta-1)$;

$N_4 = 4*\xi*\eta$; $N_5 = 4*\zeta*\eta$; $N_6 = \xi*\zeta$; con $\zeta = 1-\xi-\eta$

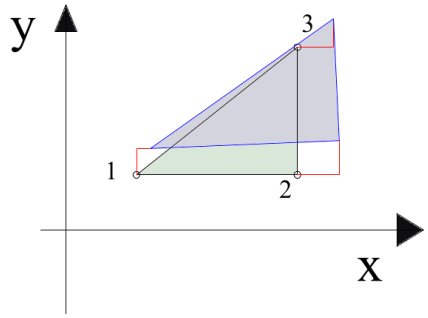
La matrice delle rigidezze dell'elemento piano a 6 nodi è quadratica in X e Y e determinata attraverso calcolo numerico

$K = \int B^T * E * B \, dv$

Al solito la Matrice E tiene conto delle caratteristiche meccaniche del materiale modulo di elasticità normale , tangenziale e modulo di Poisson , mentre la matrice B delle coordinate dei nodi in forma quadratica.

Comportamento ortotropo

Per l'elementino piano triangolare facciamo la ipotesi di ortotropia ipotizzando sempre che le deformate dei lati del triangolo siano delle rette



Le relazioni elastiche per stato tensionale piano dirette e inverse

Parametri elastici E_X ; E_Y ; G_{XY} ;

$\varepsilon_X = \sigma_X / E_X$; $\varepsilon_Y = -\upsilon_{XY} * \sigma_X / E_X$;

$\varepsilon_Y = \sigma_Y / E_Y$; $\varepsilon_X = -\upsilon_{XY} * \sigma_Y / E_Y$;

$\gamma_{XY} = \tau_{XY} / G_{XY}$;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - (T - T_o) \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

La matrice di rigidezza dell'elemento triangolare si ottiene attraverso la applicazione del principio dei lavori virtuali uguagliando il lavoro delle forze interne a quello delle forze esterne .

Il lavoro delle forze interne $L_I = t * \int [\sigma_X * \varepsilon_X + \sigma_Y * \varepsilon_Y + \tau_{XY} * \gamma_{XY}] dA$

Il lavoro delle forze esterne , forze nodali e di superficie

$L_e = F_{1X} * u_1 + F_{1Y} * v_1 + F_{2X} * u_2 + F_{2Y} * v_2 + F_{3X} * u_3 + F_{3Y} * v_3$ *Forze nodali*

$L_e = \int [p_X * u(x,y) + p_Y * v(x,y)] dA$ *Forze di superficie*

in forma matriciale $F = K*S+ P$

S matrice colonna spostamenti $(u_1 , v_1 ,u_2 ,v_2 ,u_3 ,v_3)$
F matrice colonna forze nodali $(F_{1X} , F_{1Y} , F_{2X} , F_{2Y} , F_{3X} ,F_{3Y})$

La matrice di rigidezza K è una matrice 6x6 , indicando con t lo spessore della lastra

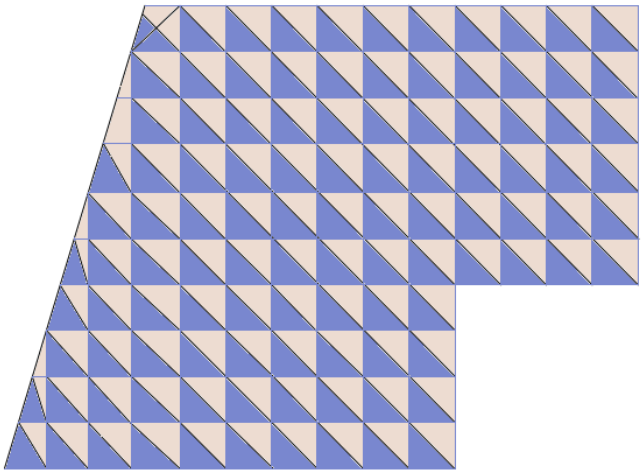
$$K = t* B^T *E * B$$

Rispetto alla trattazione per materiale isotropo ad elasticità lineare cambia la matrice E che tiene conto di $E_X ; E_Y ; G_{XY} ; \upsilon_{XY} ; \upsilon_{YX}$ *, la si ottiene direttamente dalle relazioni elastiche*

$$E = \begin{vmatrix} E_X/(1-\upsilon_{XY}*\upsilon_{YX}) & \upsilon_{XY}*E_Y/(1-\upsilon_{XY}*\upsilon_{YX}) & 0 \\ \upsilon_{XY}*E_Y/(1-\upsilon_{XY}*\upsilon_{YX}) & E_Y/(1-\upsilon_{XY}*\upsilon_{YX}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{XY} \end{vmatrix}$$

Matrice di rigidezza globale della lastra

Una lastra si compone di tanti elementi finiti triangolari ***Shell,*** *che sono collegati nei nodi dove per questioni di congruenza e di equilibrio sia gli spostamenti che le forze nodali coincidono; conosciamo la matrice di rigidezza dell'elemento* ***Shell*** *e da questa dobbiamo a passare a quella completa della lastra per cui le matrici singole vanno assemblate.*



Poi vi sono le condizioni al contorno ovvero i vincoli e le forze applicate , la matrice globale K è quadrate con numero di righe n pari al numero delle colonne dove n è il

numero degli elementini triangolari shell; avremo una serie di coefficienti

K_{11} ; K_{12} ; K_{13} ; K_{14} ; K_{15} ; .....K_{1n} ;

K_{21} ; K_{22} ; K_{23} ; K_{24} ; K_{25} ; .....K_{2n} ;

K_{31} ; K_{32} ; K_{33} ; K_{34} ; K_{35} ; .....K_{3n} ;

.....

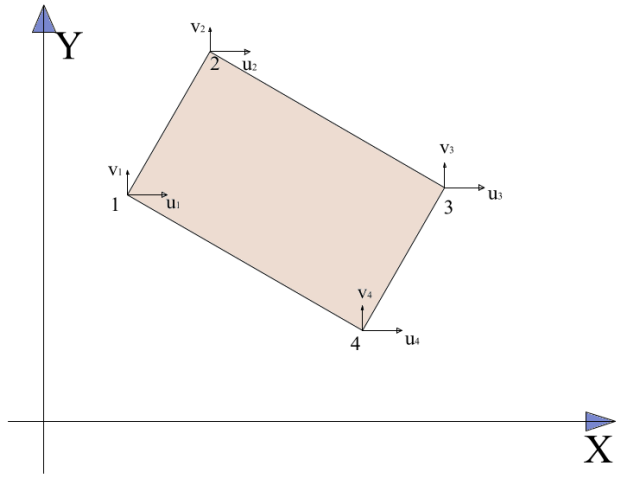
.....,

K_{n1} ; K_{n2} ; K_{n3} ; K_{n4} ; K_{n5} ; .....K_{nn} ;

Si tratta di determinare il coefficiente generico K_{IJ} che tiene conto degli elementi adiacenti con le relative matrici di rigidezza dei singoli elementi triangolari.
Ad esempio se gli elementi triangolari adiacenti al nodo i sono 5 che indichiamo con a,b,c,d,e

$K_{IJ} = (K_{iAj} + K_{iB} + K_{iC} + K_{iD} + K_{iEj})$

Consideriamo un elemento piano rettangolare a 4 nodi

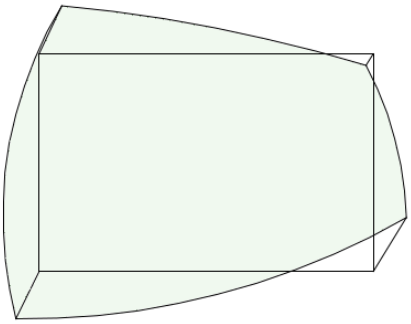


é possibile definire le funzioni spostamento in tutto l'elemento piano attraverso una una combinazione lineare quadratica

$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y + \alpha_4 * x * y$

$v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 * x + \beta_3 * y + \beta_4 * x * y$

La deformata del nostro elementino



$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_1 + \alpha_3 * y_1 + \alpha_4 * x_1 * y_1$

$v_1 = \beta_1 + \beta_2 * x_1 + \beta_3 * y_1 + \beta_4 * x_1 * y_1$

$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_2 + \alpha_3 * y_2 + \alpha_4 * x_2 * y_2$

$v_2 = \beta_1 + \beta_2 * x_2 + \beta_3 * y_2 + \beta_4 * x_2 * y_2$

$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_3 + \alpha_3 * y_3 + \alpha_4 * x_3 * y_3$

$v_3 = \beta_1 + \beta_2 * x_3 + \beta_3 * y_3 + \beta_4 * x_3 * y_3$

$u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_4 + \alpha_3 * y_4 + \alpha_4 * x_4 * y_4$

$v_4 = \beta_1 + \beta_2 * x_4 + \beta_3 * y_4 + \beta_4 * x_4 * y_4$

Vanno ricavate le 8 costanti in funzione delle coppie di spostamenti nodali in notazione matriciale utilizzando la formula di ***Cramer*** *per la risoluzione dei sistemi lineari di equazioni , (le coordinate dei nodi sono dei numeri)*

Indicato con Δ il determinante della matrice dei coefficienti e rispettivamente con

Δ_1 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la prima colonna con il termine noto
Δ_2 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna con il termine noto
Δ_3 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la terza colonna con il termine noto
Δ_4 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quarta colonna con il termine noto

Per i due sistemi di 4 equazioni risulta

$\alpha_1 = \Delta_1 / \Delta$; $\alpha_2 = \Delta_2 / \Delta$; $\alpha_3 = \Delta_3 / \Delta$; $\alpha_4 = \Delta_4 / \Delta$;

$\beta_1 = \Delta_1 / \Delta$; $\beta_2 = \Delta_2 / \Delta$; $\beta_3 = \Delta_3 / \Delta$; $\beta_4 = \Delta_4 / \Delta$;

I determinanti $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, ,$ sono funzione degli spostamenti nodali combinazio-

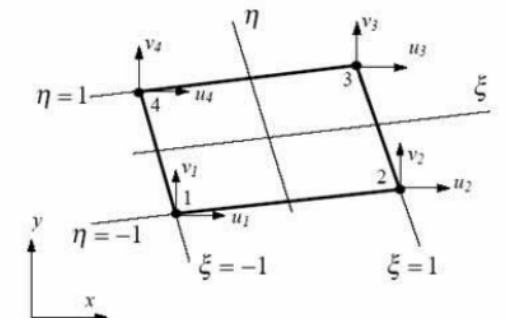
ne lineare degli stessi tenendo presente che nei punti medi dei lati
u=0; v= 0
Si può utilizzare la seguente notazione matriciale

$N = X*A$ *dove* *N è la matrice colonna* $(N_1, N_2, N_3, N_4,)$

$u(x,y) = N_1 *u_1 + N_2 *u_2 + N_3 *u_3 + N_4 *u_4$;

$v(x,y) = N_1 *v_1 + N_2 *v_2 + N_3 *v_3 + N_4 *v_4$;

Se modifichiamo il sistema di riferimento ed introduciamo le coordinate naturali del triangolo rettangolo $\boldsymbol{\xi, \eta}$ *ipotizzando la deformata dei lati lineare e facendo riferimento a due triangoli*



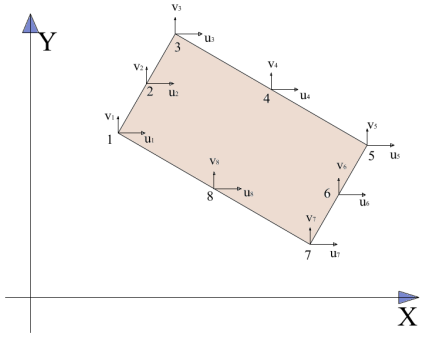
$N_1 = 0,25*(1-\xi)*(1-\eta)$

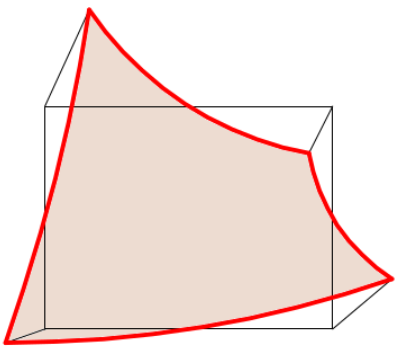
$N_2 = 0,25*(1+\xi)*(1-\eta)$

$N_3 = 0,25*(1+\xi)*(1+\eta)$

$N_4 = 0,25*(1-\xi)*(1+\eta)$

Consideriamo un elemento piano rettangolare ad 8 nodi , per il quale ipotizziamo che i lati si deformino non linearmente ma secondo una legge cubica .





$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_1 + \alpha_3 * y_1 + \alpha_4 * x_1^{\,2} + \alpha_5 * y_1^{\,2} + \alpha_6 * x_1 * y_1 + \alpha_7 * x_1^{\,3} + \alpha_8 * y_1^{3}$$
$$v_1 = \beta_1 + \beta_2 * x_1 + \beta_3 * y_1 + \beta_4 * x_1^{\,2} + \beta_5 * y_1^{\,2} + \beta_6 * x_1 * y_1 + \beta_7 * y_1^{3} + \beta_8 * x_1^{\,3}$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_2 + \alpha_3 * y_2 + \alpha_4 * x_2^{\,2} + \alpha_5 * y_2^{\,2} + \alpha_6 * x_2 * y_2 + \alpha_7 * x_2^{\,3} + \alpha_8 * y_2^{3}$$
$$v_2 = \beta_1 + \beta_2 * x_2 + \beta_3 * y_2 + \beta_4 * x_2^{\,2} + \beta_5 * y_2^{\,2} + \beta_6 * x_2 * y_2 + \beta_7 * y_2^{3} + \beta_8 * x_2^{\,3}$$

$$u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_3 + \alpha_3 * y_3 + \alpha_4 * x_3^{\,2} + \alpha_5 * y_3^{\,2} + \alpha_6 * x_3 * y_3 + \alpha_7 * x_3^{\,3} + \alpha_8 * y_3^{3}$$
$$v_3 = \beta_1 + \beta_2 * x_3 + \beta_3 * y_3 + \beta_4 * x_3^{\,2} + \beta_5 * y_3^{\,2} + \beta_6 * x_3 * y_3 + \beta_7 * y_3^{3} + \beta_8 * x_3^{\,3}$$
$$u_4 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_4 + \alpha_3 * y_4 + \alpha_4 * x_4^{\,2} + \alpha_5 * y_4^{\,2} + \alpha_6 * x_4 * y_4 + \alpha_7 * x_4^{\,3} + \alpha_8 * y_4^{3}$$
$$v_4 = \beta_1 + \beta_2 * x_4 + \beta_3 * y_4 + \beta_4 * x_4^{\,2} + \beta_5 * y_4^{\,2} + \beta_6 * x_4 * y_4 + \beta_7 * y_4^{3} + \beta_8 * x_4^{\,3}$$

$$u_5 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_5 + \alpha_3 * y_5 + \alpha_4 * x_5^{\,2} + \alpha_5 * y_5^{\,2} + \alpha_6 * x_5 * y_5 + \alpha_7 * x_5^{\,3} + \alpha_8 * y_5^{3}$$
$$v_5 = \beta_1 + \beta_2 * x_5 + \beta_3 * y_5 + \beta_4 * x_5^{\,2} + \beta_5 * y_5^{\,2} + \beta_6 * x_5 * y_5 + \beta_7 * y_5^{3} + \beta_8 * x_5^{\,3}$$

$$u_6 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_6 + \alpha_3 * y_6 + \alpha_4 * x_6^{\,2} + \alpha_5 * y_6^{\,2} + \alpha_6 * x_6 * y_6 + \alpha_7 * x_6^{\,3} + \alpha_8 * y_6^{3}$$
$$v_6 = \beta_1 + \beta_2 * x_6 + \beta_3 * y_6 + \beta_4 * x_6^{\,2} + \beta_5 * y_6^{\,2} + \beta_6 * x_6 * y_6 + \beta_7 * y_6^{3} + \beta_8 * x_6^{\,3}$$

$$u_7 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_7 + \alpha_3 * y_7 + \alpha_4 * x_7^{\,2} + \alpha_5 * y_7^{\,2} + \alpha_6 * x_7 * y_7 + \alpha_7 * x_7^{\,3} + \alpha_8 * y_7^{3}$$
$$v_7 = \beta_1 + \beta_2 * x_7 + \beta_3 * y_7 + \beta_4 * x_7^{\,2} + \beta_5 * y_7^{\,2} + \beta_6 * x_7 * y_7 + \beta_7 * y_7^{3} + \beta_8 * x_7^{\,3}$$

$$u_8 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_8 + \alpha_3 * y_8 + \alpha_4 * x_8^{\,2} + \alpha_5 * y_8^{\,2} + \alpha_6 * x_8 * y_8 + \alpha_7 * x_8^{\,3} + \alpha_8 * y_8^{3}$$
$$v_8 = \beta_1 + \beta_2 * x_8 + \beta_3 * y_8 + \beta_4 * x_8^{\,2} + \beta_5 * y_8^{\,2} + \beta_6 * x_8 * y_8 + \beta_7 * y_8^{3} + \beta_8 * x_8^{\,3}$$

Vanno ricavate le dodici costanti in funzione delle coppie di spostamenti nodali in notazione matriciale utilizzando la formula di ***Cramer*** *per la risoluzione dei sistemi lineari di equazioni , (le coordinate dei nodi sono dei numeri)*

Indicato con Δ il determinante della matrice dei coefficienti e rispettivamente con

Δ_1 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la prima colonna con il termine noto
Δ_2 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna con il termine noto
Δ_3 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la terza colonna con il termine noto
Δ_4 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quarta colonna con il termine noto
Δ_5 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quinta colonna con il termine noto
Δ_6 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la sesta colonna con il termine noto
Δ_7 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la settimana colonna con il termine noto
Δ_8 il determinate della matrice ottenuta sostituendo la ottava colonna con il termine noto

Per i due sistemi di 6 equazioni risulta

$$\alpha_1 = \Delta_1 / \Delta \; ; \; \alpha_2 = \Delta_2 / \Delta \; ; \; \alpha_3 = \Delta_3 / \Delta \; ; \; \alpha_4 = \Delta_4 / \Delta \; ; \; \alpha_5 = \Delta_5 / \Delta \; ; \; \alpha_6 = \Delta_6 / \Delta \; ;$$
$$\alpha_7 = \Delta_7 / \Delta \; ; \; \alpha_8 = \Delta_8 / \Delta \; ;$$

$$\beta_1 = \Delta_1 / \Delta \; ; \; \beta_2 = \Delta_2 / \Delta \; ; \; \beta_3 = \Delta_3 / \Delta \; ; \; \beta_4 = \Delta_4 / \Delta \; ; \; \beta_5 = \Delta_5 / \Delta \; ; \; \beta_6 = \Delta_6 / \Delta \; ;$$
$$\beta_7 = \Delta_7 / \Delta \; ; \; \beta_8 = \Delta_8 / \Delta \; ;$$

I determinanti $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$, *sono funzione degli spostamenti nodali combinazione lineare degli stessi tenendo presente che nei punti medi dei lati*

$u=0;\ v=0$

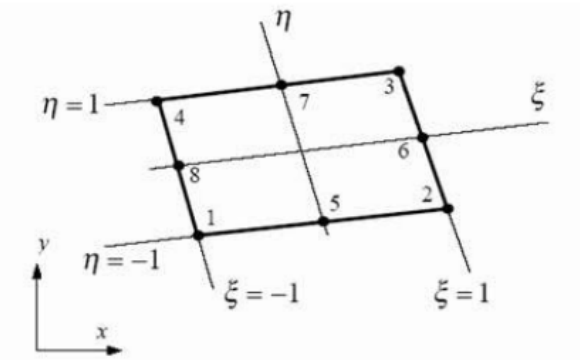
Si può utilizzare la seguente notazione matriciale

$N = X*A$ *dove* N *è la matrice colonna* $(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8)$

$u(x,y)= N_1 *u_1 + N_2 *u_2 + N_3 *u_3 + N_4 *u_4 + N_5 *u_5 + N_6 *u_6 + N_7 *u_7 + N_8 *u_8$;

$v(x,y)=N_1 *v_1 + N_2 *v_2 + N_3 *v_3 + N_4 *v_4 + N_5 *v_5 + N_6 *v_6 + N_7 *v_7 + N_8 *v_8$;

Se modifichiamo il sistema di riferimento ed introduciamo le coordinate naturali $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ *e facciamo riferimento a due triangoli con deformazione dei lati non cubica ma quadratica*



I coefficienti

$N_1=0,25*(1-\xi)*(\eta-1)*(\xi+\eta+1)$

$N_2=0,25*(1-\xi)*(\eta-1)*(-\xi+\eta+1)$

$N_3=0,25*(1-\xi)*(\eta-1)*(\xi+\eta-1)$

$N_4=0,25*(\xi-1)*(\eta+1)*(\xi-\eta+1)$

$N_5=0,5*(1-\eta)*(1-\xi^2)$

$N_6=0,5*(1-\eta^2)*(1+\xi)$

$N_7=0,5*(1+\eta)*(1-\xi^2)$

$N_8=0,5*(1-\eta^2)*(1-\xi)$

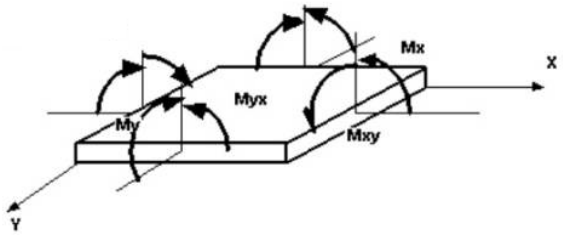
La matrice di rigidezza K

$$K = t^* B^T * E * B$$

dove E è la matrice elastica mentre B è una matrice che tiene conto delle coordinate informa cubica da determinare con calcolo numerico.

7 -La piastra

Per le piastre si considera l'elemento piano ***"plate"*** *rettangolare con spostamento ortogonale w(x,y) diretto secondo z al quale corrispondono la flessione e il taglio ovvero le tensioni normali e tangenziali ;*



I valori delle sollecitazioni flettenti :

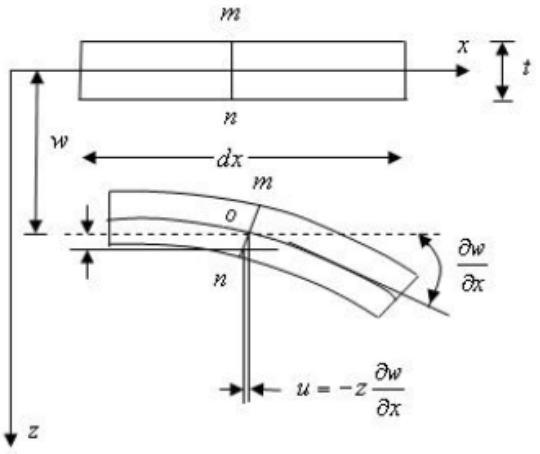
$M_X = \int \sigma_X * z * dz$; $M_Y = \int \sigma_Y * z * dz$; $M_{XY} = \int \tau_{XY} * z * dz$;

Le rigidezze ovvero le sollecitazioni scritte in funzione della deformazione W(x,y)

$K_X = -d^2W/dx^2$; $K_Y = -d^2W/dy^2$; $K_{XY} = -d^2W/dxdy$;

Dalla scienza delle costruzioni

$\varepsilon_X = du/dx$; $\varepsilon_Y = dv/dy$; $\gamma_{XY} = du/dy + dv/dx$



$u = -z*dw/dx ; \quad v = -z*dw/dy$

$\varepsilon_X = du/dx = -z* d^2 w/dx^2 ; \quad \varepsilon_Y = dv/dy = -z* d^2 w/dy^2 ;$

$\gamma_{XY} = du/dy + dv/dx = -2*z *d^2 w/dy*dx ;$

Le relazioni elastiche nella ipotesi di isotropia

$\sigma_X = E/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_X + E*\upsilon/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_Y$

$\sigma_Y = E*\upsilon/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_X + E/(1-\upsilon^2)*\varepsilon_Y$

$\tau_{XY} = E/[2*(1+\upsilon)]*\gamma_{XY} = G*\gamma_{XY}$

In forma matriciale $\boldsymbol{\sigma = E*\varepsilon}$

$$E/[(1+\upsilon)*(1-2*\upsilon)] \; * \begin{vmatrix} (1-\upsilon) & 0 & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\upsilon)/\upsilon \end{vmatrix}$$

Matrice colonna deformazioni $\varepsilon = (-z* d^2 w/dx^2 ; -z* d^2 w/dy^2 ; -2*z *d^2 w/dy*dx)$

Matrice colonna Tensioni $\sigma = (\sigma_X ; \sigma_Y ; \tau_{XY})$

Le tensioni

$\sigma_X = -z* E/(1-\upsilon^2)*[d^2 w/dx^2 + \upsilon*d^2 w/dy^2]$

$\sigma_Y = -z* E/(1-\upsilon^2)*[\upsilon*d^2 w/dx^2 + d^2 w/dy^2]$

$\tau_{XY} = -2*z* E/(1-\upsilon^2)*d^2 w/dy*dx$

Le sollecitazioni

$M_X = \int \sigma_X*z*dz = -E*t^3/[12* (1-\upsilon^2)]*[d^2 w/dx^2 + \upsilon*d^2 w/dy^2]$

$M_Y = \int \sigma_Y*z*dz = -E*t^3/[12* (1-\upsilon^2)]*[\upsilon*d^2 w/dx^2 + d^2 w/dy^2]$

$M_{XY} = \int \tau_{XY}*z*dz = -E*t^3/[12* (1-\upsilon^2)]*(1-\upsilon)*d^2 w/dy*dx$

La rigidezza di piastra $D = E*t^3/[12*(1-\upsilon^2)]$

In forma matriciale

$M = D*K$ *dove*

M matrice colonna $(M_X ; M_Y ; M_{XY} ;)$

D matrice elastica

$$\begin{vmatrix} D & D*\upsilon & 0 \\ D*\upsilon & D & 0 \\ 0 & 0 & D*(1-\upsilon)/2 \end{vmatrix}$$

La matrice colonna $k\ (-d^2 w/dx^2 ;- d^2 w/dy^2 ; -2*d^2 w/dy*dx)$

Consideriamo due elementi piani il primo rettangolare ed il secondo triangolare

La funzione polinomiale spostamento in forma cubica

$$W(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2*x + \alpha_3*y + \alpha_4*x^2 + \alpha_5*x*y + \alpha_6*y^2 + \alpha_7*x^3 + \alpha_8*x^2*y +$$

$$+\alpha_9*x*y^2 + \alpha_{10}*x^2*y + \alpha_{11}*x^3*y + \alpha_{12}*y^3 ;$$

Le rotazioni

$$\theta_X(x,y)=dw/dx=\alpha_2 2*\alpha_4*x+\alpha_5*y+3*\alpha_7*x^2+2*\alpha_8*x*y+\alpha_9*y^2+2*\alpha_{10}*x^2*y+3*\alpha_{11}*x^2*y ;$$

$$\theta_Y(x,y)=dw/dy =\alpha_3+\alpha_5*x+2*\alpha_6*y+ \alpha_8*x^2+2*\alpha_9*x*y+ \alpha_{10}*x^2+ \alpha_{11}*x^3 +3* \alpha_{12}*y^2 ;$$

È opportuno determinare le 12 costanti

$\alpha_1 ; \alpha_2; \alpha_3 ; \alpha_4 ; \alpha_5 ; \alpha_6 ; \alpha_7 ; \alpha_8; \alpha_9 ; \alpha_{10} ; \alpha_{11} ; \alpha_{12} ;$

Attraverso la scrittura di un sistema di equazioni lineare di 12 equazioni in 12 incognite per 4 nodi e

$$(W_1 ; W_2 ; W_3 ; W_4)\ \ (\theta_{X1} ; \theta_{X2} ; \theta_{X3} ; \theta_{X4})\ \ (\theta_{Y1} ; \theta_{Y2} ; \theta_{Y3} ; \theta_{Y4})$$

Si procede al solito modo attraverso la regola di ***Cramer***

Δ_1 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la prima colonna con il termine noto*

Δ_2 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna con il termine noto*

Δ_3 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la terza colonna con il termine noto*

Δ_4 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quarta colonna con il termine noto*

Δ_5 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quinta colonna con il termine noto*

Δ_6 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la sesta colonna con il termine noto*

Δ_7 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la settima colonna con il termine noto*

Δ_8 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la ottava colonna con il termine noto*

Δ_9 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la nona colonna con il termine noto*

Δ_{10} *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la decima colonna con il termine noto*

Δ_{11} *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la undicesima colonna con il termine noto*

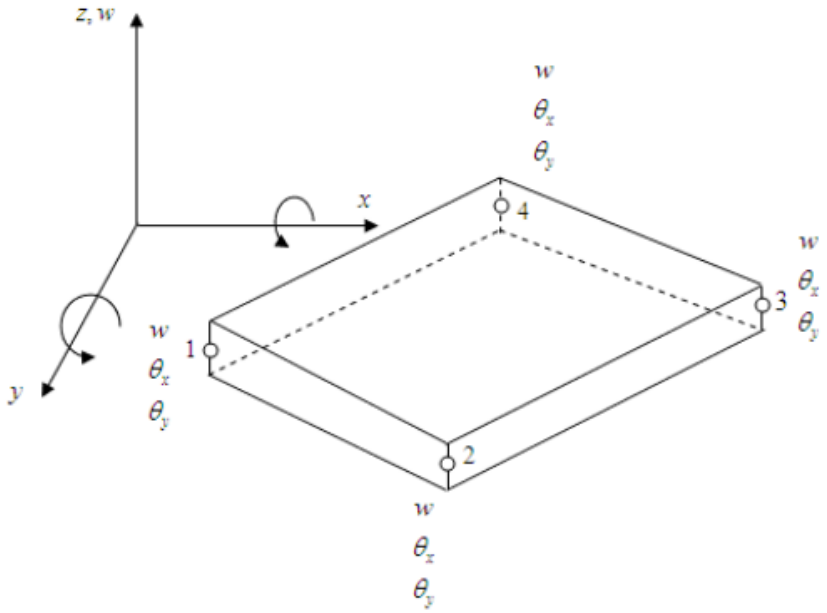
Δ_{12} *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la dodicesima colonna con il termine noto*

Indicato con Δ *il determinante della matrice dei coefficienti e rispettivamente con*

$\alpha_1 = \Delta_1 / \Delta$; $\alpha_2 = \Delta_2 / \Delta$; $\alpha_3 = \Delta_3 / \Delta$; $\alpha_4 = \Delta_4 / \Delta$;

$\alpha_5 = \Delta_5 / \Delta$; $\alpha_6 = \Delta_6 / \Delta$; $\alpha_7 = \Delta_7 / \Delta$; $\alpha_8 = \Delta_8 / \Delta$;

$\alpha_9 = \Delta_9 / \Delta$; $\alpha_{10} = \Delta_{10} / \Delta$; $\alpha_{11} = \Delta_{11} / \Delta$; $\alpha_{12} = \Delta_{12} / \Delta$;



Si può utilizzare la seguente notazione matriciale

$u = -z*dw/dx = z*\beta_X(x,y)$; $v = z*\beta_y(x,y)$ $w = w(x,y)$

poniamo $\beta_X(x,y) = -dw/dx$; $\beta_y(x,y) = -dw/dy$; $\beta_{xy} + \beta_{yx} = dw/dydx + dw/dxdy$

Possiamo porre

$\beta_X (x,y)=N_1*\beta_{1X} +N_2*\beta_{2X}+N_3*\beta_{3X}\, N_4*\beta_{4X}+N_5*\beta_{5X} + N_6*\beta_{6X} +N_7*\beta_{7X} + N_8*\beta_{8X}$

$\beta_Y (x,y)=N_1*\beta_{1Y}+N_2*\beta_{2Y}+N_3*\beta_{3Y}+N_{41}*\beta_{4Y} +N_5*\beta_{5Y} +N_6*\beta_{6Y} +N_7*\beta_{7Y} + N_8*\beta_{8Y}$

I parametri N_i *secondo le coordinate naturali* ξ ; η

$N_1 = -0,25*[(1-\xi)*(1-\eta)*(1+\xi+\eta)]$

$N_2 = -0,25*[(1+\xi)*(1-\eta)*(1-\xi+\eta)]$

$N_3 = -0,25*[(1-\xi)*(1+\eta)*(1-\xi-\eta)]$

$N_4 = -0,25*[(1-\xi)*(1+\eta)*(1+\xi-\eta)]$

$N_5=0,5*(1-\xi^2)*(1-\eta)$

$N_6 =0,5*(1+\xi)*(1-\eta^2)$

$N_7 =0,5*(1-\xi^2)*(1+\eta)$

$N_8 =0,5*(1-\xi^2)*(1-\eta^2)$

Il legame tensioni deformazioni :

$\sigma_X =-z*E/(1-\upsilon^2)*[d^2 w/dx^2 +\upsilon*d^2 w/dy^2]$

$\sigma_Y =-z*E/(1-\upsilon^2)*[\upsilon*d^2 w/dx^2 +d^2 w/dy^2]$

$\tau_{XY} =-2*z*E/(1-\upsilon^2)*d^2 w/dy*dx$

$u = -z*dw/dx = z*\beta_X (x,y)$; $v = z*\beta_y (x,y)$ $w = w(x,y)$

$\varepsilon_X = du/dx = -z*d\beta_X (x,y)/dx;$ $\varepsilon_Y = dv/dy = -z*\beta_Y (x,y)/dy$;

$\gamma_{XY} = du/dy +dv/dx = z*[\beta_X (x,y)/dy +\beta_X (x,y)/dy]$

La matrice di rigidezza dell'elemento rettangolare si ottiene attraverso la applicazione del principio dei lavori virtuali uguagliando il lavoro delle forze interne a quello delle forze esterne .come visto in precedenza
Il lavoro delle forze interne $L_I = t*\int [\sigma_X *\varepsilon_X +\sigma_Y *\varepsilon_Y +\tau_{XY} *\gamma_{XY}]dA$

Il lavoro delle forze e coppie esterne

$$L_e = F_1 * w_1 + F_2 * w_2 + F_3 * w_3 + F_4 * w_4 +$$

$$+M_{1X} * \theta_{1X} + M_{2X} * \theta_{2X} + M_{3X} * \theta_{3X} + M_{4X} * \theta_{4X} +$$

$$+M_{1Y} * \theta_{1Y} + M_{2Y} * \theta_{2Y} + M_{3Y} * \theta_{3Y} + M_{4Y} * \theta_{4Y} + \int q * W(x,y) dA$$

in forma matriciale $F = K*S + P$

S matrice colonna spostamenti $(w_1, w_2, w_3, w_4, \theta_{1X}, \theta_{2X}, \theta_{3X}, \theta_{4X}, \theta_{1Y}, \theta_{2Y}, \theta_{3Y}, \theta_{4Y})$
F matrice colonna forze nodali $(F_1, F_2, F_3, F_4, M_{1X}, M_{2X}, M_{3X}, M_{4X}, M_{1X}, M_{2X}, M_{3X}, M_{4X})$

La matrice di rigidezza K è una matrice 12x12

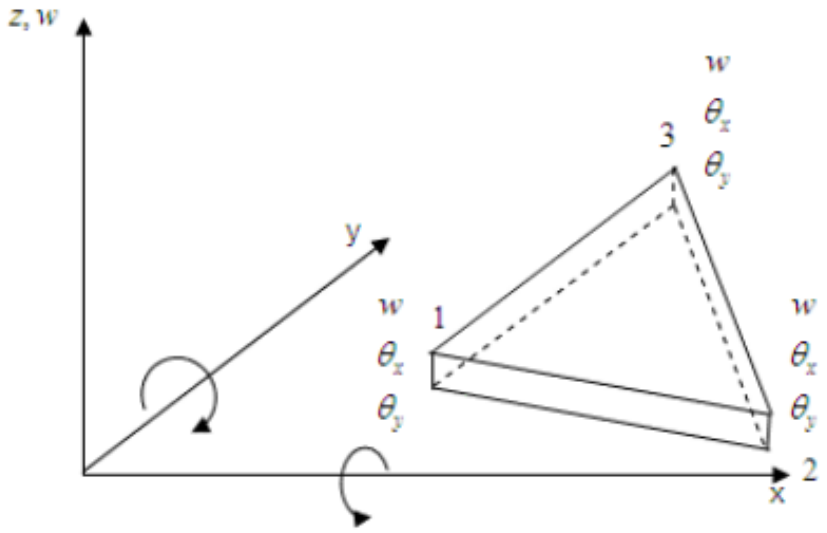
$$K = B^T * D * B$$

D è la matrice di elasticità del materiale :

$$D = E*t^3/[12*(1-\upsilon^2)]* \begin{vmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\upsilon)/2 \end{vmatrix}$$

B è una matrice che tiene conto delle coordinate nodali risolta tramite calcolo numerico in forma cubica .

Consideriamo un elemento ***piano triangolare***



I parametri N_i secondo le coordinate naturali ξ ; η sono 6

$N_1=2*[(1-\xi-\eta)*(0,5-\xi-\eta)]$

$N_2=\xi*(2*\xi-1)$

$N_3=\eta*(2*\eta-1)$

$N_4=4*\xi*\eta$

$N_5=4*\eta*(1-\xi-\eta)$

$N_6=4*\xi*(1-\xi-\eta)$

$\beta_X(x,y)=N_1*\beta_{1X}+N_2*\beta_{2X}+N_3*\beta_{3X}\,N_4*\beta_{4X}+N_5*\beta_{5X}+N_6*\beta_{6X}$

$\beta_Y(x,y)=N_1*\beta_{1Y}+N_2*\beta_{2Y}+N_3*\beta_{3Y}+N_{41}*\beta_{4Y}+N_5*\beta_{5Y}+N_6*\beta_{6Y}$

Per determinare la matrice dell'elemento triangolare si applica del principio dei lavori virtuali uguagliando il lavoro delle forze interne a quello delle forze esterne

Il lavoro delle forze interne $L_I = t*\int[\sigma_X*\varepsilon_X+\sigma_Y*\varepsilon_Y+\tau_{XY}*\gamma_{XY}]dA$

Il lavoro delle forze e coppie esterne

$L_e = F_1*w_1+F_2*w_2+F_3*w_3+ +M_{1X}*\theta_{1X} +M_{2X}*\theta_{2X} +M_{3X}*\theta_{3X}$

$+M_{1Y}*\theta_{1Y} +M_{2Y}*\theta_{2Y} +M_{3Y}*\theta_{3Y} +\int q*W(x,y)dA$

La matrice di rigidezza K è una matrice 9x9

$K = B^T*D*B$

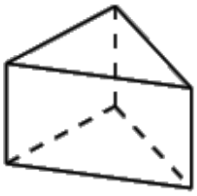
D è la matrice di elasticità del materiale .

8- Il muro

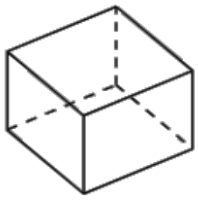
I muri vengono modellati attraverso elementi tridimensionali quali tetraedri a 4 nodi parallelepipedi a 8 nodi e prismi a sei nodi



four-nodes
(tetrahedron)

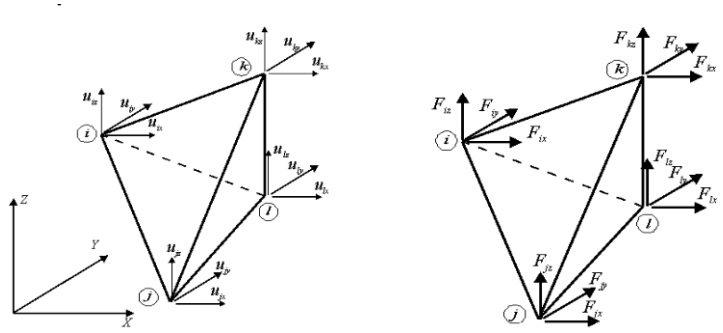


six-nodes



eight-nodes
(hexahedron)

La matrice di rigidezza viene determinata attraverso gli spostamenti nodali nelle tre dimensioni di ciascun nodo



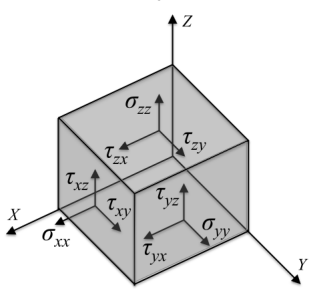
Si ipotizza che la deformazione dei lati sia lineare e congruente nei nodi

$u_X\,(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 *x + \alpha_3 *y + \alpha_4 *z$

$u_Y\,(x,y,z) = \beta_1 + \beta_2 *x + \beta_3 *y + \beta_4 *z$

$u_Z\,(x,y,z) = \gamma_1 + \gamma_2 *x + \gamma_3 *y + \gamma_4 *z$

Le relazioni per materiale elastico omogeneo e isotropo per uno stato tensionale tri-dimensionale



$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\,\varepsilon_{xy} \\ 2\,\varepsilon_{yz} \\ 2\,\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}$$

La determinazione delle costanti avviene attraverso la scrittura di un sistema lineare di equazioni che per un tetraedro a 4 nodi

$u_{1X}(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 * x_1 + \alpha_3 * y_1 + \alpha_4 * z_1$
$u_{2X}(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 * x_2 + \alpha_3 * y_2 + \alpha_4 * z_2$
$u_{3X}(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 * x_3 + \alpha_3 * y_3 + \alpha_4 * z_3$
$u_{4X}(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 * x_4 + \alpha_3 * y_4 + \alpha_4 * z_4$

$u_{1Y}(x,y,z) = \beta_1 + \beta_2 * x_1 + \beta_3 * y_1 + \beta_4 * z_1$
$u_{2Y}(x,y,z) = \beta_1 + \beta_2 * x_2 + \beta_3 * y_2 + \beta_4 * z_2$
$u_{3Y}(x,y,z) = \beta_1 + \beta_2 * x_3 + \beta_3 * y_3 + \beta_4 * z_3$
$u_{4Y}(x,y,z) = \beta_1 + \beta_2 * x_4 + \beta_3 * y_4 + \beta_4 * z_4$

$u_{1Z}(x,y,z) = \gamma_1 + \gamma_2 * x_1 + \gamma_3 * y_1 + \gamma_4 * z_1$
$u_{2Z}(x,y,z) = \gamma_1 + \gamma_2 * x_2 + \gamma_3 * y_2 + \gamma_4 * z_2$
$u_{3Z}(x,y,z) = \gamma_1 + \gamma_2 * x_3 + \gamma_3 * y_3 + \gamma_4 * z_3$
$u_{4Z}(x,y,z) = \gamma_1 + \gamma_2 * x_4 + \gamma_3 * y_4 + \gamma_4 * z_4$

Per i tre sistemi lineari si procede al solito modo attraverso la regola di ***Cramer***

Δ_1 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la prima colonna con il termine noto*
Δ_2 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la seconda colonna con il termine noto*
Δ_3 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la terza colonna con il termine noto*
Δ_4 *il determinate della matrice ottenuta sostituendo la quarta colonna con il termine noto*

Indicato con Δ *il determinante della matrice dei coefficienti e rispettivamente con*

$\alpha_1 = \Delta_1 / \Delta ; \ \alpha_2 = \Delta_2 / \Delta ; \ \alpha_3 = \Delta_3 / \Delta ; \ \alpha_4 = \Delta_4 / \Delta ;$
$\beta_1 = \Delta_1 / \Delta ; \ \beta_2 = \Delta_2 / \Delta ; \ \beta_3 = \Delta_3 / \Delta ; \ \beta_4 = \Delta_4 / \Delta ;$
$\gamma_1 = \Delta_1 / \Delta ; \ \gamma_2 = \Delta_2 / \Delta ; \ \gamma_3 = \Delta_3 / \Delta ; \ \gamma_4 = \Delta_4 / \Delta ;$

Le tre funzioni spostamento

$u_X(x,y,z) = N_i(x,y,z) * u_{iX} + N_j(x,y,z) * u_{jX} + N_k(x,y,z) * u_{kX} + N_l(x,y,z) * u_{lX}$

$u_Y(x,y,z) = N_i(x,y,z) * u_{iY} + N_j(x,y,z) * u_{jY} + N_k(x,y,z) * u_{kY} + N_l(x,y,z) * u_{lY}$

$u_Z(x,y,z) = N_i(x,y,z) * u_{iZ} + N_j(x,y,z) * u_{jZ} + N_k(x,y,z) * u_{kZ} + N_l(x,y,z) * u_{lZ}$

Dove

$N_i(x,y,z) = \alpha_i + \alpha_j * x + \alpha_k * y + \alpha_m * z;$
$N_j(x,y,z) = \alpha_i + \alpha_j * x + \alpha_k * y + \alpha_m * z$
$N_k(x,y,z) = \alpha_i + \alpha_j * x + \alpha_k * y + \alpha_m * z$
$N_m(x,y,z) = \alpha_i + \alpha_j * x + \alpha_k * y + \alpha_m * z$

Applicando il principio dei lavori virtuali

Il lavoro delle forze interne $L_I = t^* \int [\sigma_X * \varepsilon_X + \sigma_Y * \varepsilon_Y + \tau_{XY} * \gamma_{XY}] dA$

Il lavoro delle forze e coppie esterne

$L_e = F_{X1} * u_{X1} + F_{X2} * u_{X2} + F_{X3} * u_{X3} + F_{X4} * u_{X4} +$

$F_{Y1} * u_{Y1} + F_{Y2} * u_{Y2} + F_{Y3} * u_{Y3} + F_{Y4} * u_{Y4} +$

$F_{Z1} * u_{Z1} + F_{Z2} * u_{Z2} + F_{Z3} * u_{Z3} + F_{Z4} * u_{Z4} +$

La matrice di rigidezza K del tetraedro è una matrice 12x12

$K = B^T * E * B$

E è la matrice di elasticità del materiale .

$$E/[(1+\upsilon)*(1-2\upsilon)] \begin{vmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & (1-\upsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/\upsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\upsilon)/\upsilon \end{vmatrix}$$

Se introduciamo le coordinate naturali ξ, η, ζ

$N_i = 0{,}125 * (1+\xi_o) * (1+\eta_o) * (1+\zeta_o) \quad i, j, k, m$

$\xi_o = \pm x/L_X \; ; \; \eta_o = \pm y/L_Y \; ; \; \zeta_o = \pm z/L_Z \; ;$

$\varepsilon_X = du_X/dx \; ; \; \varepsilon_Y = du_Y/dy \; ; \; \varepsilon_Z = du_Z/dz \; ;$

$\gamma_{XY} = du_Y/dx + du_X/dy \; ; \quad \gamma_{XZ} = du_X/dz + du_Z/dx \; ; \quad \gamma_{YZ} = du_Y/dz + du_Z/dy \; ;$

$u_X(\xi,\eta,\zeta) = N_i(x,y,z)*u_{iX} + N_j(x,y,z)*u_{jX} + N_k(x,y,z)*u_{kX} + N_l(x,y,z)*u_{lX}$

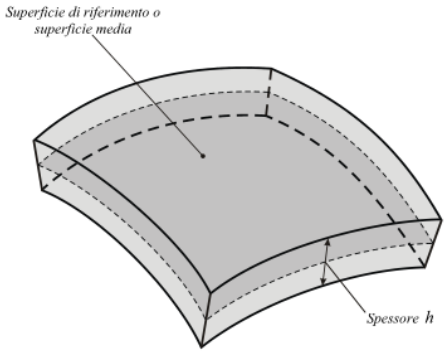
$u_Y(\xi,\eta,\zeta) = N_i(x,y,z)*u_{iY} + N_j(x,y,z)*u_{jY} + N_k(x,y,z)*u_{kY} + N_l(x,y,z)*u_{lY}$

$u_Z(\xi,\eta,\zeta) = N_i(x,y,z)*u_{iZ} + N_j(x,y,z)*u_{jZ} + N_k(x,y,z)*u_{kZ} + N_l(x,y,z)*u_{lZ}$

Il passaggio dal tetraedro a 4 nodi al parallelepipedo a 8 nodi è immediato basta tener presente che il parallelepipedo lo si ottiene da due tetraedri ; lo stesso dicasi per la ortotropia ovvero comportamento differente del materiale secondo le direzioni x y e z .

9 -Le volte e i gusci

Lo studio di strutture dotate di curvatura può essere seguiti attraverso elementi finiti plate shell aumentando il grado di discretizzazione oppure considerando degli elementi dotati di curvatura; Si tratta in questi casi di far riferimento alle proiezioni



Un guscio sottile o volta sottile *soddisfa la condizione*

$\max(h/R_{min}\ ;\ h/L_{min}) \leq 1/(20)$ *dove*

R_{min} *raggio di curvatura minimo*

L_{min} *dimensione minima definita dalla superficie media*

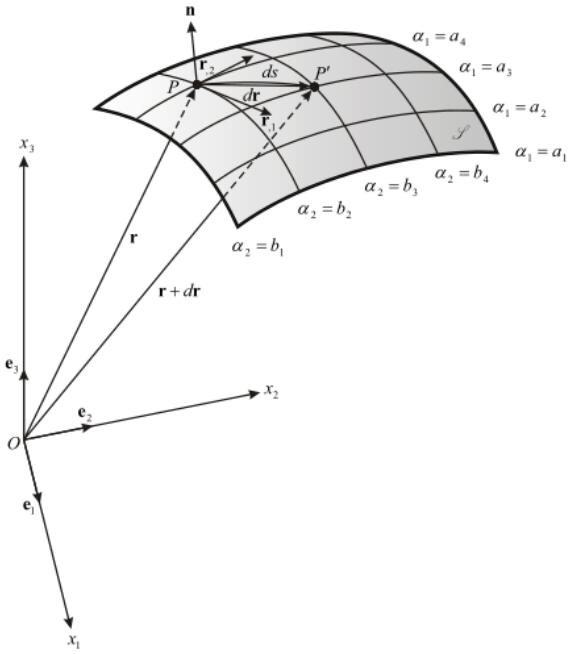
I gusci moderatamente *spessi soddisfano la condizione*

$\max(h/R_{min}\ ;\ h/L_{min}) \leq 1/(10)$

I gusci spessi *non soddisfanno queste condizioni generalmente per le strutture a guscio e a volta*

$1/1000 \leq (h/R_{min}\ ;\ h/L_{min}) \leq 1/(10)$

La modellazione di una struttura con curvatura



Assunto un sistema di riferimento locale :

Dalla equazione della superficie Z = f(x,y) le tangenti all'elemento nell'origine del sistema di riferimento si ottengono dalle derivate parziali definendo i coefficienti angolari delle due rette

$$tg\alpha_X = m_X = dZ/dx = df(x,y)/dx \quad ; \qquad tg\alpha_Y = m_Y = dZ/dy = df(x,y)/dy \quad ;$$

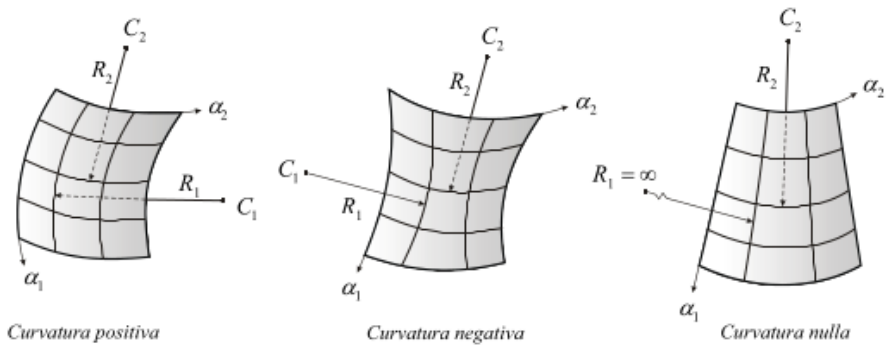
che rappresentano le due inclinazioni

Il piano tangente è definito dalle due rette

La Normale all'elemento è individuata dal vettore ortogonale al piano tangente

La Curvatura r va definita nelle due direzioni e rappresenta l'inverso del raggio di curvatura

$$r_1 = 1/R_1 \; ; \qquad r_2 = 1/R_2 \; ;$$



Le superfici si dividono in:

- ***Superfici di rivoluzione*** *sono generate dalla rotazione di una curva piana meridiano intorno ad un asse ;*

- ***Superfici di traslazione*** *viene definita facendo traslare una curva parallelamente ad un piano contenente la curva stessa ;*

- ***Superfici rigate*** *vengono ottenuto traslando una retta lungo due curve di estremità;*

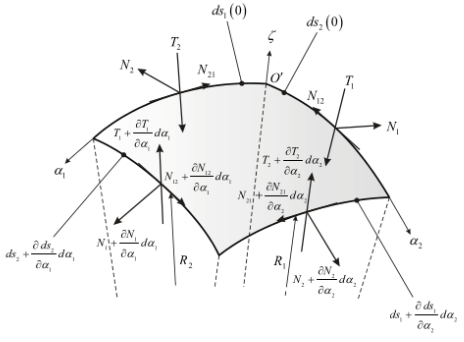
In funzione della curvatura

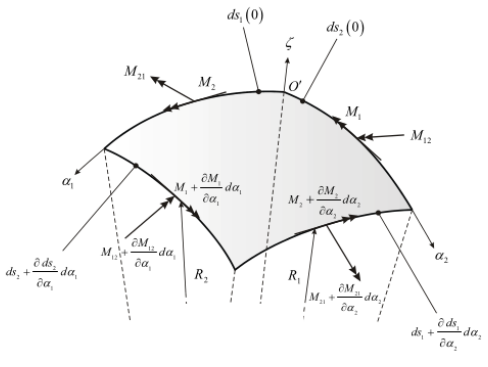
- *Semplice curvatura*

- *Doppia curvatura*

- *Superficie degenere*

La modellazione FEM di norma viene eseguita confondendo l'elemento piano curvo con il piano tangente ovvero si ipotizza che gli angoli α_X , α_Y *siano ridotti è ciò è tanto più vero quanto maggiore è il grado di discretizzazione della superficie e si fa riferimento alle sollecitazioni membranali e flessionali*





riferite al piano tangente; le proiezioni delle sollecitazioni sul piano tangente nella ipotesi di piccoli angoli

$N_X = N'_X * \cos\alpha_X$; $N_Y = N'_Y * \cos\alpha_Y$; $\cos\alpha_X \approx 1$ $\cos\alpha_Y \approx 1$

Lo stesso dicasi per i restanti vettori relativi al momento flettente al taglio e allo sforzo tangenziale. La determinazione della matrice di rigidezza per l'elemento ***plate shell*** *è analoga a quanto visto precedenza , se il grado di discretizzazione non è elevato si fa sempre riferimento al piano tangente ma le sollecitazioni devono tener conto di* $\cos\alpha_X \neq 1$ $\cos\alpha_Y \neq 1$ *. Con i software FEM moderni tale problematica è stata ampiamente superata*

10- Conclusioni

*Il metodo agli elementi finiti ideato negli anni 50 rappresenta il modo naturale di applicare la scienza delle costruzioni al calcolo strutturale implementata su software di calcolo FEM; la scienza delle costruzioni degli anni 50 e del secolo scorso fine ottocento e novecento con i vari metodi quali de Saint Venant -Navier il principio dei lavori virtuali le equazioni cardinali della statica il metodo dei cedimenti le equazioni di congruenza è stata ampiamente superata e sostituita dal calcolo agli elementi finiti e la relativa discretizzazione. Ovviamente prima di utilizzare il metodo FEM si deve avere un ampia conoscenza della scienza delle costruzioni e dei metodi calcolo la guerra informatica può danneggiare il software e quindi fornire risultati errati molto spesso si dialoga e compete con la macchina i software diventano interattivi ad una nostra maggiore competenza ed abilità di calcolo corrispondono risultati corretti è come giocare a scacchi con il PC ed il software FEM . Se a priori già conosciamo i risultati ovvero le deformazioni i moltiplicatori critici le sollecitazioni flettenti e taglianti i periodi le armature le sezioni , ci accorgiamo dell 'errore lo possiamo correggere ed il software interattivo ormai intelligente non ci può fregare è un nostro collaboratore e non esegue per non il calcolo poichè se ci fornisce un risultato errato lo licenziamo e lo sostituiamo . Il calcolo FEM che ci consente di risolvere qualsiasi tipo di struttura prevede la discretizzazione attraverso elementi ,***beam, plate shell, brick*** , ovviamente nel lessico italiano quando si scrive e si parla di elemento finito piano triangolare o rettangolare nessun riferimento o ironia verso ***l'archistar Renzo Piano*** che ha segnato la storia dell'architettura italiana dagli anni 60 ad oggi. La stessa considerazione per il metodo agli elementi finiti ci si riferisce a quel sistema politica gruppi e persone che hanno ostacolato la scienza delle costruzioni la tecnica la progettazione le costruzioni edili e per quanto mi riguarda la crescita e affermazione della mia personalità. Negli appunti per la modellazione dell'elemento rettangolare a 4 nodi di lastra per il quale si è ipotizzata la deformata dei lati quadratica e non lineare ottenuta dalla composizione di due triangoli , lo stesso dicasi per l'elemento rettangolare ad otto nodi dove per gli spostamenti si è assunta una formulazione cubica invece se considerato come due triangoli poteva semplicemente essere assunta una formulazione quadratica .*

Bibliografia

Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java Kaushalkumar Kansara
Methodes des elementes finis Kada Abdelhak
Finit Element Method Jerzy Podgorsky
Il comportamento meccanico dei materiali
Teoria e tecnica delle costruzioni III Volume Prof. Elio Giangreco

Il flutter

1- Introduzione

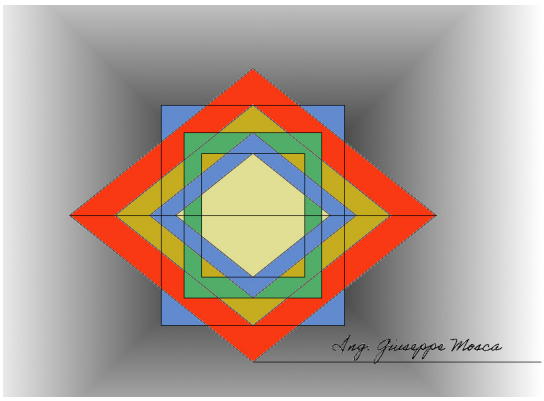
2- Il flutter

3- Analisi agli elementi finiti

4-Il ponte di Messina

5- Flutter atriale (cardiologia)

6 - Conclusioni





N.B. Mi scuso di eventuali imprecisioni ed errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

***Il flutter** è una problematica di instabilità flessotorsionale che riguarda le strutture da ponte , gli impalcati di ponti sospesi che per effetto della azione del vento orizzontale subiscono delle oscillazioni dinamiche che sollecitano flessionalmente e torsionalmente l'impalcato in direzione ortogonale all'asse del ponte con conseguente instabilità e crollo. Si può fare una analogia con la medicina dove il flutter è un alterazione del battito cardiaco ovvero una aritmia con modifica delle pulsazioni e frequenze leggibile in un elettrocardiogramma, pericoloso per la salute dovuto essenzialmente a forti emozioni . Vi sono stati dei crolli di ponti sospesi dovuti a questo fenomeno di instabilità documentati vi sono dei video abbastanza noti nei quali si può osservare il cinematismo che determina il crollo ad esempio il Takoma bridge negli Stati Uniti*

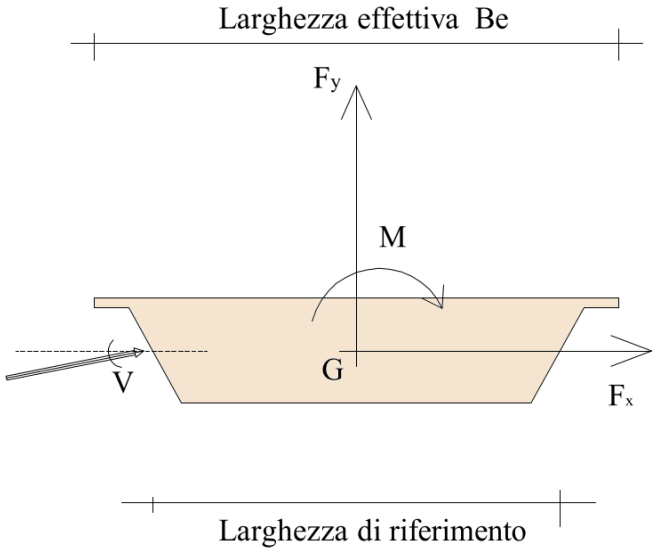


La analisi di instabilità dinamica va eseguita a ponte scarico ovvero quando su di esso non transitano autoveicoli e treni poichè il carico sul ponte ha una funzione stabilizzante , di conseguenza un crollo per flutter non genera danni a persone ma inficia esclusivamente la struttura del ponte con spreco di denaro pubblico danno di immagine per la ingegneria italiana. Come tutti i fenomeni di instabilità le sollecitazioni critiche dipendono dalla rigidezza degli impalcati dei ponti ovvero tanto più rigidi più saremo tutelati dalla instabilità che è poi la richiesta che viene fatta al ponte di Messina ovvero di un impalcato più rigido in grado di ridurre le oscillazioni e deformazioni durante il transito di convogli ferroviari treni merci autotreni e autoveicoli , rigidezza funzione anche dei cavi di sospensione . Irrigidire l'impalcato significa appesantire il ponte siamo di fronte alle scatole cinesi , ovvero aumentiamo la massa il peso ci tuteliamo nei confronti del vento ma si incentivano i carichi verticali che sollecitano i cavi e le torri. Un impalcato di acciaio è già di per se molto pesante per risolvere la problematica sarebbe opportuno modificare lo schema statico del ponte garantendo sicurezza e stabilità nel transito di treni merci ad alta velocità attraverso una capriata strallata o sospesa dal design moderno che è poi la critica fondamentale che viene mossa al ponte sullo stretto ovvero di una cattiva architettura oltre che di danno ambientale . Nel momento in cui il ponte viene riprogettato verrà posta maggiore attenzione all'impatto ambientale integrando perfettamente nel paesaggio marino , ma a mio avviso resta sempre una struttura inutile svalorizzata e derisa dalla ingegneria areonatica e meccanica mondiale e italiana dove il norvegese il finlandese il tedesco il russo l'arabo ect verranno vacanza in Sicilia con il loro taxy volante sorridendo e prendendoci in giro. Il ministero della infrastrutture ha

intenzione di costruire il ponte di Messina assieme alla diga foranea di Genova per favorire la inclusione della Italia in Europa ovvero di creare una dipendenza della Europa dalla viabilità terrestre e marittima della Italia le merci provenienti dal continente africano e asiatico fanno la circumnavigazione della Europa attraverso Gibilterra e anche dell'Africa con rotta verso il porto olandese di Rotterdam se provengono dal medio oriente possono attraversare il canale di Suez e sbarcare in Sicilia o Genova ed essere trasportate in Europa con treni e autotreni. In Italia è ben nota la ideologia che si ha del continente europeo molte persone non votano, dell'Europa non sanno cosa farsene e desiderano uscire dalla Europa preferendo altri modelli di società con i relativi comportamenti quali nord africane , contanti evasione fiscale lavori nero assistenza sociale patologia fisica e mentale in antitesi ai modelli di società scandinave tedesche danesi e dell'est europeo e soprattutto Ukraine ect Ovviamente la società aggiudicatrice dell'appalto, nel momento in cui l'opera non viene costruita e realizzata ma ne è garantita la fattibilità tecnica mira ad ottenere un risarcimento economico dalla Europa con la quale ha un contenzioso aperto da molti anni.

2- Il flutter

La azione del vento riportata nelle NTC viene tradotta in una azione statica equivalente che agisce in direzione inclinata rispetto alla sezione del ponte;



La azione statica del vento è definita con la seguente formula

$P = Q^* C_E * C_P * C_D$

Q pressione cinetica $0,5*\rho*V^2$

V velocità del vento , ρ densità dell'aria

Le azioni che sollecitano la sezione trasversale del ponte sono

$F_H = C_H * Q * H$

$F_V = C_V * Q * H$

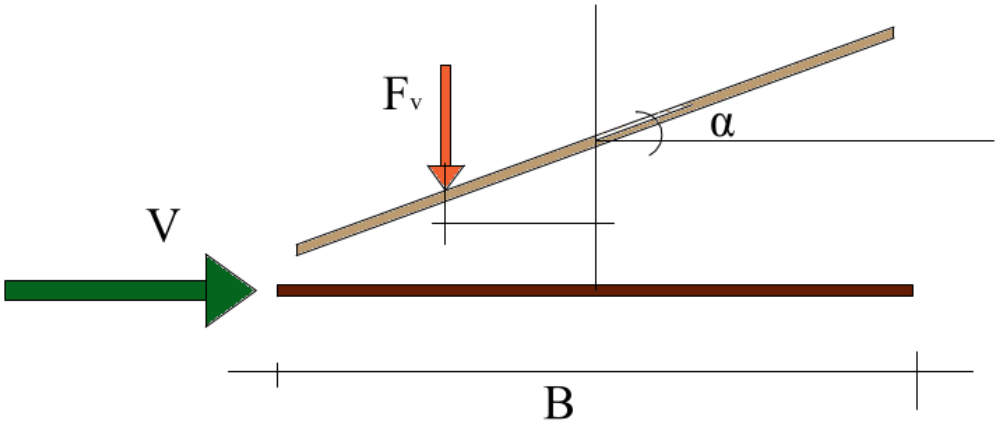
$M = C_M * Q * H * B$

H altezza del ponte

B larghezza di riferimento

I coefficienti C_H; C_V ; C_M sono dei coefficienti che dipendono dalla forma della sezione del ponte .

La instabilità può verificarsi quando il ponte è sollecitato da una azione del vento molto inclinata rispetto all'asse orizzontale , la sezione tende a ruotare aumenta la sollecitazione torcente generando una velocità critica del vento per la quale si ha un fenomeno di instabilità aeroelastica.



La forza Fv è la componente verticale della azione del vento , ortogonale alla superficie dell'impalcato che nella ipotesi di piccole rotazioni

$F_V = V * \sin\alpha * \cos\alpha = V * \alpha = \pi * \rho * V^2 * B * \alpha$

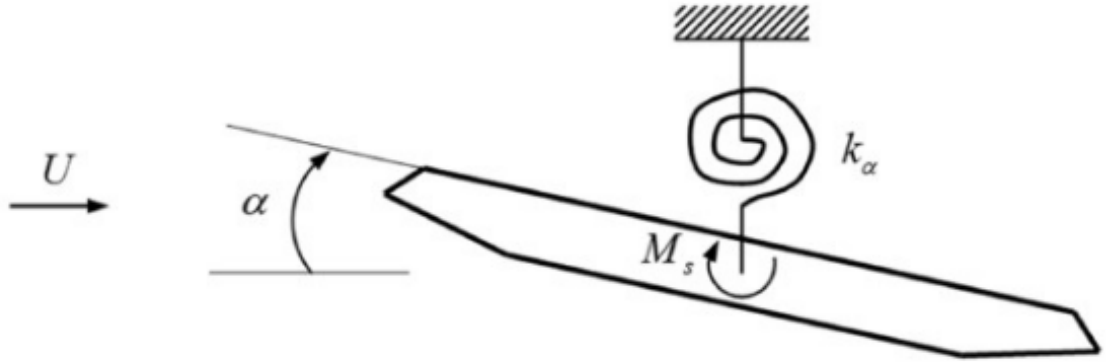
$\sin\alpha = \alpha$; $\cos\alpha = 1$;

dove $\pi * B/2$ lunghezza di un quarto di circonferenza descritta dalla rotazione essendo la forza applicata B/4

Il momento torcente $M = -F_V * B/4 = \pi/4 * \rho * V^2 * B^2 * \alpha$

La instabilità aeroelastica può essere trattata facendo direttamente riferimenti al momenti torcente

$M = C_M * Q * H * B$



$M = C_M * \rho * V^2 * H * B/2$

Il coefficiente C_M *è funzione dell'angolo α espresso come*

$[C_M(0) + (dC_M/d\alpha) * \alpha]$

L'equilibrio rotazione dell'impalcato viene garantito dalla sua rigidezza che si oppone al momento instabilizzante ovvero vi è un momento di richiamo elastico

$- K_\alpha * \alpha + \rho * V^2 * H * B/2 * [C_M(0) + (dC_M/d\alpha) * \alpha] = 0$

che può essere scritta nella forma

$[- K_\alpha + \rho * V^2 * B^2/2 (dC_M/d\alpha)] * \alpha + \rho * V^2 * B^2/2 * C_M(0) = 0$

La velocità critica del vento la si ottiene risolvendo la equazione differenziale

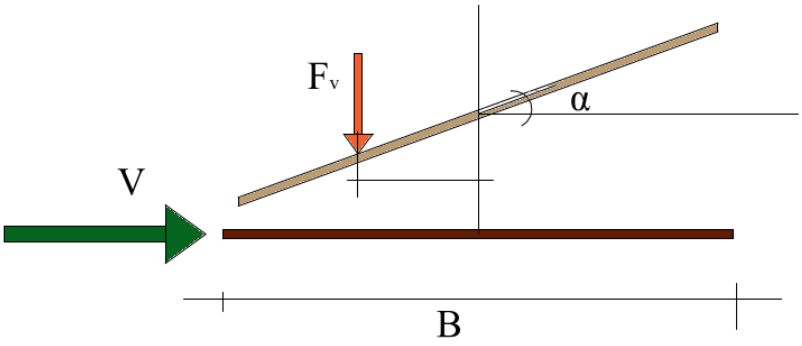
$\boldsymbol{V_{crit} = [2 * K_\alpha / \rho * B^2 (dC_M/d\alpha)_0]^{1/2}}$

La equazione differenziale è del tipo

$I * \alpha''(t) + c_\alpha * \alpha'(t) + K_T * \alpha = M_T$ *rotazionale*

$I * \alpha''(t) + c_\alpha * \alpha'(t) + [K_\alpha - \rho * V^2 * B^2/2 (dC_M/d\alpha)] * \alpha = + \rho * V^2 * B^2/2 * C_M(0)$

Se facciamo riferimento alla trattazione precedente possiamo definire per la sezione una rigidezza verticale e torsionale



$K_B*\delta = F_{V0} + F_V$; verticale $K_T*\alpha = M_0 + M$; torsionale

Con la deformata rigida della sezione definita dai due gradi di libertà

spostamento verticale del baricentro δ
rotazione dalla sezione α

Imponendo l'equilibrio traslazionale verticale e rotazionale

$$K_B*\delta = F_{V0} + \pi*\rho*V^2 *B* \alpha$$

$$K_T*\alpha = M_0 + \pi/4*\rho*V^2 *B^2* \alpha$$

Risolvendo il sistema nelle incognite δ *e* α

$$\delta = 1/K_B*\delta *[F_{V0} -(\pi*\rho*V^2 *B)/(K_T - \pi/4*\rho*V^2*B^2)]$$

$$\alpha = M_0 /(K_T -\pi/4*\rho*V^2*B^2)$$

Per le forse aeroelastiche in analogia ai coefficienti di Timoshenko per le travi compresse si una una riduzione della rigidezza torsionale

$$K^*_T = K_T -\pi/4*\rho*V^2*B^2$$

Tale rigidezza è nulla quando $K_T -\pi/4*\rho*V^2*B^2 = 0$ *alla quale corrisponde* $\alpha = \infty$

Di conseguenza la velocità critica del vento $\boldsymbol{V_{CRI} = 2/B*[K_T /\pi*\rho]^{1/2}}$

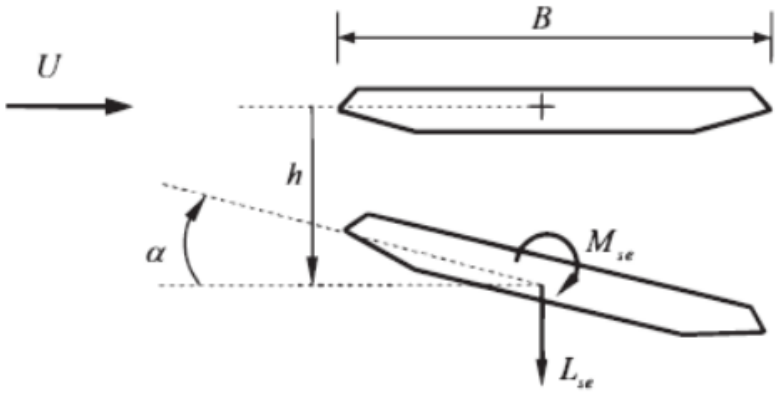
Anche la rigidezza flessionale verticale è ridotta

$$\delta = [F_{V0} - \pi*\rho*V^2 *B*\alpha]/K_B \qquad con \qquad \alpha = M_0 /K^*_T$$

$$\delta = [F_{V0} - \pi*\rho*V^2 *B*M_0 /K^*_T]/K_B$$

La rigidezza ridotta $K^*_B = K_B/[1 +\pi*\rho*V^2 *B^2/4*K^*_T]$

Flutter con due gradi di libertà



Le azioni sollecitanti l'impalcato possono essere assunte come funzioni lineari dei due gradi libertà rotazione e traslazione verticale e della velocità

$$L(t,k)=\rho*V^2*B^2/2 *[K*H_1(k)*h'(t)/V +K*H_2(k)*B*\alpha'(t)/V +K^2*H_3(k)*\alpha(t)/V$$

$$+K^2*H_4(k)*h(t)/V]$$

$$M(t,k)=\rho*V^2*B^2/2 *[K*A_1(k)*h'(t)/V +K*A_2(k)*B*\alpha'(t)/V +K^2*A_3(k)*\alpha(t)/V$$

$$+K^2*A_4(k)*h(t)/V]$$

$$K = \omega*B/V = 2*\pi*B/(V*T)$$

T periodo fondamentale di vibrazione
1/T = f frequenza fondamentale
pulsazione ω
V velocità del vento

I termini H_1 ; H_2 ; H_3 ; H_4 ; A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; *sono dei coefficienti di flutter funzione della riduzione della frequenza di oscillazione e anche della pulsazione*
La funzioni h(t) ed α(t) rappresentano i due gradi libertà

La velocità può essere ridotta secondo la formula

$V_R = V/(f*B) = 2*\pi/k$

La analisi dinamica aeroelastica per un impalcato di ponte sospeso viene eseguita con la trattazione per moto armonico smorzato , ovvero le equazioni che definiscono la dinamica oscillatoria

$M* h''(t) + c_V *h'(t) + K_V* h = Fv$ *traslazionale*

$I* \alpha''(t) + c_\alpha *\alpha'(t) + K_T* \alpha = M_T$ *rotazionale*

M massa dell'impalcato
K_V *rigidezza verticale*
Fv del vento

$\rho*V^2*B^2/2 *[K*H_1(k)*h'(t)/V +K*H_2(k)*B*\alpha'(t)/V +K^2*H_3(k)*\alpha(t)/V+K^2*H_4(k)*h(t)/V]$

I momento di inerzia rotazionale
K_T *rigidezza torsionale*
M_T *momento del vento*

$\rho*V^2*B^2/2 *[K*A_1(k)*h'(t)/V +K*A_2(k)*B*\alpha'(t)/V +K^2*A_3(k)*\alpha(t)/V +K^2*A_4(k)*h(t)/V]$

c_V *coefficienti di smorzamento damping traslazionale*
c_α *coefficienti di smorzamento damping rotazionale*

La integrazione di questo sistema di equazione è la solita con la equazione caratteristica sono disaccoppiate , assumendo le due soluzioni

$$h(t) = h_o * e^{\omega t} \; ; \quad \alpha(t) = \alpha_o * e^{\omega t} \; ;$$

$$h'(t) = (\omega*t)* h_o * e^{\omega t} \; ; \quad h''(t) = (\omega*t)^2* h_o * e^{\omega t} \; ;$$

$$\alpha'(t) = (\omega*t)* \alpha_o * e^{\omega t} \; ; \quad \alpha''(t) = (\omega*t)^2* \alpha_o * e^{\omega t} \; ;$$

Sostituendo nelle due equazioni omogenee associate

$M *(\omega*t)^2* h_o * e^{\omega t} + c_V *(\omega*t)* h_o * e^{\omega t} + K_V* h_o * e^{\omega t} = 0$

Semplificando e posto $p = (\omega_V*t)$

$M *p^2* + c_V *p + K_V = 0$ *equazione di secondo grado*

In modo analogo $q = (\omega_T*t)$

$I * q^{2}* + c_T * q + K_T = 0$ *equazione di secondo grado*

L'integrale generale delle omogenee associate ha la forma

$$h(t) = C_1 * h_o * e^{p1} + C_2 * h_o * e^{p2}$$

$$\alpha(t) = D_1 * \alpha_o * e^{q1} + D_2 * \alpha_o * e^{q2}$$

Dove p_1 , p_2 , q_1 , q_2

rappresentano le soluzioni delle due equazioni caratteristiche di secondo grado delle quali va discusso il discriminante .

Per la determinazione degli integrali particolari conviene considerare le sollecitazioni costanti

$F = C_V * \rho * V^2 * B/2$
$M = C_M * \rho * V^2 * B^2/2$

Il moto è armonico smorzato e gli integrali generali con le condizioni iniziali

$h(0) = h_0 \quad h'(0) = h'_0 \quad ed \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \alpha(0) = \alpha'_0$

$H(t) = e^{-\xi\omega t} * [A_1 * cos\omega_D t + A_2 * sin\omega_D t] + C_V * \rho * V^2 * B/(2 * \omega^2)$

$h(t) = e^{-\xi\omega t} * [h_0 * cos\omega_D t + (h'_0 + h_0 * \omega * \xi)/\omega_D * sin\omega_D t] + C_V * \rho * V^2 * B/(2 * \omega^2)$

$\alpha(0) = \alpha_0 \quad \alpha(0) = \alpha'_0$

$\alpha(t) = e^{-\xi\omega t} * [B_1 * cos\omega_D t + B_2 * sin\omega_D t] + C_M * \rho * V^2 * B^2/(2 * \omega^2)$

$\alpha(t) = e^{-\xi\omega t} * [\alpha_0 * cos\omega_D t + (\alpha'_0 + \alpha_0 * \omega * \xi)/\omega_D * sin\omega_D t] + C_M * \rho * V^2 * B^2/(2 * \omega^2)$

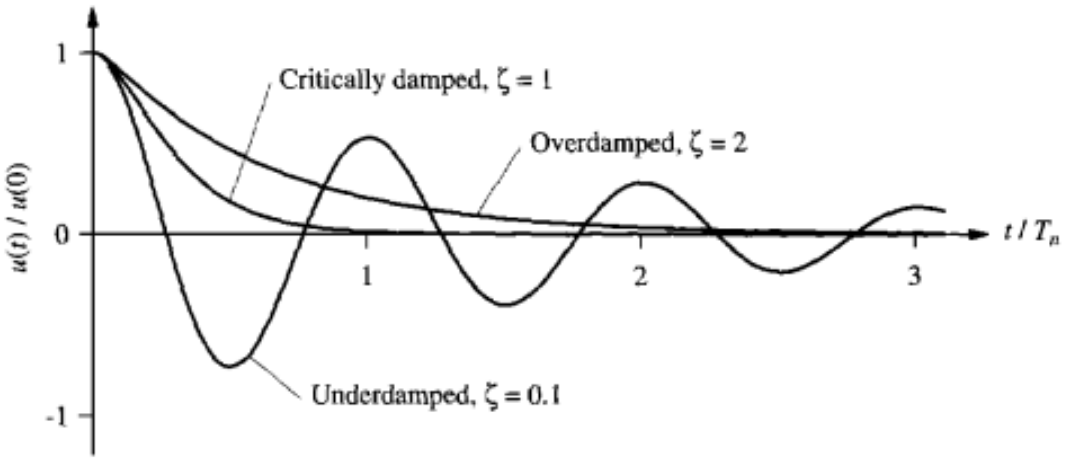
Le due costanti

$A_1 = h_0 \; ; \quad A_2 = (h'_0 + h_0 * \omega * \xi)/\omega_D \; ;$

$B_1 = \alpha_0 \; ; \quad B_2 = (\alpha'_0 + \alpha_0 * \omega * \xi)/\omega_D \; ;$

Assumono la forma ben nota di moto armonico smorzato

$\omega^2 = K/m \qquad \omega_D = \omega * (\xi^2 - 1)^{1/2} \qquad$ *Il periodo* $T_D = 2 * \pi/[\omega * (\xi^2 - 1)^{1/2}]$

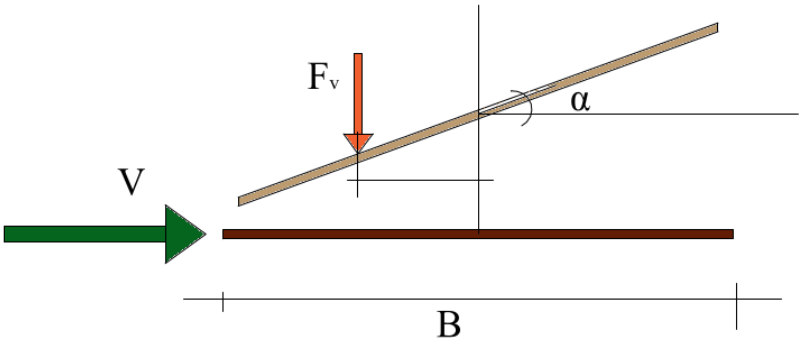


La velocità di Flutter può essere ottenuta attraverso la formula

$V_F = B*\omega_F/K_F$

Non si ha una velocità critica ma viene determinato un valore che non può essere superato

Flutter con due gradi libertà senza smorzamento



Le equazioni dinamiche del moto

$K_B*\delta + m*\delta'' = F_V$

$K_T*\alpha + I*\alpha'' = M_T$

Le due pulsazioni $\omega_B = (K_B/m)^{1/2}$; $\omega_T = (K_T/I)^{1/2}$;

Gli integrali generali delle due equazioni differenziali

$$\delta(t) = F_V/\omega_B{}^2 * (1-\cos\omega_B t) \quad ; \qquad \alpha(t) = M_T / \omega_T{}^2 * (1-\cos\omega_T t) \quad ;$$

Per condizioni iniziali di spostamento e velocità nulle

Se le due frequenze e pulsazioni coincidono

$$K_B/m = K_T/I_P = [K_T - K_T * (V/V_d)]/I_P$$

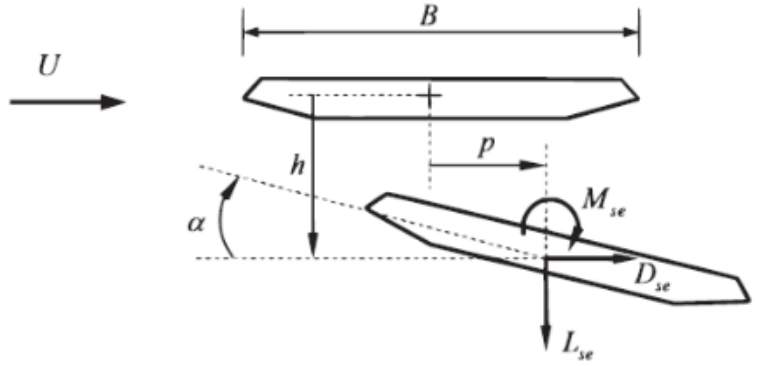
$$\omega_B/\omega_T - 1 = -(V_f/V_d)^2 \quad ; \qquad V_f = V_d * [1 - (\omega_B/\omega_T)^2]^{1/2}$$

La velocità di flutter ottenuta concerne una sezione ideale a foglio non realizzabile nella pratica ; Per sezioni di forma differente sono necessarie prove nella galleria del vento , per i casi più semplici per la velocità di flutter che non va superata possono essere utilizzate le seguente formule

$$V_f = V_{RF} * B * f_T \quad \text{dove}$$

$$V_{RF} = 4 * (1-f_B/f_T) * (m*r/\rho*B^3)^{1/2} \geq 2{,}5$$

Flutter con tre gradi di libertà



Le espressioni forma matriciale delle forze che sollecitano la sezione del ponte

$$S = \rho * B * V^2/2 * [(F_D) * q + 1/V * (F_V) * q']$$

$$\begin{array}{lccccccc} L_V & K^2*H_4/B & K^2*H_6/B & K^2*H_3 & h & K*H_1/V & K*H_5/V & K*H_2*B/V \\ D_O = & K^2*P_6/B & K^2*P_4/B & K^2*P_3 & + p & K^2*P_5/V & K*P_1/V & K*P_2*B/V \\ M_T & K^2*A_4 & K^2*A_6 & K^2*A_3*B & \alpha & K*A_1*B/V & K*A_5*B/V & K*A_2*B/V \end{array}$$

La matrice S colonna è quella delle sollecitazioni (L_V , D_O , M_T)
I gradi di libertà sono rappresentati dalla matrice colonna (h,p,α)

La equazione dinamica dell'equilibrio aereolastico in presenza di smorzamento

$M^* h''(t) + c_V * h'(t) + K_V * h = Lv$ *traslazione verticale*

$M^* p''(t) + c_o * h'(t) + K_o * p = Do$ *traslazione orizzontale*

$I^* \alpha''(t) + c_\alpha * \alpha'(t) + K_T * \alpha = M_T$ *rotazionale*

Si è di fronte a tre moti armonici smorzati i cui integrali sono noti.

Se trascuriamo lo smorzamento le equazioni del moto armonico per flutter per i tre gradi di libertà

δ *spostamento verticale*
η *spostamento orizzontale*
α *rotazione*

$K_B * \delta + m * \delta'' = F_V$

$K_A * \eta + m * \eta'' = F_O$

$K_T * \alpha + I * \alpha'' = M_T$

GALLOPING

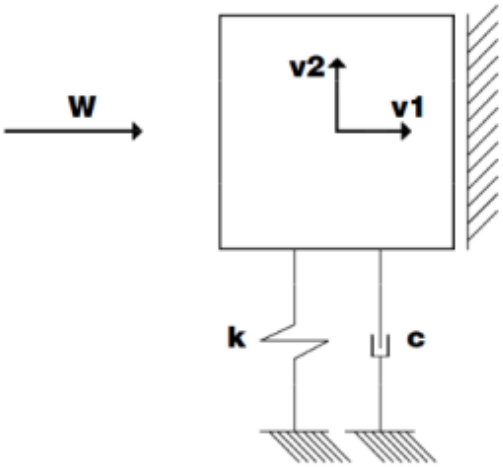
Le oscillazioni galoppanti sono un tipico fenomeno instabile in cui le oscillazioni di grande ampiezza possono presentarsi anche a frequenze minori rispetto a quelle di distacco di vortici. Una volta instaurato il galloping le ampiezze tendono a crescere con la velocità del flusso e possono raggiungere ampiezze anche pari a 10 volte la sezione trasversale. Tale instabilità risulta associata alla forma della sezione del corpo o, più specificatamente, ai coefficienti di drag e di lift associati ad essa. Il galloping non si verifica su strutture assialsimmetriche come cilindri o cavi; quest'ultimi però ne possono essere interessati se vi si accumula del ghiaccio che tende a modificarne la sezione.

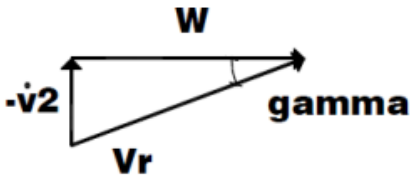
- Galloping traslazionale

Consideriamo un oscillatore semplice che si muove trasversalmente al flusso ;
La azione del vento:

$F_Y = \rho * d * V^2/2 * (C_D * \sin\gamma + C_L * \cos\gamma)$ *dove :*

Densità del vento ρ
Dimensione del corpo d
Velocità del vento V
Coefficiente di drift C_D
Coefficiente di Lift C_L
Angolo relativo γ





La composizione delle velocità :

$\gamma = -v'_2/W \quad ; \quad v_R = W/\cos\gamma$

Sostituendo si ottiene

$F_Y = \rho * d * W^2/2 * (C_D * \tan\gamma + C_L)/\cos\gamma$

Si può definire un coefficiente $C_{2,R} = (C_D * \tan\gamma + C_L)/\cos\gamma$

Se eseguiamo gli sviluppi i serie di Mac-Laurin di $\cos\gamma$ *e* $\tan\gamma$ *al primo ordine*

$C_{2,R}(\gamma) = C_{2,R}(0) + dC_{2,R}(0)/d\gamma * \gamma = C_L(0) + (dC_L(0)/d\gamma + C_D) * \gamma$

$\tan\gamma = \gamma \quad \cos 0 = 0$

La forza $F_Y = \rho*d*W^2/2*C_L(0) + \rho*d*W^2/2* (dC_L(0)/d\gamma + C_D)*\gamma$

$\gamma = -v'_2/W$ $\quad F_Y = \rho*d*W^2/2*C_L(0) - \rho*d*W^2/2* (dC_L(0)/d\gamma + C_D)*v'_2/W$

La equazione differenziale del moto

$M*v'' + K*v = F_Y$ *sostituendo*

$M*v'' + c*v' + K*v = \rho*d*W^2/2*C_L(0) - \rho*d*W^2/2* (dC_L(0)/d\gamma + C_D)*v'_2/W$

$M*v'' + (c + \rho*d*W/2* (dC_L(0)/d\gamma + C_D))*v' + K*v = \rho*d*W^2/2*C_L(0)$

Lo smorzamento si compone di uno smorzamento strutturale ed uno aereodinamico

$$\xi = \xi_S + \xi_a \qquad \xi_a = \rho*d*W/(4*m*\omega)* (dC_L(0)/d\gamma + C_D)$$

Lo smorzamento strutturale è positivo mentre lo smorzamento aereodinamico ha u segno definito dai coefficienti ,affinché si manifesti la instabilità è necessario che lo smorzamento aereodinamico sia negativo

$\rho*d*W/(4*m*\omega)* (dC_L(0)/d\gamma + C_D) < 0$; $\qquad (dC_L(0)/d\gamma + C_D) < 0$;

Essendo C_D *positivo lo smorzamento è negativo soltanto se la derivata prima del lift è negativa* $dC_L(0)/d\gamma < 0$
La vera instabilità si manifesta quando lo smorzamento complessivo è nullo

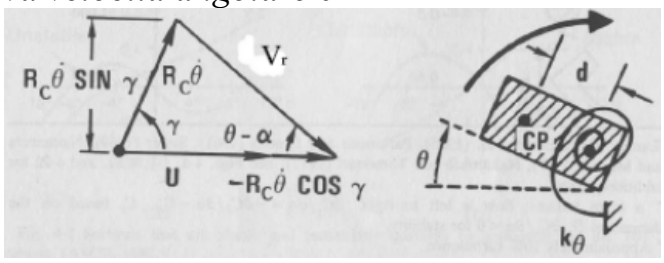
$(c + \rho*d*W/2* (dC_L(0)/d\gamma + C_D)) = 0$

- Galloping torsionale

La equazione di equilibrio aeroelastica torsionale

$I* \theta''(t) + c_\alpha *\theta'(t) + K_T* \theta = M_T$ *rotazionale*

Nel galloping torsionale l'angolo si modifica con la posizione angolare θ *e la relativa velocità angolare* θ'



L'angolo di attacco è espresso come

$$\alpha = \theta - arctg\,[(R_C*\theta'*sin\gamma)/(U-R_C*\theta'*cos\gamma)]$$

La velocità relativa $V_R = (R_C*\theta'*sin\gamma)^2 + (U-R_C*\theta'*cos\gamma)^2$

U velocità del flusso
$R_C*sin\gamma$ *raggio caratteristico della sezione*

Nella ipotesi di piccoli spostamenti e angoli ridotti

$$\alpha \approx \theta - R_C*\theta'/U; \qquad V_R{}^2 \approx U^2$$

La sollecitazione torcente

$M_\theta = \rho*d^2*V^2/2*C_M$ *dove sempre tramite la formula di* ***MAC LAURIN***

$$M_\theta = \rho*d^2*V^2/2*[C_M(0) + C'_M(0)*\alpha + C''_M(0)*\alpha^2/2 + ...]$$

Arrestandoci ai termini del primo ordine

$$M_\theta = \rho*d^2*V^2/2*[C_M(0) + C'_M(0)*(\theta - R*\theta'/U)]$$

La equazione del moto diventa

$$I*\theta''(t) + c_\theta*\theta'(t) + K_T*\theta = \rho*d^2*V^2/2*[C_M(0) + C'_M(0)*(\theta - R*\theta'/U)]$$

$$I*\theta''(t) + [c_\theta - \rho*d^2*R*V/2*C'_M(0)]*\theta'(t^*) +$$

$$+ [K_T - \rho*d^2*R*V/2*C'_M(0)]*\theta = \rho*d^2*V^2/2*C_M(0)$$

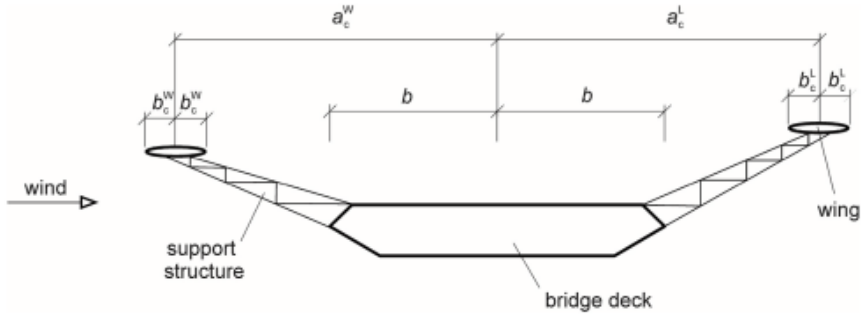
Da tale espressione è facile distinguere la possibilità di due instabilità. Una statica dettata dall'annullarsi della rigidezza descritta successivamente e che prende il nome di divergenza torsionale. La seconda è il galloping torsionale dato dall'annullarsi dello smorzamento; da tale relazione è possibile ricavare la velocità critica in cui tale fenomeno si manifesta:

$$c_\theta - \rho*d^2*R*V^2/2*C'_M(0) = 0$$

$$U_{CR} = -2*c_\theta/[\rho*d^2*R*C'_M(0)]$$

3- Analisi agli elementi finiti

La analisi aeroelastica agli elementi finiti consiste nelle definizione dell'equilibrio dinamico della sezione da ponte sollecitato dalle azioni del vento scrivendo la matrice di rigidezza della sezione , senza far ricorso alla rigidezza complessiva traslazionale e rotazionale , definendo i gradi di libertà della sezione discretizzata.

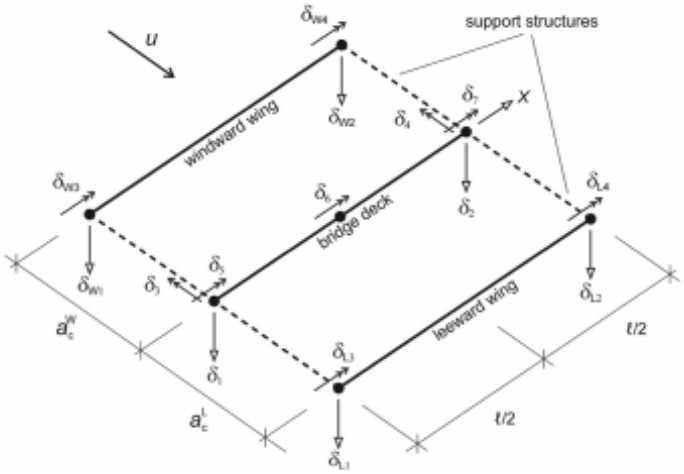


La sezione viene modellata con 7 nodi ad ognuno si associano 2 gradi libertà in direzione orizzontale e verticale non tenendo conto dei momenti rotazionali

Δ_{1X} ; Δ_{2X} ; Δ_{3X} ; Δ_{4X} ; Δ_{5X} ; Δ_{6X} ; Δ_{7X} ;

Δ_{1Y}; Δ_{2Y}; Δ_{3Y}; Δ_{4Y}; Δ_{5Y}; Δ_{6Y}; Δ_{7Y};

L'impalcato discretizzato:



Questa modellazione che non corrisponde alla sezione si basa sulle seguenti ipotesi :
-Le adiacenti non sono tra di loro connesse
- Le ali sono libere di ruotare rispetto al loro asse trasversale
- Le ali sono vincolate torsionalmente ai loro supporti
-I supporti sono infinitamente rigide

Tali ipotesi hanno le seguenti conseguenze
- La deformazione globale della sezione può essere definita con soli 7 gradi di libertà

Possiamo scrivere le seguenti matrici colonna

$\Delta = (\Delta_1 ; \Delta_2 ; \Delta_3 ; \Delta_4 ; \Delta_5 ; \Delta_6 ; \Delta_7)^T$

$\Delta_X = (\Delta_{1X} ; \Delta_{2X} ; \Delta_{3X} ; \Delta_{4X} ; \Delta_{5X} ; \Delta_{6X} ; \Delta_{7X})^T$

$\Delta_Y = (\Delta_{1Y} ; \Delta_{2Y} ; \Delta_{3Y} ; \Delta_{4Y} ; \Delta_{5Y} ; \Delta_{6Y} ; \Delta_{77})^T$

Le matrici di rigidezza alle quali corrisponde la relazione $F = K^* \Delta$ *con le quali di può scrivere la equazione di equilibrio dinamico*

$M^*\Delta'' + c^*\Delta' + K^*\Delta = F$

Devono essere 7x7 possiamo eseguire una separazione

Possiamo scrivere 2 equazioni separate

$m^*\Delta_X'' + c_X^*\Delta_X' + K_X^*\Delta_X = F_X$ *m massa*

$m^*\Delta_Y'' + c_Y^*\Delta_Y' + K_Y^*\Delta_Y = F_Y$

I 7 gradi di libertà definiscono il comportamento della sezione come elemento ***plate-shell*** *, ovvero quelli verticali definiscono i comportamento a piastra , mentre quelli orizzontali a lastra. Si può scrivere anche l'equilibrio rotazionale dalla sezione modellata agli elementi finiti*

$I_\theta^*\Delta_\theta'' + c_\theta^*\Delta_\theta' + K_\theta^*\Delta_\theta = M_T$ *I momento di inerzia rotazionale*

Facendo dipendere la rotazione θ della sezione dai 7 gradi di libertà . Gli spostamenti dell'elemento ***shell*** *in direzione X sono nel piano ad esso corrispondono rotazioni orizzontali con asse verticale, mentre alle deformazioni verticali corrispondono rotazioni verticali con asse orizzontale. Si tratta di imporre un equilibrio alla rotazione intorno ai suddetti assi come nella trattazione dei telai spaziali in cemento armato con due gradi di libertà per nodo con masse concentrate nei nodi.*

Le azioni del vento in direzione orizzontale e verticale

$F_X = C_X^*\rho^*V^{2*}B/2$;

$F_Y = C_Y^*\rho^*V^{2*}B/2$;

$M_T = C_T^*\rho^*V^{2*}B^2/2$;

B larghezza effettiva

La risoluzione delle equazioni conduce a dei moti armonici smorzati per i quali come visto precedenza è possibile ricavare la velocità di flutter ovvero velocità del vento che non può essere superata.

4-Il ponte di Messina

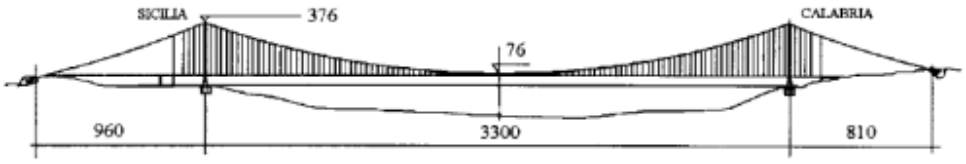
Si riportano in questo paragrafo degli studi e modellazioni di analisi aeroelastiche eseguite sul ponte di Messina





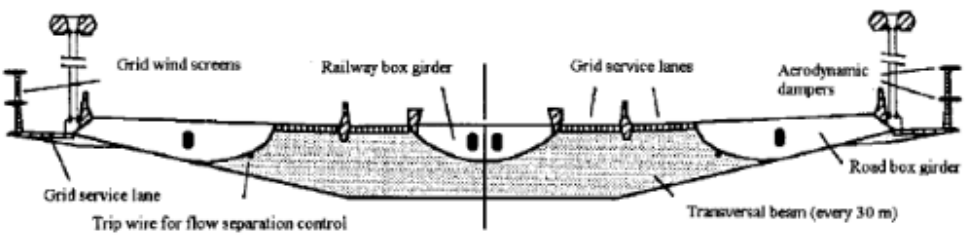
Come si vede l'impalcato prevede il transito di una autostrada con doppia corsia per senso di marcia e nella parte centrale un doppio binario per transito dei treni non solo passeggeri ma anche merci provenienti dal medio oriente ed Asia poiché è questa la funzione principale del ponte oltre che evitare i tempi di attesa per i traghetti in agosto. Il design è sgradevole una brutta architettura due piloni in acciaio alti 382 m un impalcato sospeso da cavi sempre in acciaio , l'impatto ambientale è minimo legato esclusivamente alla altezza dei piloni al loro diametro e al materiale utilizzato.

Riportiamo i risultati delle analisi condotte :



Deck mass	24300 kg/m	Global cable tension	267200 t
Cable mass	32000 kg/m	Tower height	376 m

Figure 3.1 Messina strait bridge project main features



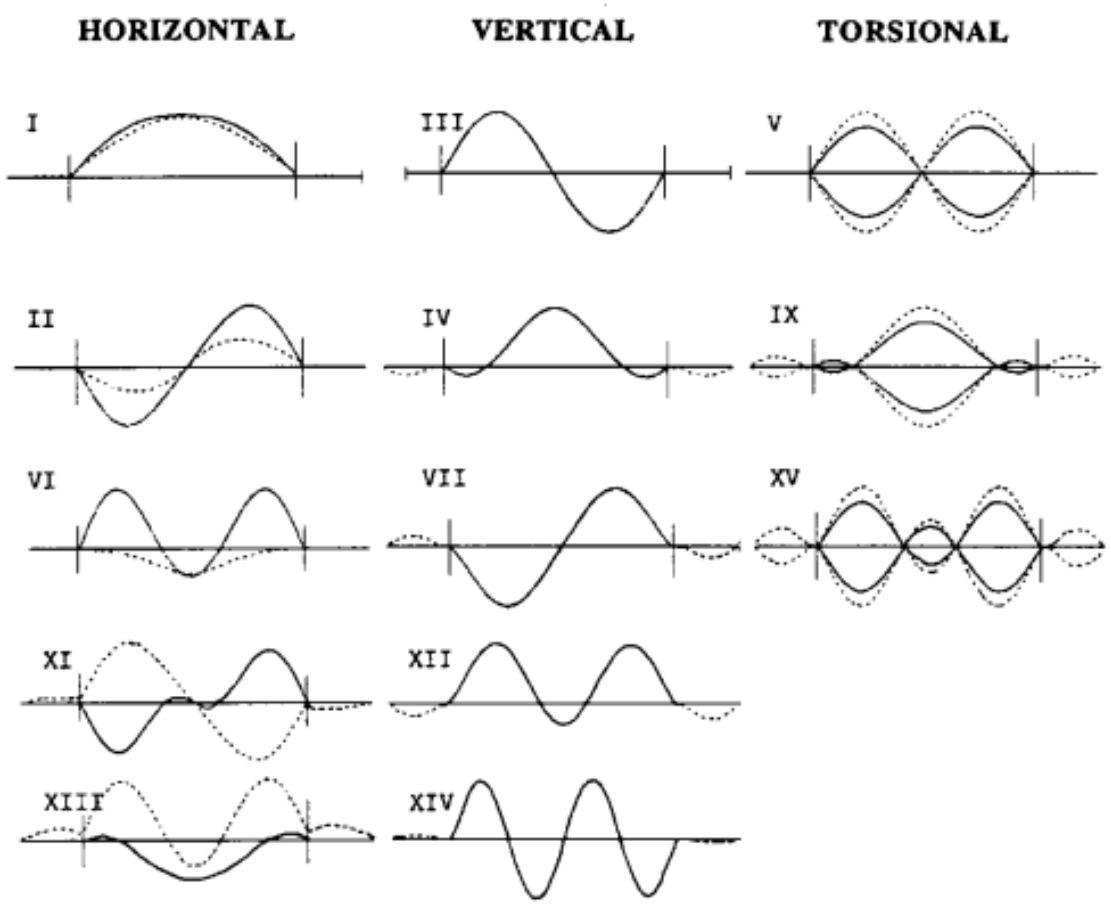
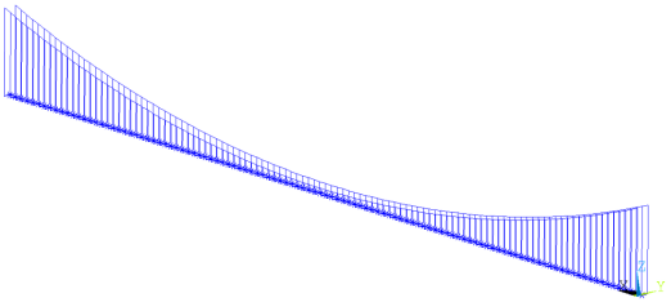


Figure 3.4 Vibration modes

I periodi e le frequenze

	frequency [Hz]	Mode of vibration
I	0.033	first horizontal (symmetric)
II	0.059	second horizontal (non symmetric)
III	0.061	first vertical (non symmetric)
IV	0.080	first-third vertical (symmetric)
V	0.081	first torsional (non symmetric)
VI	0.084	first-third horizontal (symmetric)
VII	0.093	first axial
IX	0.097	first-third torsional (symmetric)
X	0.103	second horizontal cables (symmetric)
XII	0.107	third vertical (symmetric)
XIII	0.116	first-third horizontal cables (symmetric)
XIV	0.128	fourth vertical
XV	0.129	third torsional

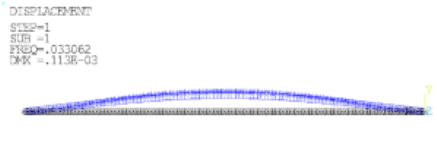
Riportiamo i confronti tra i risultati delle varie analisi aeroelastiche eseguite



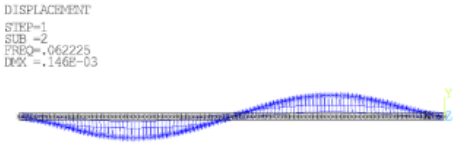
Span length (m)	3300
Total deck width (m)	61.13
Distance between cables (m)	52
Sag (m)	297
Cable area (m^2)	2.01
Young modulus (N/m^2)	2.10E+11
Poisson modulus	0.3
Equivalent vertical moment of inertia, Iz (m^4)	9.394
Equivalent lateral moment of inertia, Iy (m^4)	385.65
Equivalent polar moment of inertia, It (m^4)	3.0918
Deck mass per unit length (kg/m)	18000

Mode	*Frequency [Hz]*	*Type*	*MATLAB*	*Diana*	*Kusano*	*D'Asdia&Sepe*	*%ΔMATLAB*	*%ΔDiana*	*%ΔKusano*	*%ΔD'Asdia&Sepe*
1	0.0331	LS	-	0.033	0.0309	0.0311	-	0.2	7.0	6.5
2	0.0622	LA	-	0.059	0.0573	0.0562	-	5.4	8.6	10.7
3	0.0646	VA	0.064	0.061	0.0606	0.0606	1.0	5.9	6.6	6.6
6	0.0862	VS	0.087	0.08	0.0811	0.0806	-0.9	7.8	6.3	6.9
5	0.0740	TA	0.09	0.081	0.0868	0.0794	-17.8	-8.6	-14.7	-6.8
9	0.0983	TS/LA	0.12	0.097	0.1032	0.0962	-18.1	1.4	-4.7	2.2
11	0.1033	LS	-	-	0.1142	0.1075	-	-	-9.5	-3.9
13	0.1289	VA	0.129	0.128	0.1279	-	-0.1	0.7	0.8	-
15	0.1381	TS/LA	-	0.129	0.1356	-	-	7.1	1.8	-
18	0.1539	LA	-	-	0.1461	-	-	-	5.3	-

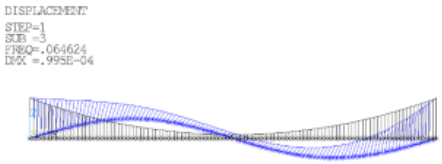
Table 6.2 Modal frequencies and modal shapes comparison



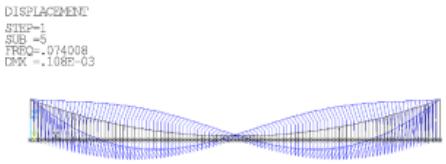
Mode 1, LS, 0.033Hz



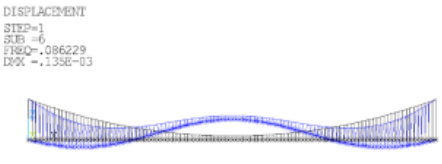
Mode 2, LA, 0.062Hz



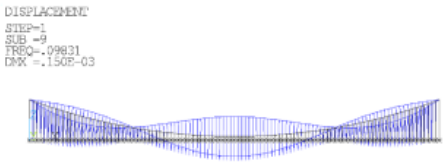
Mode 3, VA, 0.064Hz



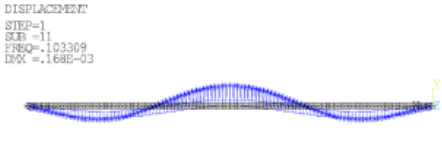
Mode 5, TA, 0.074Hz



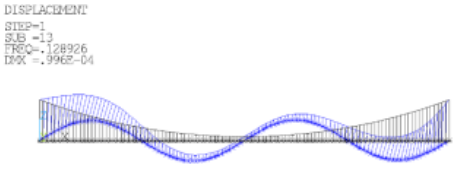
Mode 6, VS, 0.086Hz



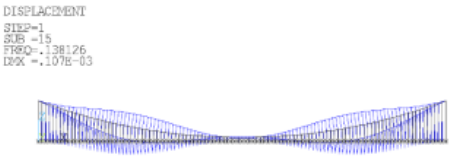
Mode 9, TS, 0.098Hz



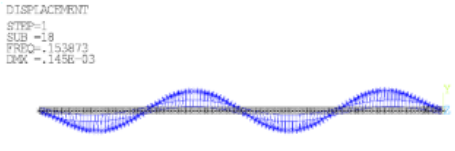
Mode 11, LS, 0.103Hz



Mode 13, VA, 0.129Hz



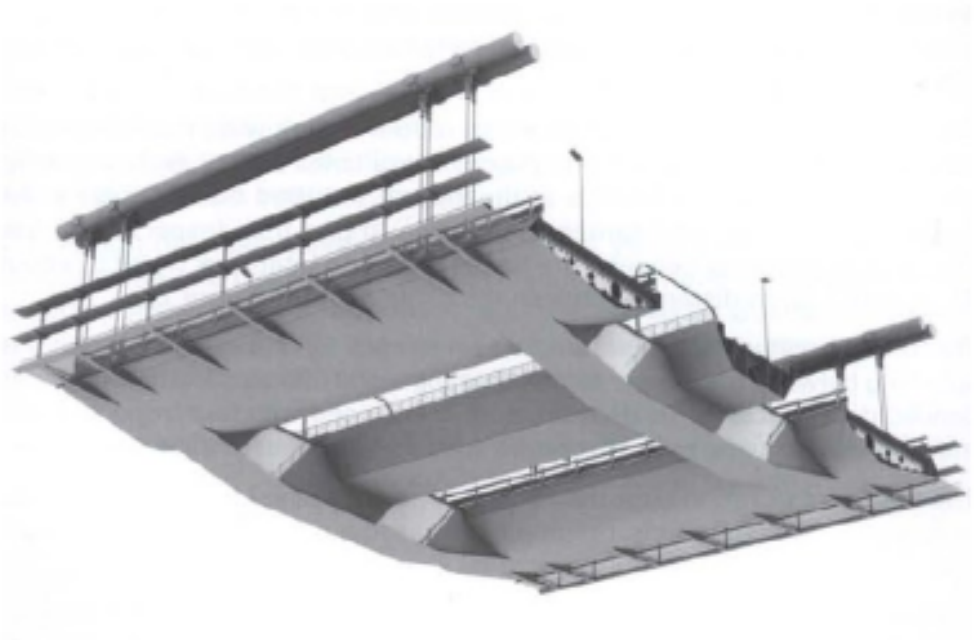
Mode 15, TS/LA, 0.138Hz



Mode 18, LA, 0.154Hz

La problematica del ponte di Messina non è il flutter ovvero la instabilità aereolastica sotto azioni del vento bisognerebbe ipotizzare uragani o trombe di aria , solitamente nello stretto il vento è praticamente inesistente ma è la sua funzione ovvero essere adibito al transito di convogli ferroviari quali treni ad alta velocità è treni merci. L'impalcato è troppo debole ha scarsa rigidezza che dipende non solo dalle caratteristiche della sezione quali materiali e geometria ma dai cavi ovvero lo schema statico essendo un ponte sospeso , le deformazioni e le oscillazioni durante il transito sono eccessive e non consentono il regolare e flusso dei treni tenendo presente che in base al numero dei convogli possono avere una lunghezza anche maggiore di 200 m mentre un treno merci anche 1000 m . Andrebbe rivisto lo schema statico ricorrendo a capriata strallate riducendo anche la altezza dei piloni o ridimensionando l'impalcato adibendo il ponte al solo traffico dei veicoli e non dei treni.





Come affermato le oscillazioni e deformazioni non dipendono dalla sezione dell'impalcato ma dallo schema statico di ponte sospeso, irrigidendo la sezione la problematica non viene risolta.

5- Flutter atriale (cardiologia)

In appunti di ingegneria strutturale parlare di patologie cardiache è fuori luogo , le menziono poiché riguardavano direttamente mia madre che dal 1994 al 2023 ha sofferto di aritmia cardiaca e per la mia attività lavorativa sono state mezzo di ricatto anteponendo le cure e terapie mediche al mio lavoro , mi vedevo costretto a portarla in ospedale e nelle graduatorie anche per insegnamento mi passavano avanti per non parlare della attività professionale della derisione sociale e pubblica . Le alterazione del battito cardiaco erano dovute a forti emozioni , poteri occulti mediatici e l'evento scatenante il disturbo o la patologia dipendeva dall'ambiente sociale e condominiale. La predisposizione esisteva intrinseca nell'apparato cardiocircolatorio ma si scatenava la aritmia ovvero la pressione aumentava fino a valori di 180- 200 la massima con battiti in numero di 140 al minuto in conseguenza di eventi stressogeni esterni .

***Il flutter atriale** è un'alterazione del ritmo cardiaco che si origina nell'atrio e si caratterizza per avere contrazioni frequenti, battito irregolare e insorgenza improvvisa. In corso di questa aritmia il disturbo nell'atrio si trasmette sino al ventricolo, arrivando a compromettere la gittata cardiaca e la circolazione sanguigna.*

*In base all'impatto sul ventricolo e alle modalità di insorgenza, **il flutter atriale** viene distinto in due forme:*

***Parossistica -** La frequenza del battito è molto alta, l'insorgere è brusco e le contrazioni atriali superano il blocco atriventricolare con notevole efficacia, di 2:1 e, in alcuni rari casi, anche di 1:1. La frequenza ventricolare, dunque, può raggiungere anche i 120-180 battiti per minuto. Questa tipologia caratterizza le manifestazioni isolate, che si verificano in un individuo sano e può durare qualche ora, al massimo qualche giorno, anche se molto spesso si esaurisce da sola. Questo esclude l'utilizzo di farmaci o di altri interventi terapeutici*

***Permanente -** La frequenza è più bassa rispetto alla forma parossistica, la comparsa è meno repentina, ma più subdola, e le contrazioni superano il blocco del nodo atrioventricolare con un'efficienza di 3:1, 4:1 e anche 5:1. Per questo motivo la frequenza ventricolare è più bassa rispetto alla forma parossistica e può non superare, in alcuni casi, i 100 battiti per minuto. La forma permanente può durare anni e passare inosservata, nonostante sia sinonimo, nella maggior parte dei casi, di una patologia associata. In questo caso si rende necessaria una terapia specifica e una terapia generale: la prima per agire contro la patologia associata, la seconda per agire contro il flutter*

Flutter atriale e fibrillazione atriale

Il flutter atriale e la fibrillazione atriale possiedono numerose somiglianze e divergenze tra loro. Per quanto concerne cause, sintomi, diagnosi e terapia, le caratteristiche del flutter atriale e della fibrillazione atriale sono molto simili.

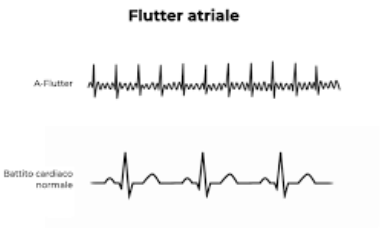
Come avviene per la fibrillazione atriale, l'insorgenza può essere difatti dovuta a cause patologiche, come le cardiopatie o l'ipertiroidismo, oppure a fattori di altra

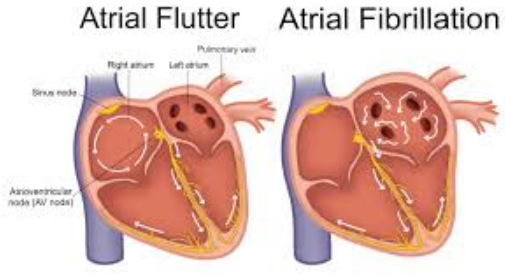
natura, come l'abuso di alcol e droghe, fumo e caffeina. Tuttavia, è possibile anche l'insorgenza spontanea in persone con cuore sano.

Sintomi di flutter atriale

Per quanto riguarda i sintomi, il soggetto colpito da flutter atriale presenta palpitazione, dispnea, sincope, dolore toracico ed astenia, anche se a volte questi disturbi sono molto lievi o addirittura assenti. Talvolta, flutter e fibrillazione atriale possono presentarsi nello stesso paziente: sono circostanze che meritano notevole attenzione in quanto sono solitamente legate alla formazione di fenomeni tromboembolici.

Un'importante differenza rispetto alla fibrillazione atriale è rappresentata dalle modificazioni del ritmo, le quali in corso di flutter atriale sono meno marcate. Se durante una fibrillazione atriale la frequenza del battito cardiaco atriale può raggiungere i 400 battiti al minuto, durante un flutter atriale questa frequenza può innalzarsi fino a un massimo di 240-300 battiti per minuto. Pertanto, ciò che cambia rispetto ad una fibrillazione atriale è anche il maggior tempo concesso al miocardio per ripolarizzarsi e tornare recettivo ad un nuovo stimolo; l'aumento del tempo di refrattarietà permette al battito di risultare meno disordinato. Un'ulteriore differenza tra flutter e fibrillazione riguarda l'impatto che queste due aritmie hanno sul ventricolo. Nel corso di esse, parte degli impulsi viene bloccato a livello del nodo atrioventricolare, il quale ferma alcuni impulsi diretti verso il ventricolo. Questo blocco è assai maggiore nel flutter atriale, tanto che la contrazione ventricolare può essere anche un quarto di quella atriale. Da questo blocco deriva la dizione di 2:1, 3:1 o 4:1, numeri che indicano il fatto che possa passare per il blocco atrioventricolare uno stimolo, rispettivamente, ogni 2, ogni 3 o ogni 4. Le conseguenze di questo blocco atrioventricolare riguardano la gittata cardiaca, la quale è più o meno influenzata in base al numero degli stimoli che raggiungono il ventricolo: maggiore è la frequenza ventricolare, più evidenti sono i sintomi. Le cause di flutter atriale sono numerose e, come per la fibrillazione atriale, i fattori spesso più determinanti sono le cardiopatie.





Mia madre deceduta lo scorso anno ha convissuto con la aritmia e fibrillazione per 29 anni sotto regolare controllo cardiologico (aveva una alterazione ventricolare)assumendo farmaci che avevano la funzione di prevenire la trombosi ovvero che il sangue si coaguli ed ostruisce le vene o arterie. Inizialmente veniva sottoposta a trattamenti che avevano la funzione di riportare la alterazione del battito alla normalità , diete iposaline per ridurre la pressione arteriosa. La migliore terapia è la tranquilità ovvero il benessere sociale economico ect la eliminazione di tutti quei fattori stressogeni che provocano mal di cuore legati ad ambienti sociali malsani e dannosi per la salute, anche se si hanno problematiche intrinseche all'organo stesso

6 - Conclusioni

Il flutter viene sempre additato come il responsabile della instabilità e crollo dei ponti sospesi , ovvero per azioni del vento l'impalcato subisce un fenomeno di instabilità flessotorsionale , una enfasi legata soprattutto al video del crollo del Takoma Bridge degli Stati Uniti riproposto più volte in TV; Negli Stati Uniti vi sono numerosi ponti sospesi come in tutto il mondo la azione del vento è eccezionale dipende dalla natura dagli eventi si può avere calma piatta e poi sullo stretto un pò di brezza un venticello non guasta vista la calura estiva . Le problematiche dei ponti sospesi come detto sono relative allo schema statico , per cui quando la luce diventa proibitiva al fine di garantire stabilità , sicurezza tutelarsi nei confronti degli stati limite di deformazione e vibrazione che ne consentono il corretto utilizzo è necessario modificare la struttura del ponte ed il suo funzionamento statico migliorandone anche il design e riducendo l'impatto ambientale . Mitico è il ponte di Brooklin a NEW YORK che rappresenta un simbolo per la stessa città la cui luce è 1834 costruito alla fine del 1800, mentre per il Ponte di Messina L = 3300 m



Questi appunti sono stati redatti traendo spunto da bibliografia reperibile on- line e da un volume acquistato nel 1995; per me l'argomento è nuovo ma della dinamica strutturale e la instabilità flesso torsionale ho una ottima conoscenza e padronanza.

Bibliografia

Progettazione e costruzione di ponti :Prof. Mario Paolo Petrangeli
Flutter analysis of long -span suspension bridges : Ing. Stella Hang
Flutter analysis methods for bridges stabilized with eccentric wings :Prof Uwe Starossek Prof. Rudolf T. Starossek
L'instabilità per flutter nei ponti sospesi: analisi nel dominio del tempo Ing. Silvia Bertinat

Le travi composte

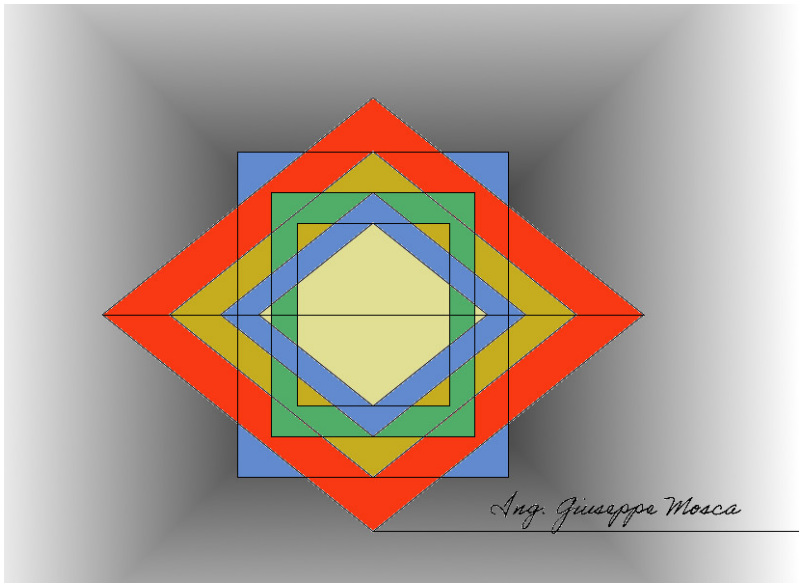
1- Introduzione

2- La trave legno-cls

3-La trave acciaio -cls

4- La trave precompressa con soletta in cls

5- Conclusioni



Ing. Giuseppe Mosca

N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

Per le travi i solai al fine di limitare le deformazioni e di ridurre lo stato tensionale si pone il problema di avere delle sezioni con caratteristiche inerziali sempre più elevate , per cui si preferisce accoppiare materiali differenti ovvero aumentare la portanza dei solai mediante la realizzazione di una soletta superiore in calcestruzzo armato ; tali elementi vanno resi collaboranti ovvero non devono avere un comportamento indipendente con deformate che scorrono le une sulle altre , vanno predisposti dei collegamenti metallici deformabili o rigidi che consentono la trasmissione della forza di scorrimento e quindi delle azioni tangenziali , in modo che la inerzia della struttura composta sia quella complessiva e non la somma delle singole inerzie:

$I = I_1 + I_2 \quad I = I_1 + I_2 + A_1 * d_1^2 + A_2 * d_2^2$

E' evidente che si possono avere due comportamenti limite, il comportamento della nostra sezione composta funzione di un coefficiente di trasmissione del taglio sarà intermedio tra i due.

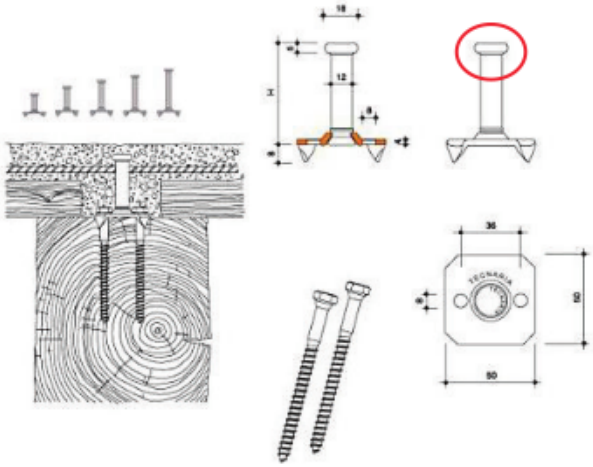
2- La trave legno-cls

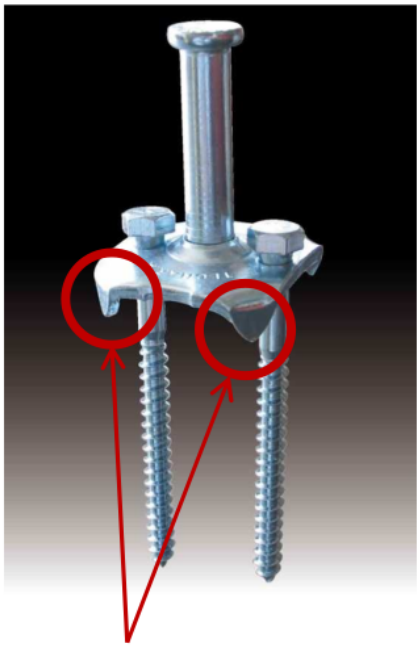
Le connessioni tra soletta di calcestruzzo e trave in legno possono essere realizzate tramite
***-viti o chiodi** infissi nel legno e sfalsati anche inclinati per ottimizzare il comportamento a compressione*
***-elementi metallici** infissi nel legno e annegati nella soletta di calcestruzzo*
***-connettori ed intagli** inseriti nel legno per aumentare l'ingranamento nel cls*
***-pioli** utilizzati nelle struttura acciaio calcestruzzo*

riportiamo in figura alcune tipologie di connettori

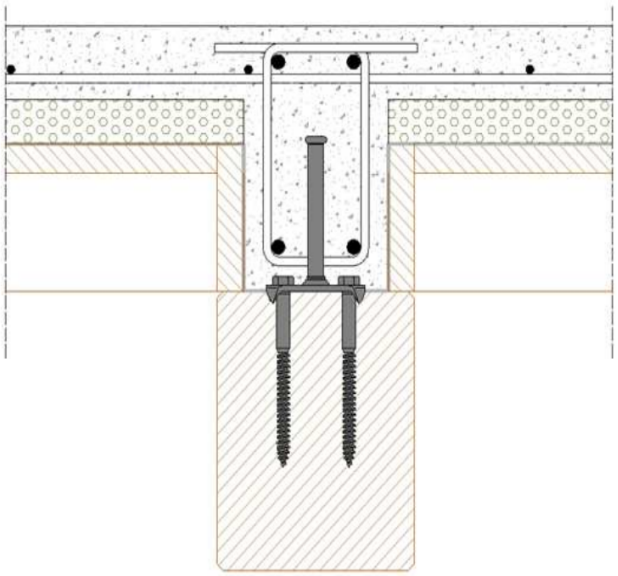




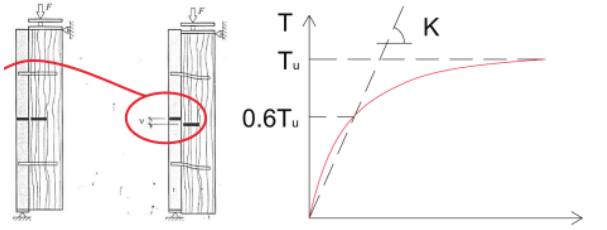




L'armatura complementare

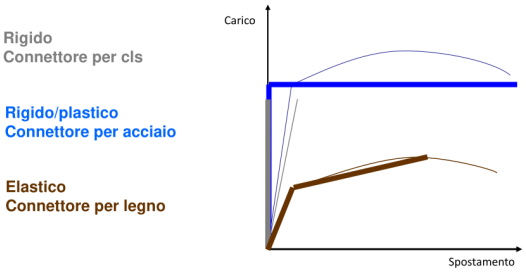


I sistemi di connessione sono sempre di tipo deformabile e permettono lo scorrimento fra gli elementi connessi ; il legame taglio T spostamento è riportato in figura



K è la rigidezza elastica secante della connessione, calcolata al 60% del taglio ultimo sperimentale; è il valore da utilizzare nelle verifiche di resistenza e rigidezza.

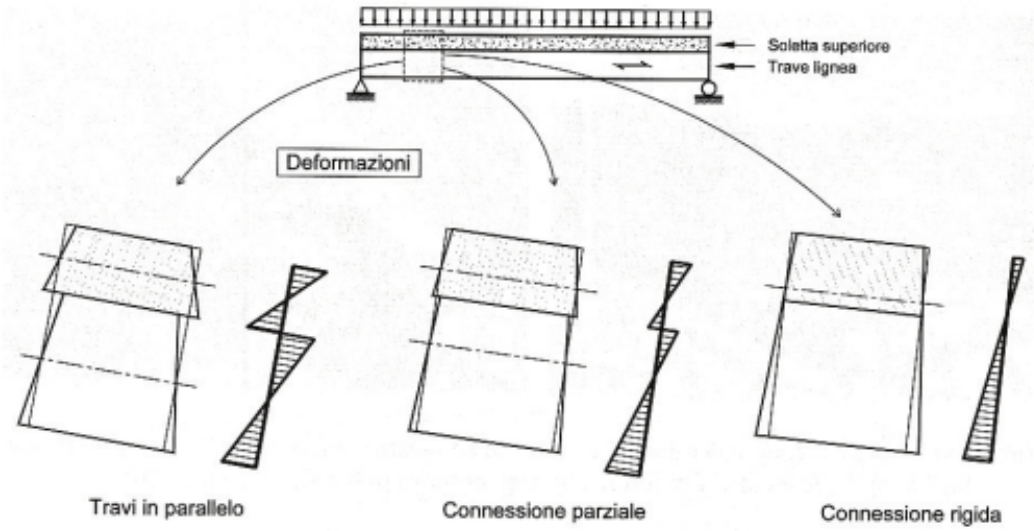
COMPORTAMENTO DELLA CONNESSIONE



La connessione ha lo scopo di riprendere lo sforzo di scorrimento tra i due elementi ; l'efficienza della connessione è tanto migliore quanto più rigido è il collegamento ovvero quanto più piccoli sono gli spostamenti relativi tra i due elementi. Il comportamento reale è intermedio tra due comportamenti limite :

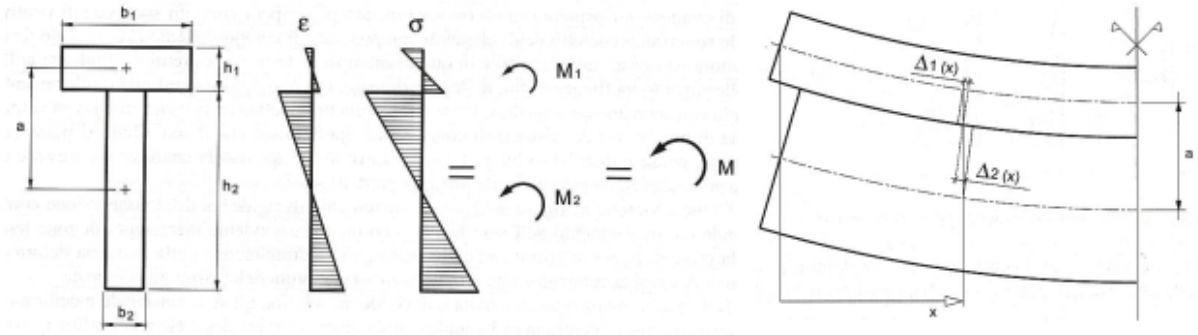
-Connessione di rigidezza nulla K = 0
- Connessione di rigidezza infinita K = ∞

Il parametro K definisce la rigidezza della connessione per unità di lunghezza; un aumento della efficienza della connessione comporta un innalzamento dell'asse neutro passando da 2 elementi indipendenti , a due elementi connessi ed infine ad una trave monolitica con un solo asse neutro così come riportato in figura.



-Connessione di rigidezza nulla K = 0

Per connessione con rigidezza nulla le travi sono semplicemente sovrapposte una all'altra per congruenza le due travi hanno la stessa curvatura



Il momento di inerzia complessivo come la singola rigidezza sono pari alla somma delle inerzie

$(E*I)_{eq} = E_1*I_1 + E_2*I_2$ *; la curvatura* $\chi = \chi_1 + \chi_2$

$M/(E*I)_{eq} = M_1/(E_1*I_1) = M_2/(E_2*I_2)$

$M_1 = M*(E_1*I_1)/(E*I)_{eq}$; $M_2 = M*(E_2*I_2)/(E*I)_{eq}$;

Lo scorrimento all'interfaccia è dato dal prodotto della rotazione per la semialtezza della trave $\delta = \varphi*h/2$ $\varphi(x) = \int M/(EI)*dx$

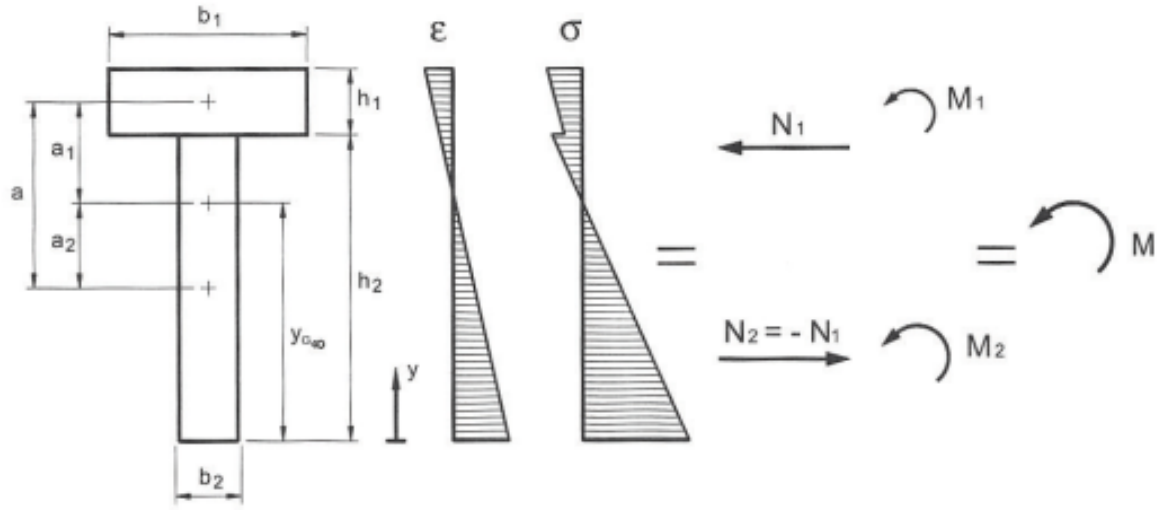
$\delta = \delta_1 + \delta_2 = h_1/2*\int M/(E*I)_{eq}*dx + h_2/2*\int M_2/(E*I)_{eq}*dx$

per una trave appoggiata lo scorrimento max sull'appoggio in mezzeria è nullo

$M(x) = Q*L/2*X - Q*X^2/2$ $\delta = Q*a/(24*EI)_{eq}*(L^3 + 6*L*X^2 + 4*X^3)$
$a = (h_1+h_2)/2$

-Connessione di rigidezza infinita K = ∞

Per connessione di rigidezza infinita il comportamento della trave composta è monolitico ovvero è valido il principio di conservazione delle sezioni piane e ad essa si può applicare sia il metodo con comportamento elastico lineare che il metodo con diagramma tensioni deformazioni bilatero.



Per il calcolo di queste sezioni miste si definiscono dei coefficienti di omogeneizzazione dati dal rapporto tra i moduli di elasticità normale $n = E_C/E_L$ solitamente si assume un valore compreso tra 4 ÷ 6 tenendo anche presente le risultanze sperimentali e si fa riferimento ad una sezione omogenea per la quale si determina l'asse neutro il momento di inerzia e le tensioni
$\sigma_c = n*M/I*y$; $\sigma_L = M/I*y$;

una trattazione che faremo per le sezioni miste acciaio calcestruzzo.
La posizione del baricentro pesato rispetto ai moduli di elasticità :

$Y_G*\sum E_i*A_i = E_1*A_1*(h_2+h_1/2)+E_2*A_2*h_2/2$

$Y_G = [E_1*A_1*(h_2+h_1/2)+E_2*A_2*h_2/2]/(E_1*A_1+E_2*A_2)$

Le distanze dei singoli baricentri dal baricentro globale

$d_1=(h_2 - Y_G)+h_1/2$; $d_2 = Y_G - h_2/2$;

La rigidezza flessionale equivalente

$(E*I)_{eq}=E_1*(I_1+A_1*d_1^2)+E_2*(I_2+A_2*d_2^2)$;

La tensione $\sigma = E*\varepsilon$

nel cls $\sigma = E_C * M/(E*I)_{eq}*Y$

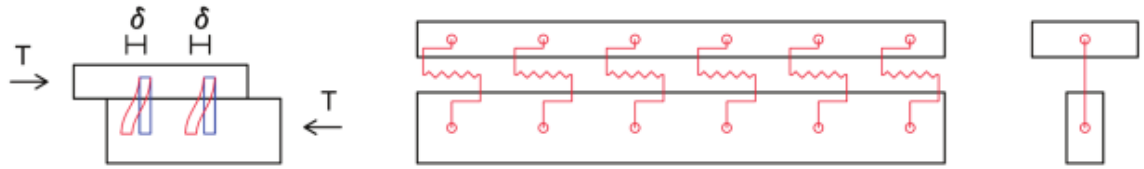
nel legno $\sigma_L = E_L * M/(E*I)_{eq}*Y$

la sollecitazione di scorrimento nella interfaccia $S = \tau*b_1$ *la tensione tangenziale se ricordiamo la trattazione del taglio di jourawsky dipende dalle dσ e quindi dalla variazione di sforzo normale*

la tensione tangenziale $\tau = V/I*S_X/b$ $S = V*S_X/I$

- Connessione parziale o semirigida

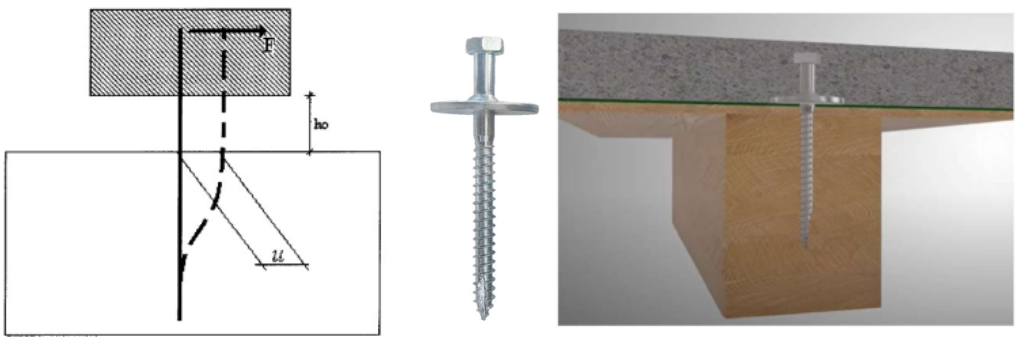
Il funzionamento della trave composta viene ricondotto a quello di 2 elementi in parallelo collegati mediante una connessione deformabile ad elasticità lineare di rigidezza K;

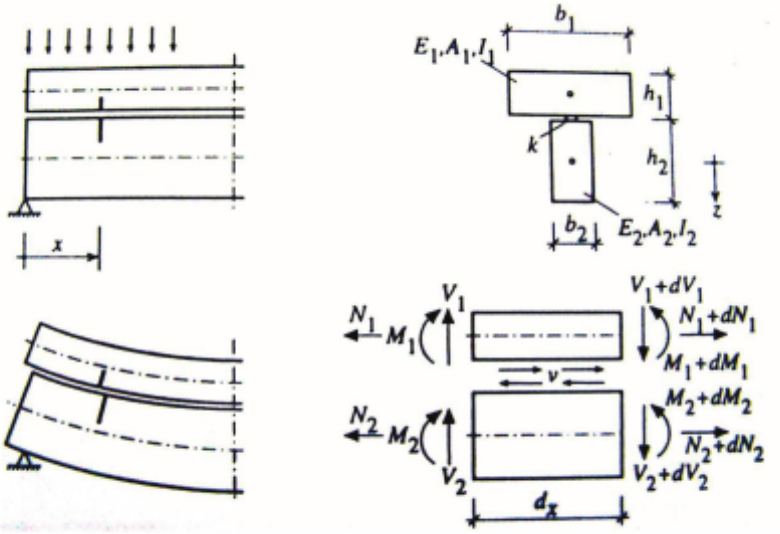


nello studio della sezione composta si fanno le seguenti ipotesi :

- *Comportamento elastico-lineare dei materiali*
- *Legge forza-scorrimento per i connettori elastico-lineare*
- *Spostamenti e deformazioni "piccole" (teoria del I ordine)*
- *Stessa curvatura per ogni elemento*
- *Conservazione sezioni piane per ogni elemento*
- *Connessione uniformemente distribuita lungo tutta la trave*
- *Caratteristiche geometriche costanti lungo l'asse della trave*

La rigidezza elastica uniforme si può assumere pari alla rigidezza puntuale divisa per il passo dei connettori $K = 12*EI/h^3$
$k = K/s$ *s interasse dei connettori*

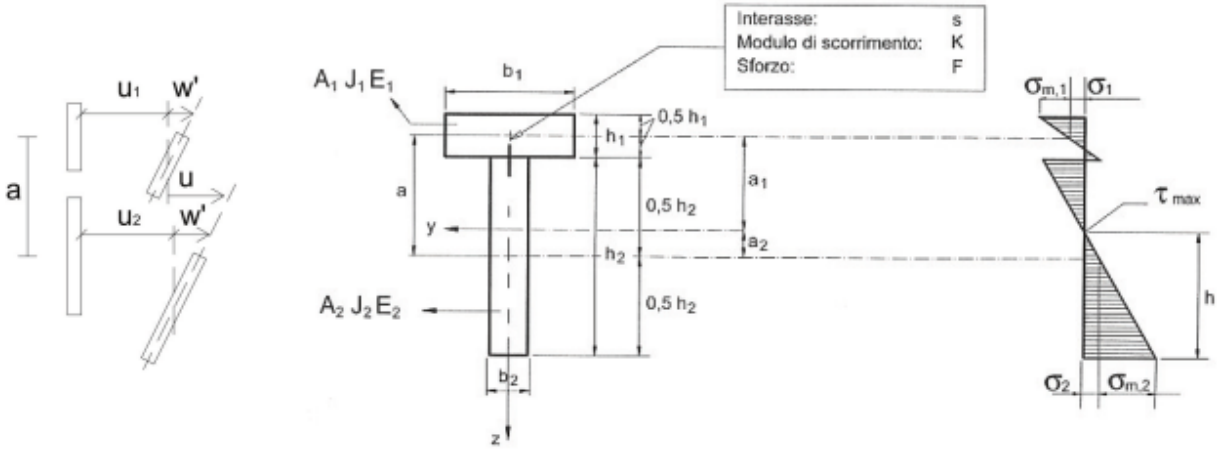




La trattazione delle travi composte assemblate meccanicamente indicati con 1 e 2 i due elementi imponendo

$W_1(x)=W_2(x)$; $W''_1(x)=W''_2(x)$; $M_1(x)= - E_1*I_1*W''_1(x)$; $M_2(x)= - E_2*I_2*W''_2(x)$;

$N_1(x) = \int_{A1} \sigma_z dA$; $N_2(x) = \int_{A2} \sigma_z dA$;



Per una trave di semplice appoggio le soluzioni sono fornite dall'eurocodice 5 attraverso il metodo Gamma

$(EI)_{eff} = E_1*I_1 + E_2*I_2 + \gamma * (E_1*A_1*a_1^2 + E_2*A_2*a_2^2)$

i coefficienti di trasmissione del taglio

$\gamma=1/[1+\pi^2*(E_1*A_1*E_2*A_2)/(E_1*A_1+E_2*A_2)*(s_{eq}/(K*L^2)]$

L luce effettiva della trave composta

K rigidezza del connettore $K = K_{Ser}$ *SLE* $K = 2/3*K_{ser}$ *SLU*
s_{eq} *interasse tra i connettori*

Le tensioni normali

$\sigma_1 = \gamma*E_1*M/(EI)_{eff}*a_1$; $\sigma_{m1} = 0{,}5*h_1*E_1*M/(EI)_{eff}$;

$\sigma_2 = \gamma*E_2*M/(EI)_{eff}*a_2$; $\sigma_{m1} = 0{,}5*h_2*E_2*M/(EI)_{eff}$;

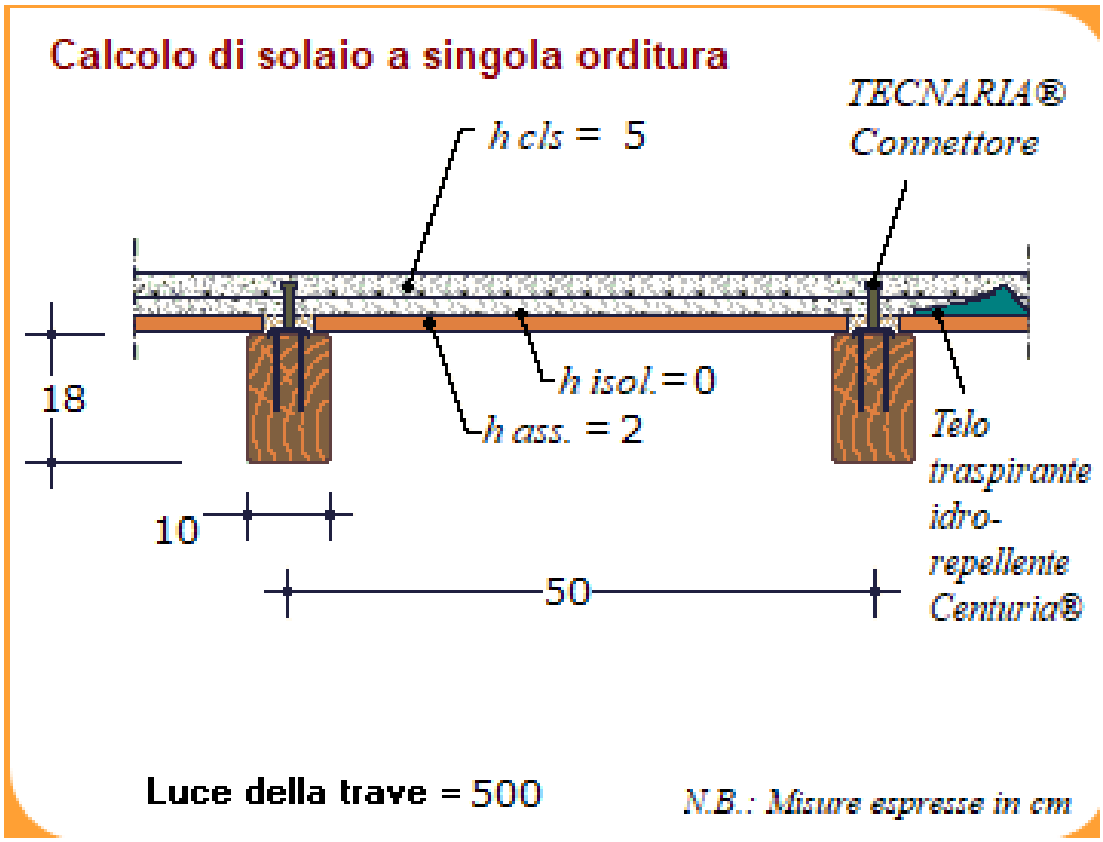
La forza di scorrimento nel connettore

$F = s*E_1*A_1*\gamma*a_1*V/(EI)_{eff}$;

la tensione tangenziale massima $\tau = E_2/(EI)_{eff}*h^2/2*V$

la freccia della nostra trave $f = 5/384*Q*L^4/(EI)_{eff}$

Riportiamo il calcolo di un ***solaio misto legno calcestruzzo*** *realizzato attraverso un software di calcolo ;*
Civile abitazione
Carico accidentale 200 daN/mq
Incidenza tramezzi 100 daN/mq
Carichi permanenti (massetto, pavimento) 100 daN/mq
Luce 5 metri



Solaio a semplice orditura con assito carotato
Trave puntellata

___ GEOMETRIA ___
- Spessore soletta: 5 cm
  Spessore assito/pianelle/tavelle: 2 cm
  Spessore isolante: 0 cm
- Interasse travi: 50 cm
  Base travi: 10 cm
  Altezza travi: 18 cm
  Luce travi: 500 cm
- Limite freccia iniziale carichi variabili: L/ 300 = 16.67 mm
  Limite freccia attiva: L/ 1: Finiture fragili = 10.00 mm
  Limite freccia comb. quasi perm. a tempo infinito: L/ 250 = 20.00 mm

___ CARICHI ___
- Permanenti portati per metro quadrato
  Carico iniziale 1: 0.00 kN/m²
  Carico iniziale 2: 0.40 kN/m²
  1° carico di tipo fragile: 0.80 kN/m²
  Carichi successivi : 0.80 kN/m²
- Totale permanenti strutturali: 1.55 kN/m²
  Totale permanenti non strutturali: 2.00 kN/m²
  Totale variabili: 2.00 kN/m²
- Carico SLU a metro lineare: 3.81 kN/m

___ MATERIALI ___
- Legno - Tipo : C24 secondo EN338:2016
  Resistenza a flessione caratteristica f_m,k = 24.0 N/mm²
  kh a flessione = 1.00
  Resistenza a trazione caratteristica f_t,0,k = 14.5 N/mm²
  kh a trazione = 1.00
  Resistenza a taglio caratteristica f_v,k = 4.00 N/mm²
  Modulo di elasticità medio E_0,m = 11000 N/mm²
  Peso specifico medio r_m = 4.2 kN/m³
  Coeff. modificazione azioni variabili K_mod = 0.80
  Fattore di deformazione K_def = 0.60
  Coefficiente di sicurezza g_m = 1.50
  Riduzione larghezza per verifica a taglio kcr =0.67
- Classe calcestruzzo: C32/40 - Rck40
  Resistenza caratteristica cilindrica f_c,k = 32.0 N/mm²
  Resistenza caratteristica a trazione 5% f_ctk = 2.1 N/mm²
  Modulo elasticità E = 33346 N/mm²
  Peso specifico r = 25.0 kN/m³
  Coefficiente di viscosità F = 2.50
  Coefficiente di sicurezza g_m = 1.50
- Connettore: Tecnaria CTL BASE 12/ 60 posato su trave
  Resistenza caratteristica connettore F_k = 17200 N
  Rigidezza connettore in esercizio K_ser = 17900 N/mm
  Rigidezza connettore ultima K_u = 9990 N/mm
  Coefficiente di sicurezza g_mk = 1.50
- Altri parametri
  Peso specifico assito/pianelle/tavelle: 4.20 kN/m³
  Peso specifico isolante: 0.25 kN/m³
  Coefficiente parziale carichi permanenti strutturali g_G,1 = 1.30
  Coefficiente parziale carichi permanenti non strutturali g_G,2 = 1.30
  Coefficiente parziale carichi variabili g_Q = 1.50
  Coefficiente carichi quasi permanenti Y_2 = 0.30
  Appoggio del tavolato su trave: 2.0 cm
  Resistenza di progetto armatura complementare fyd: 391.3 N/mm²

_____ RISULTATI

Connettori Tecnaria BASE 12/ 60
posati su trave con tavolato carotato

Connettori a spaziatura costante: 19.8 cm
Numero di connettori per trave: 26
Numero di connettori a metro quadrato: 10.40
Armatura minima nel raccordo: 0.00 cm²/trave nella parte inferiore del raccordo.
Armatura minima nella soletta: 0.23 cm²/trave nella parte inferiore della soletta.
Armatura trasversale nella soletta: 0.00 cm²/m

_____ VERIFICHE

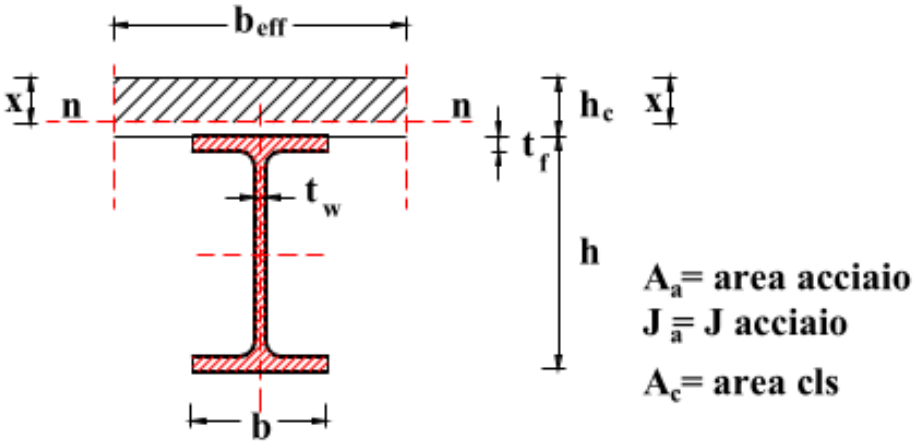
Larghezza soletta collaborante: 50.0 cm
- Larghezza interruzione/carotaggio tavolato: 6.5 cm

___ STATO LIMITE ULTIMO ___
- Momento massimo: 11.90 kNm
  Taglio massimo: 9.52 kN
- Verifiche a tempo zero
  CLS - tensione max: 7.23 N/mm² <= 18.13 N/mm²
  CLS - tensione min: -2.67 N/mm²
  LEGNO - tensoflessione: 0.87 <= 1.00
  LEGNO - taglio: 0.75 N/mm² <= 2.13 N/mm²
  CONN. - taglio: 9025 N <= 9173 N
- Verifiche a tempo infinito
  CLS - tensione max: 5.79 N/mm² <= 18.13 N/mm²
  CLS - tensione min: -1.16 N/mm²
  LEGNO - tensoflessione: 0.90 <= 1.00
  LEGNO - taglio: 0.77 N/mm² <= 2.13 N/mm²
  CONN. - taglio: 9164 N <= 9173 N

___ STATO LIMITE DI ESERCIZIO ___
EJ a tempo zero: 2424.9 kNm²
EJ a tempo infinito: 1329.7 kNm²
Freccia iniziale car var: 3.36 mm <= 16.67 mm
Freccia attiva: 8.09 mm <= 10.00 mm
Freccia a tempo infinito: 12.70 mm <= 20.00 mm

3-La trave acciaio -cls

Eseguiamo inizialmente un calcolo nella ipotesi di elasticità lineare per i due materiali considerando la trave monolitica ovvero con connessione avente rigidezza infinita



si definisce un coefficiente di omogeneizzazione n = Es/Ec e si determina la posizione dell'asse neutro ovvero la X

per $X < h_C$

$b_{eff}*X^2/2 - n*As*(h/2+h_C -X) = 0$

$I = n*[I_P + A*(h/2+h_C -X)^2] + b_{eff}*X^3/3$

per $X \geq h_C$

$Ac*(X-hc/2) - n*As\ (h/2+hc-X) = 0$

$I = n*\ [I_P + A*(h/2+h_C -X)^2]\ + b_{eff}*hc^3/12 + b_{eff}*hc*(X-hc/2)^2$

Le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio

$\sigma_S = M/I*(h+hc-X)$; $\sigma_c = M*X/(n*I)$;

Es = 2100000 daN/cmq ;

Ec = 305000 daN/cmq

$n = Es/Ec = 6,9 \approx 7$

Verifica allo stato limite ultimo SLU

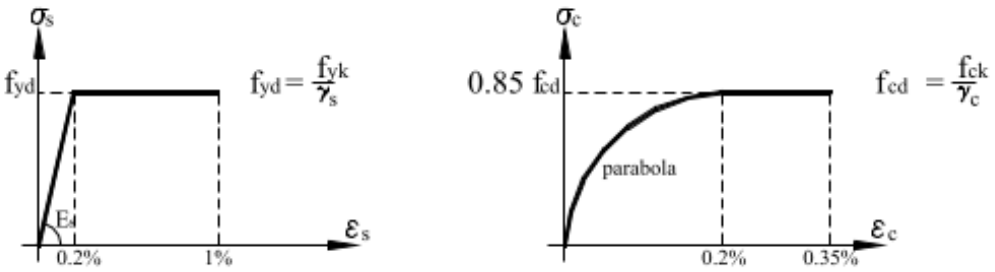
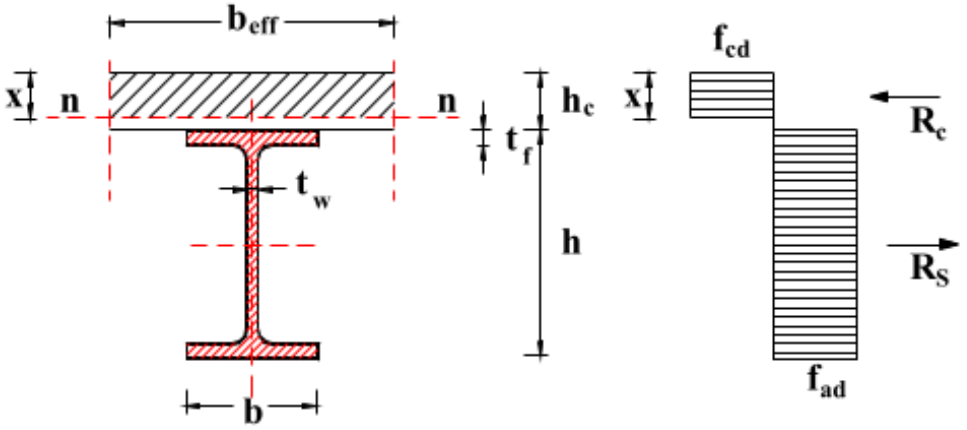


Fig. 4.1: legame costitutivo di progetto per il cls e per l'acciaio



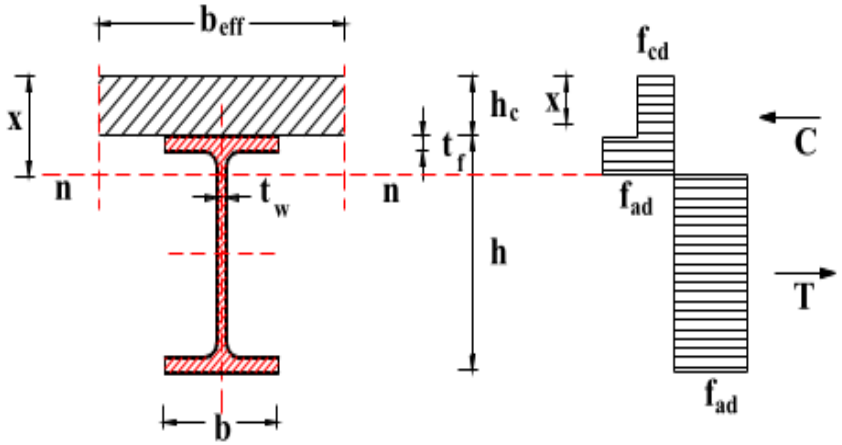
La verifica è immediata dall'equilibrio delle tensioni per l'asse neutro che taglia la soletta

*C = 0,85*fcd *0,8*X*b_{eff} ; T = fyd*As*

*X = Fyd*As/(0,85*fcd *b_{eff})*

*Mpl = 0,85*fcd *b_{eff}*X^2/2+ fyd *As*(/2 +hc-x)*

se l'asse neutro è più in basso ovvero x <hc



*C =0,85*fcd *hc*b + fyd *Asc ; T = fyd*(As -Asc)*

Asc area del profilo compressa par a $b*t_f + t_w*(X-hc-t_f)$

*0,85*fcd *hc*b + fyd *Asc = fyd*(As -Asc)*

*il momento plastico Mpl = C*d = T*d*

d braccio della coppia interna

-Verifica a taglio

*Il taglio viene affidato alla trave in acciaio Vsd < Vrd = A*fyd/√3*

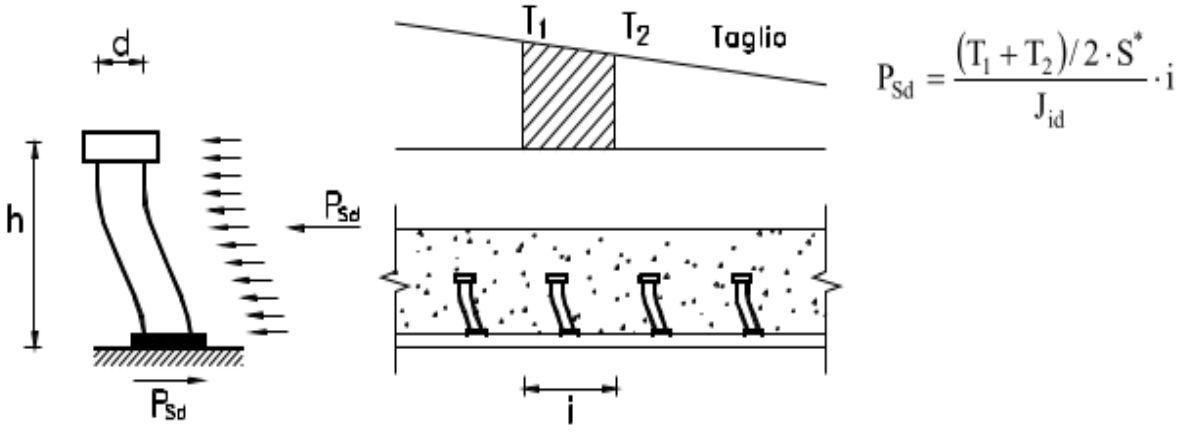
A area dell'anima del profilo τ_{RD} =fyd/√3

-Verifica della freccia

***δ** = 5/384*q*L⁴/(Es*I) ≤ L/250*

la verifica viene condotta allo stato limite di esercizio

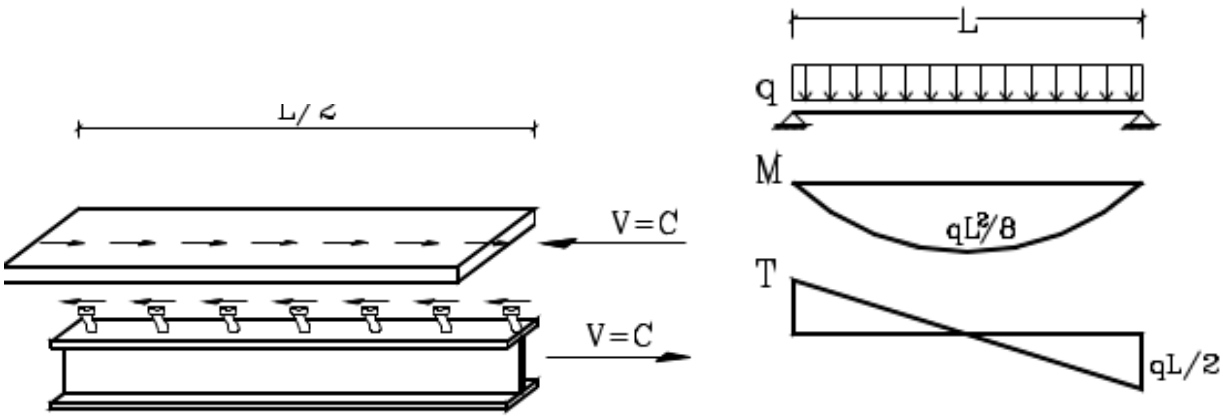
-Connettori



I connettori vanno disposti a passo costante seguendo il diagramma del taglio in ogni caso devono essere in grado di resistere alla forza di scorrimento

*V =∫τ*b*dx = T/I*Sx/b*b*L/2= T/I*Sx*L/2*

La forza di scorrimento V è pari alla risultante C degli sforzi di compressione nella soletta



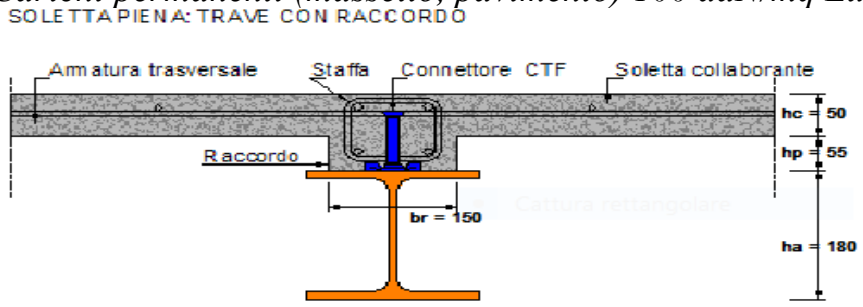
La verifica dei connettori

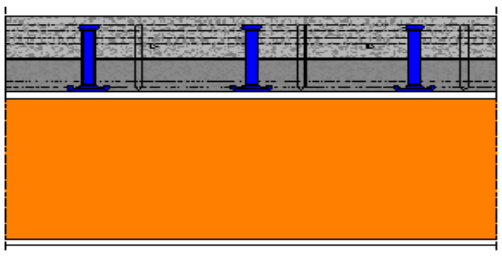
$V < n*P_{RD}$; n numero dei connettori tra 0 ed L/2 seguendo il diagramma del taglio

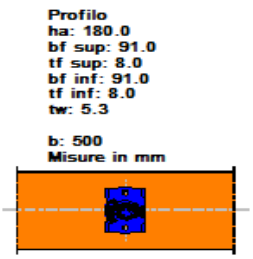
P_{RD} resistenza del connettore è il più piccolo dei seguenti valori
$P_{RD} = 0.8*f_u*(\pi* d^2/4)/\gamma_V$; $P_{RD} = 0{,}29*\alpha*d^2*\sqrt{(f_{ck}*E_{cm})}/\gamma_V$;
$\alpha = 1$ per $h/d > 4$; $\alpha = 0{,}2*[(h/d)+1]$; per $3 \leq h/d \leq 4$

h altezza del piolo
d diametro del piolo
f_u resistenza a trazione del piolo
f_{ck} resistenza caratteristica cilindrica del cls
E_{cm} modulo secante del cls
γ_V coefficiente parziale 1,25

*Riportiamo il calcolo di un **solaio misto acciaio calcestruzzo***
Carico accidentale 200 daN/mq Incidenza tramezzi 100 daN/mq
Carichi permanenti (massetto, pavimento) 100 daN/mq Luce 5 metri







Tipologia

Soletta collaborante con raccordo
Trave puntellata
Trave in semplice appoggio con carichi uniformemente distribuiti
Ambiente secco

Coefficienti di sicurezza:
EN 1994-1-1+NA

Azioni - Permanenti strutturali:	1.30
Azioni - Permanenti non strutturali:	1.30
Azioni - Variabili:	1.50
Materiali - Acciaio:	1.05
Materiali - Calcestruzzo:	1.50
Materiali - Connettori:	1.25
Materiali - Lamiera grecata:	1.10
Materiali - Acciaio per barre:	1.15

Limite all'inflessione delta 2: L / 350
Limite all'inflessione finale: L / 250

Geometria

Luce di calcolo:	500.0 cm
Interasse travi:	50.0 cm
Spessore soletta:	5.0 cm
Base efficace:	50.0 cm
Altezza raccordo (hp):	5.5 cm
Larghezza raccordo (br):	15.0 cm
Profilo:	IPE 180
ha:	180.0 mm
bf:	91.0 mm
tf:	8.0 mm
bfi:	91.0 mm
tfi:	8.0 mm
tw:	5.3 mm
r0:	9.0 mm
r1:	0.0 mm
Area:	2395.0 mm2
Iy:	1317.0 cm4
Wy Sup:	146300.0 mm3
Wy Inf:	146300.0 mm3
W Ply:	166400.0 mm3
Acciaio	S275
fy:	275 N/mm2
Es:	210000 N/mm2
Calcestruzzo:	C32/40
fck:	32 N/mm2
Rck:	40 N/mm2
Densità:	24.00 kN/m3
E cm:	33346 N/mm2

Carichi

Peso proprio:	1.97 kN/m2
Altri p.p.:	0.00 kN/m2
Sottofondo:	0.70 kN/m2
Pavimento:	0.30 kN/m2
Tramezzi:	1.00 kN/m2
Altri perm.:	0.00 kN/m2
Variabili:	2.00 kN/m2

Fase 1+2 - sezione mista - SLU - STATO LIMITE ULTIMO

Classe sezione mista:	1
Calcolo elastico	
Azioni:	4.08 kN/m
Posizione asse neutro:	11.27 cm
Altezza totale:	28.50 cm
Momento sollecitante - MEd:	12.8 kNm
Momento resistante - MRd:	17.0 kNm
Verifica momento:	0.75
Taglio sollecitante - VEd:	10.2 kNm
Taglio resistente - VRd:	144.3 kN
Verifica taglio:	0.07

Fase 1+2 - SLS - STATO LIMITE DI SERVIZIO

Delta 0 - pre-monta iniziale:	0.0 mm
Delta 1 - Sezione: mista - Carichi: P.p. + Perm.:	1.3 mm
Delta 2 - Sezione: mista - Carichi: Var.+ viscosità:	1.3 mm
Delta 2 da ritiro:	0.0 mm
Delta 2 totale:	1.3 mm = L / 3992
Delta finale totale:	2.6 mm = L / 1932
Asse neutro elastico dall'estradosso:	11.3 cm
Coefficiente di omogeneizzazione istantaneo:	6.30
Momento di inerzia sezione omog. istantaneo:	5759.2 cm4
Coefficiente di omogeneizzazione - n:	12.60
Momento di inerzia sezione omog.:	4469.1 cm4
Incremento freccia per interazione incompleta - i:	1.00
Frequenza fondamentale naturale:	14.3 Hz
calcolata con combinazione frequente. Psi1=	0.5

Fase 1+2 - sezione mista - Connessione

Connessione elastica	
Compressione nella soletta in calcestruzzo:	
Nc data dai connettori posizionati(kN):	74
Nc,f relativa al completo ripristino di resistenza(kN):	603
Nc,el relativa al massimo momento elastico Mel,Rd (kN):	297
Tipo Connettore:	CTF 12/90
Altezza:	90 mm
Resistenza del connettore - Prd:	37.10 kN
Coefficiente riduttivo k :	1.00
Resistenza connessione PRd * k:	37.10 kN
Connettore duttile.	
Distribuzione connettori elastica variabile	

Distribuzione uniforme:

L= 500.0 cm Numero connettori= 8 Passo= 62.5 cm

Distribuzione variabile (in alternativa):

Settore a sinistra:

L= 125.0 cm Numero connettori= 2 Passo= 62.5 cm

Settore centrale:

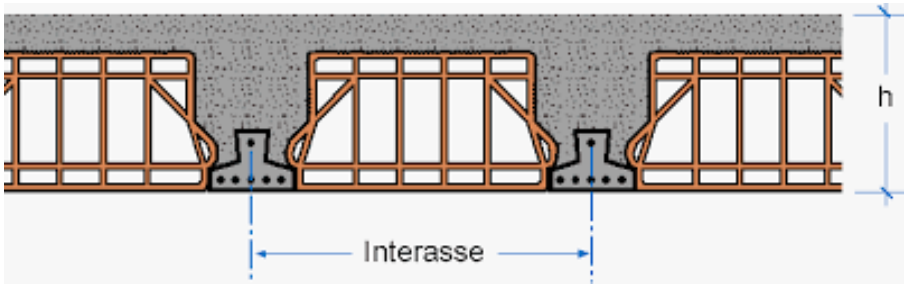
L= 250.0 cm Numero connettori= 5 Passo= 63.0 cm

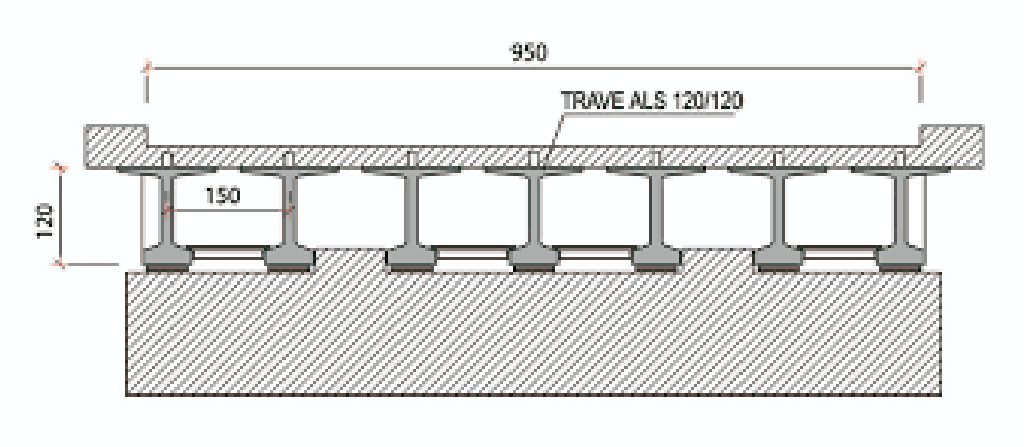
Settore a destra:

L= 125.0 cm Numero connettori= 2 Passo= 62.5 cm

4- La trave composta precompressa con soletta in cls

Questa tipologia strutturale la troviamo nei solai degli edifici in cemento armato e negli impalcati da ponte



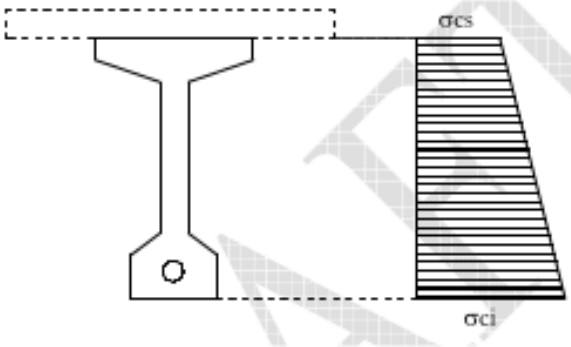


Il calcolo viene eseguito ipotizzando un comportamento monolitico ovvero che la connessione tra trave precompressa e soletta di cls sia rigida , di conseguenza il coefficiente di trasmissione del taglio γ= 1. Vengono eseguite tre tipi di verifiche corrispondenti ad altrettante fasi di costruzione :

- *Verifica della trave all'atto della precompressione*
- *Verifica della trave al getto della soletta*
- *Verifica della struttura composta in fase di esercizio carichi permanenti+variabili*

La verifica viene eseguita in fase elastica distinguendo tra una trave non puntellata che quindi porta la soletta ed una trave puntellata dove la soletta è collaborante per la fase 2.

Verifica della trave all'atto della precompressione *(fase di tiro)*



Le caratteristiche geometriche della sezione sono quelle della trave precompressa omogeneizzata

$\sigma_{tr;i} = (N_o - \Delta N_P)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P)*e/W_i - M_G/W_i$;

$\sigma_{tr;i} = (N_o - \Delta N_P)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P)*e/W_s - M_G/W_s$;

il momento esterno M_G è soltanto quello dovuto al peso proprio
N_0 sforzo di precompressione ; e eccentricità del cavo risultante
ΔN_P perdite di tensione in questa fase iniziale
W modulo di resistenza inferiore e superiore della trave precompressa

Verifica della trave al getto della soletta
Ipotizziamo che la trave non sia puntellata e che le cadute di tensione avvengano prima del getto della soletta di cls

$\sigma_{tr;i} = (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)*e/W_i - (M_G+Ms)/W_i$;

$\sigma_{tr;i} = (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)*e/W_s - (M_G+Ms)/W_s$;

il momento Ms è relativo al peso della soletta di calcestruzzo
ΔN_C cadute di tensione nei cavi

se la trave è puntellata le formule sono analoghe i moduli di resistenza e l'area sono quelli relativi alla sezione composta

Verifica della struttura composta in fase di esercizio carichi permanenti+variabili

$\sigma_{tr;i} = (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)*e/W_i - (M_G+Ms)/W_i - M_Q/W_i$

$\sigma_{tr;i}s = (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)/A_{id} + (N_o - \Delta N_P - \Delta N_C)*e/W_s - (M_G+Ms)/W_s - M_Q/W_s$

il diagramma delle tensioni per trave puntellata e non puntellata nelle relative fasi

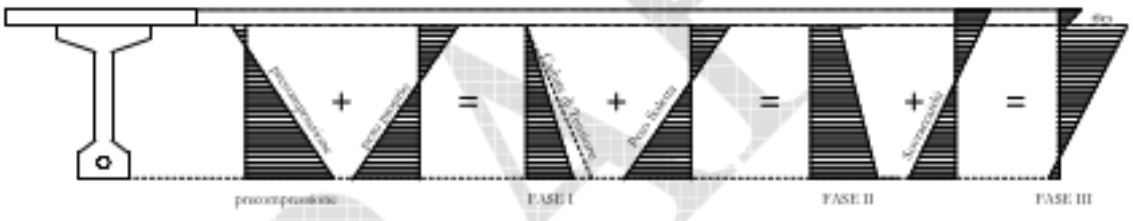


Figura 5.18 – Trave non puntellata - Stato tensionale nelle varie fasi di verifica

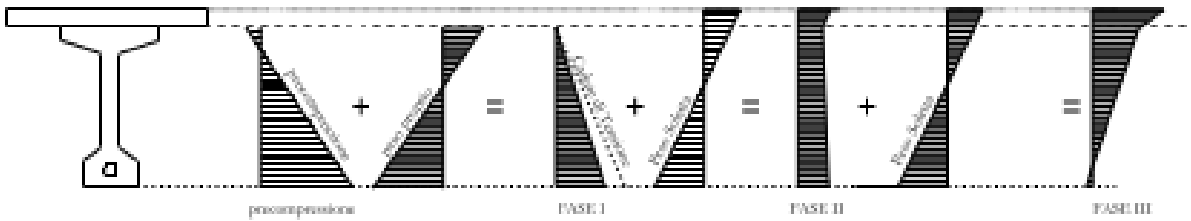


Figura 5.19 – Trave puntellata - Stato tensionale nelle varie fasi di verifica

Il collegamento tra la trave in c.a.p. e la soletta viene realizzato con barre metalliche valutando lo scorrimento $V = \int \tau * b * dx = T/I * Sx/b * b * L/2 = T/I * Sx * L/2$
I momento di inerzia della sezione composta , la resistenza a taglio delle n barr e metalliche $V \leq n * fyd/\sqrt{3} * (\pi * d^2/4)/\gamma_V$

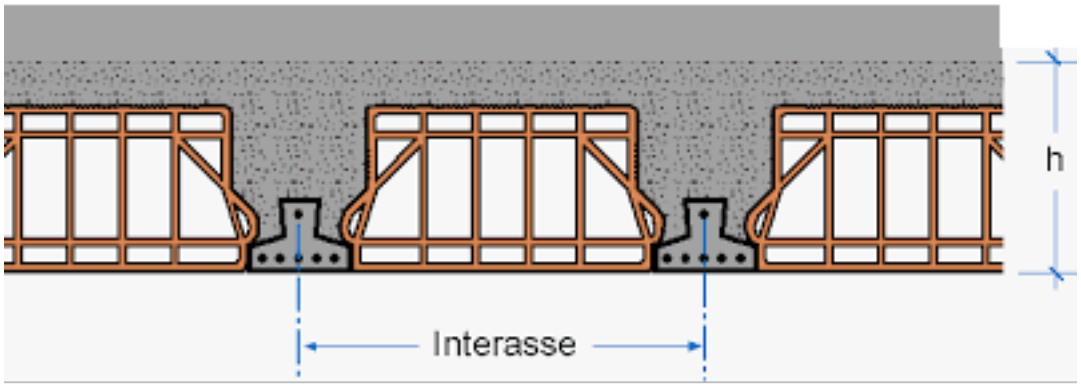
La forza di precompressione non è costante, in quanto è spesso applicata in fasi successive ed inoltre è influenzata dai seguenti fenomeni:

• perdite di tensione istantanee nel cls (c.a.p. a cavi pretesi)

• perdite di tensione istantanee per attrito lungo i cavi (c.a.p. a cavi post-tesi)

• cadute di tensione differite nel tempo a causa dei fenomeni lenti che si verificano nel calcestruzzo (viscosità e ritiro) e nell'acciaio (rilassamento del cavo di precompressione)

Riportiamo il calcolo di un solaio in cemento armato consolidato mediante una soletta di cls e l'inserimento di connettori metallici
Carico accidentale 200 daN/mq Incidenza tramezzi 100 daN/mq
Carichi permanenti (massetto, pavimento) 100 daN/mq Luce 5 metri
Solaio 16+4 consolidato mediante una soletta di cls di 5 cm



VERIFICHE NUMERICHE

	Coordinata	cm
	Campata	
GEOMETRIA	A nuova soletta	cm2
	distanza da sopra	cm
	A soletta es	cm2
	distanza da sopra	cm
	A inf	cm2
	distanza da sopra	cm
	larghezza soletta	cm
	altezza soletta	cm
	larghezza eventuale raccordo	cm
	altezza eventuale raccordo	cm
	larghezza soletta esistente	cm
	altezza soletta esistente	cm
	base travetto	cm
	altezza travetto	cm
SOLLECITA-ZIONI	MEd Momenti sollecitanti comb 1	kNm
	Ved Tagli sollecitanti comb 1	kN
	vEd Scorrimenti sollecitanti comb 1	kN/cm
	MEd Momenti sollecitanti comb 2	kNm
	Ved Tagli sollecitanti comb 2	kN
	vEd Scorrimenti sollecitanti comb 2	kN/cm
RESISTENZE	MRd - Momenti resistenti (elastici) neg	kNm
	MRd + Momenti resistenti (elastici) pos	kNm
	VRd Tagli resistenti senza arm. a taglio comb 1	kN
	VRd Tagli resistenti senza arm. a taglio comb 2	kN
	vRd Scorrimenti resistenti comb 1	kN/cm
	vRd Scorrimenti resistenti comb 2	kN/cm
	y Asse neutro da estradosso. Comb 1	cm
	n Coeff di omeg. Comb 1	
	J Momento di inerzia. Comb 1	cm4
	S Momento statico nuova parte. Comb 1	cm3
	y Asse neutro da estradosso. Comb 2	cm
	n Coeff di omeg. Comb 2	
	J Momento di inerzia. Comb 2	cm4
	S Momento statico nuova parte. Comb 2	cm3
	vRcd Scorrimenti resistenti dati da coesione	kN/cm
	Spaziatura connettori	cm

MATERIALI	Calcestruzzo esistente	Rck	25		N/mm2
		Ecm	29962		N/mm2
		densità	2500		kg/m3
		γ cls =	1,6		
	Calcestruzzo di rinforzo	Rck	40		N/mm2
		Ecm	33346		N/mm2
		densità	2500		kg/m3
		γ cls =	1,5		
	Armatura esistente	Fe b 44 k	fyk =	430	N/mm2
			fyd=	374	N/mm2
			γ acc =	1,15	
	Armatura nuova	B450C	fyk =	450	N/mm2

				fyd=	391	N/mm2
				γ acc =	1,15	
	Connettore		V CEM	Altezza =	35	mm
				Pd compressone =	11,6	kN
				Pd trazione =	8,2	kN

SCHEMA STATICO	Momento negativo agli appoggi:	Msx = -(g1+g2+q) L2 / 1000000			
		Mdx = -(g1+g2+q) L2 / 1000000			
AZIONI	Peso proprio solaio esistente:	2,44	kN/m2	γG1 =	1,30
	Peso proprio intervento:	1,25	kN/m2	γG1 =	1,30
	Peso carichi compiutamente definiti:	0,80	kN/m2	γG1 =	1,30
	Peso carichi non compiutamente definiti:	1,00	kN/m2	γG2 =	1,50
	Peso carichi variabili:	2,00	kN/m2	γq =	1,50

5- Conclusioni

Le travi composte trovano largo impiego nelle zone colpite da eventi sismici dove vanno consolidati i solai degli edifici per cui si rende opportuno il miglioramento della resistenza del solaio e della sua rigidezza attraverso la realizzazione di una soletta superiore collegata al solaio esistente tramite connettori metallici in modo da eliminare fastidiose vibrazioni e ridurre la deflessione dei solai. Le stesse strutture miste trovano impiego nelle realizzazioni di impalcati per strutture da ponte quali viadotti dove si utilizzano travi in acciaio e precompresse a doppio T solidarizzate da una soletta superiore di cls , in questo modo con struttura mista acciaio calcestruzzo è stato realizzato l'impalcato del ponte San Giorgio di Genova in sostituzione del ponte Morandi crollato.

Le cupole

1- Introduzione

2- Cenni storici sulle cupole

3- La struttura , la teoria delle cupole : azioni sismiche .

4- La cupola in lamellare

5- La cupola in acciaio , alluminio e vetro.

6- La cupola in cemento armato

7- La cupola in muratura: meccanismi di danno

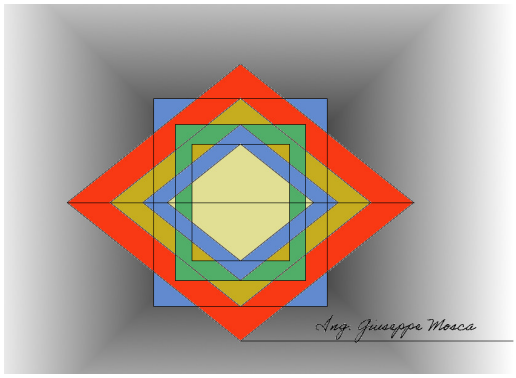
8- La cupola in plexiglass , vetroresina in materiale composito

9 - Le cupole geodetiche

10 - Le cupole ribassate e la instabilità globale (buckling)

11- Il simbolismo religioso, sociale e psicoanalitico

12- Conclusioni





N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

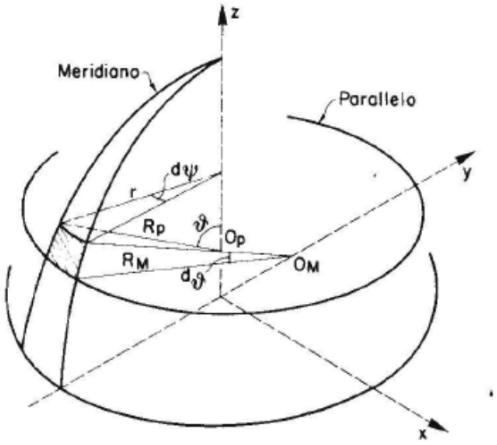
Le cupole rappresentano degli elementi strutturali che hanno caratterizzato l'architettura religiosa non solo cristiana ortodossa anglicana ma anche islamica dagli inizi del secondo millennio in Italia sono emblematiche le cupole vaticane di Michelangelo , la cupola di Santa Maria del Fiore di Firenze da parte del Brunelleschi. Ogni edificio religioso ha la sua cupola realizzata in pietra o laterizio che caratterizza la architettura della chiesa con gli eventi sismici degli ultimi 20 anni hanno evidenziato notevoli danni strutturali con crolli , terremoti che se si verificano durante una funzione religiosa sono disastrosi in termini di vite umane per non parlare del significato intrinseco ovvero della fine della chiesa e quindi della religione cristiana. Alla cupola in Italia si associa un altro significato ***"mafioso"*** *esportato nella cultura sociologica italiana allargato al concetto di gruppo sociale di appartenenza* ***"amicizia"*** *ovvero di socializzazione esclusione marginalizzazione se prima si parlava di mafia adesso si può parlare di mafia bianca psichiatrica (manicomiale) ovvero regole scritte e non scritte di gruppi sociali secondo le quali si stabiliscono gerarchie dinastie classi sociali status e condizione di vita delle persone. Una estensione nell'inconscio collettivo della cultura mafiosa che riguarda la intera società italiana coinvolgendo quarto potere televisione radio giornali gruppi di persone in base quale si definiscono i raggi di azione delle persone le barriere le limitazioni che devono avere alla loro vita , per cui forse è migliore la cultura siciliana del secolo scorso che le caste e piramidi sociali della attuale società Italiana:il baciamano lo si faceva ad un mafioso oggi lo si fa ad una diva della TV che allo stesso modo limita la tua vita o ad un barone universitario e parlamentare un dirigente di azienda un giornalista ect . molto spesso si trasformano in secondini sociali. La cupola è un elemento architettonico fondato sul principio di funzionamento dell'arco ovvero che sfrutta la resistenza a compressione dei materiali quali la pietra e il laterizio per coprire grandi spazi e luci in grado di sopportare i carichi verticali ma sollecitata da azioni orizzontali quali vento e sisma diventa estremamente vulnerabile palesando meccanismi di danno. La bellezza di una cupola non è solo architettonica e strutturale ma artistica ovvero gli affreschi i mosaici riportati nel suo intradosso basti pensare a quelli di Michelangelo della cupola di San Pietro*



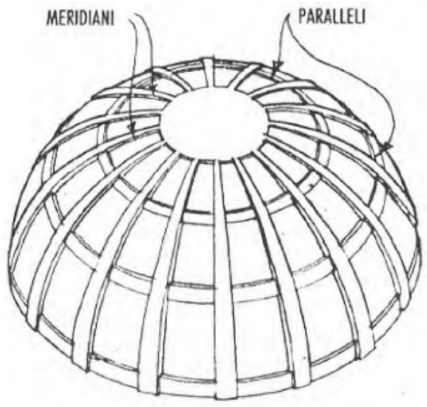
Il cui crollo sarebbe non solo un danno per il patrimonio culturale italiano ma decreterebbe simbolicamente la fine della chiesa e del potere vaticano in Italia e nel mondo, il cui beneficio è la fine del potere marginalizzante italiano.

2- Cenni storici sulle cupole

La cupola è una superficie di rotazione ottenuta ruotando un arco di circonferenza o di parabola intorno ad un asse di rotazione verticale centrale di 360° , definendo una superficie simmetrica quale un calotta semisferica; si possono però avere anche cupole a base poligonale (volte a vela o a padiglione) come la mole Antoneliana di Torino e la cupola di Santa Maria del fiore di Firenze .La cupola poggia su un tamburo di forma prismatica e cilindrica che poggia a sua volta su una struttura di base che oltre a dare dignità e visibilità ad una cupola più alta serve anche per l'apertura di finestre che illuminano l'ambiente sottostante. Per raccordare una base quadrata con un tamburo ottagonale vengono inseriti dei pennacchi che possono aver forma sferica conica oppure più complessa.



Il funzionamento statico della cupola è quello di archi compressi secondo i meridiani ed archi di circonferenza ***"anelli tesi"*** *secondo i paralleli ; questo modello di funzionamento strutturale si adatta a cupole in cemento armato dove la trazione negli anelli viene affidata alla armatura metallica, per cupole i muratura si presuppone che la trazione nell'anello abbia u valore molto basso inferiore* $\sigma_t < f_{vo} + 0{,}4 * \sigma_n$ *tensione ammissibile a taglio per le murature. La cupola del Brunelleschi o di San Pietro hanno un funzionamento differente vi sono archi principali in pietra sui quali appoggiano elementi lapidei; una cupola con struttura in legno lamellare composta da archi principali ed anelli per soli carichi verticali ha un ottimo funzionamento statico*



Nella cultura medievale la cupola è un elemento onnipresente e le produzioni architettoniche del tempo dimostrano la totale dedizione che gli architetti medievali nutrono nei confronti delle volte, poste sempre a copertura di edifici altamente simbolici. La cupola è così il tema dominante dell'architettura bizantina, che offre una casistica ampia e impone i modelli formali ed estetici per le produzioni successive. La cupola bizantina è «una solenne larghezza di masse, raccordate in una ininterrotta continuità di successione, un più pieghevole ritmo di consonanze, che evita con raffinata sen-





sibilità irritanti contrasti puntuali e opposizioni». Nella maggior parte dei casi, a differenza di quella romana impostata su muri continui eretti su spazi circolari, la cupola bizantina combina la semisfera della calotta con la pianta quadrata del vano, proponendo una soluzione volumetrica complessa che esalta ulteriormente l'aspetto mistico della costruzione, dove il cerchio rappresenta il trascendente e la divinità, mentre il quadrato è l'emblema della terra e della stabilità. Nella cultura islamica, anch'essa fortemente legata al tema della cupola e fondata sull'assunto che «non con una immagine ma con un simbolo ci si può rammemorare di Dio, la rappresentazione









del divino attraverso le strutture cupolate diviene ancora più ardita grazie all'utilizzo della geometria e della stereotomia, con il ricorso a configurazioni spaziali di grande complessità, come i muqarnas, dove la frammentazione dei volumi che convergono in un unico punto rappresenta l'universo che converge a Dio. Il simbolismo della cupola , analizza in maniera chiara e puntuale tra l'altro il legame tra la forma quadrata e quella circolare. Negli anni Cinquanta del Novecento, Earl Baldwin Smith pubblica uno studio monografico con lo scopo di rintracciare l'evoluzione del simbolo e

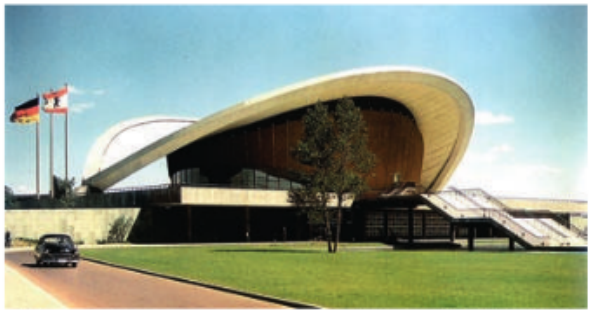


dell'idea associata alle coperture circolari. Nella trattazione, grande rilevanza è data al mondo orientale con particolare riferimento alla Siria ed alla Palestina. Sempre di carattere simbolico è l'opera di Hautecour che nel 1954 approfondisce gli aspetti mistici delle strutture cupolate, dando ampio spazio al tema delle cupole bizantine. Lo storico francese analizza soprattutto la relazione tra la cupola e il culto solare, in cui la copertura voltata rappresenta il Sol Iustitiae ed il centro della calotta si configura come l'omphalos, il centro della terra. Per Hautecour, la volta è l'elmo celeste che protegge la chiesa e «l'identificazione cosmica è sottolineata poi dai temi iconografici della decorazione−calotta come cielo stellato, Cristo Pantocratore al centro, circondato dagli apostoli, dai profeti o dagli angeli, figure angeliche e figure o simboli degli evangelisti nelle trombe o nei pennacchi−sviluppati dal sec. XI nelle chiese bizantine secondo un preciso ordinamento teologico».Gli edifici più importanti della storia cupolati sono il Pantheon di Roma , il San Vitale A Ravenna , e Santa Maria del Fiore Le prime cupole le troviamo in Mesopotamia nel mondo islamico attuale Iraq ed Iran poi successivamente le volte e cupole caratteristiche dell'architettura romana per finire con le cupole bizantine ed islamiche per poi passare alle cupole rinascimentali. Come la chiesa cristiana è caratterizzata architettonicamente da una cupola anche le moschee si distinguono per la presenza di queste superfici di rotazione diventando assieme arco parte integrante dell'architettura religiosa islamica

Sulla sommità della cupola di solito vi è una lanterna che fornisce un punto di illuminazione centrale e crea un elemento decorativo sulla superficie esterna; le cupole rappresentano un elemento chiave sia dello spazio interno all'edificio che del paesaggi urbano e rappresentano capolavori dell'ingegno umano costruite e su regole progettuali e strutturali basate sulla semplice esperienza e comparazione. Purtroppo tali strutture sono estremamente vulnerabili sismicamente se sollecitate da azioni

orizzontali basti ricordare il sisma di L'Aquila del 6 Aprile 2009 dove i meccanismi di danno sono riportati nelle linee guida sui beni culturali. Le cupole moderne sono realizzate in cemento armato con spessore ridotti , grandi costruzioni sportive, congressuali o aeroportuali hanno fornito campi di prova per la sperimentazione di volte e cupole avveniristiche.

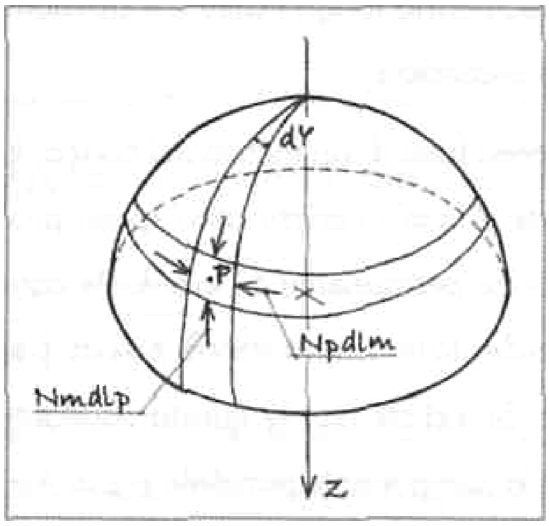
• ***volte a doppia curvatura**, cioè con superfici concavo- convesse, tra le quali le volte a sella,*

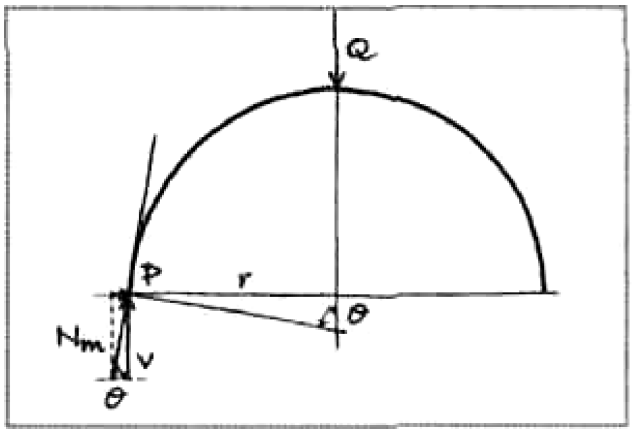




3- La struttura , la teoria delle cupole le azioni sismiche

La teoria delle cupole il calcolo strutturale membranale è parte integrante dei corsi di tecnica e scienza delle costruzioni nelle università ormai strutture da molti anni calcolate attraverso una modellazione FEM con software strutturale. Una cupola sollecitata esclusivamente da carichi verticali presenta i meridiani compressi e gli annelli tesi , lo scopo della trattazione matematica è la determinazione dello sforzo normale di compressione e trazione attraverso delle semplici equazioni di equilibrio.





Per condizione di carico simmetrica lo sforzo normale alla base del meridiano è costante ed ha direzione ad esso tangente ; indicando con Q il carico totale quale peso proprio sovraccarico e con V la componente verticale dello sforzo normale N_m ;

$V * 2 * \pi * r = N_m * 2 * \pi * r * \theta$ quando è possibile confondere l'arco con il seno $\sin\theta = \theta$;

Per l'equilibrio $Q = V * 2 * \pi * r = N_m * 2 * \pi * r * \theta$; ovvero

$Q = N_m * 2 * \pi * r * \theta$; $Q = N_m * 2 * \pi * r * \sin\theta$; $N_m = Q/[2 * \pi * r * \sin\theta]$ dove

$R_P * \sin\theta = r$ r raggio della circonferenza orrizontale ; R_P raggio cupola

$N_m = Q/[2 * \pi * R_P * \sin\theta^2]$

Q è la risultante globale del carico pari a $Q = \int q * dA$; $q = \gamma * s + p$

γ peso specifico cupola s spessore p sovraccarico a mq

Ipotizzando tale carico verticale costante $Q = q * A$ A superficie della calotta

$A = 2 * \pi * R * Z$ Z è la saetta $Z = R * (1 - \cos\theta)$

$N_m = q * 2 * \pi * R^2 * (1 - \cos\theta) / [2 * \pi * R_P * \sin\theta^2] =$

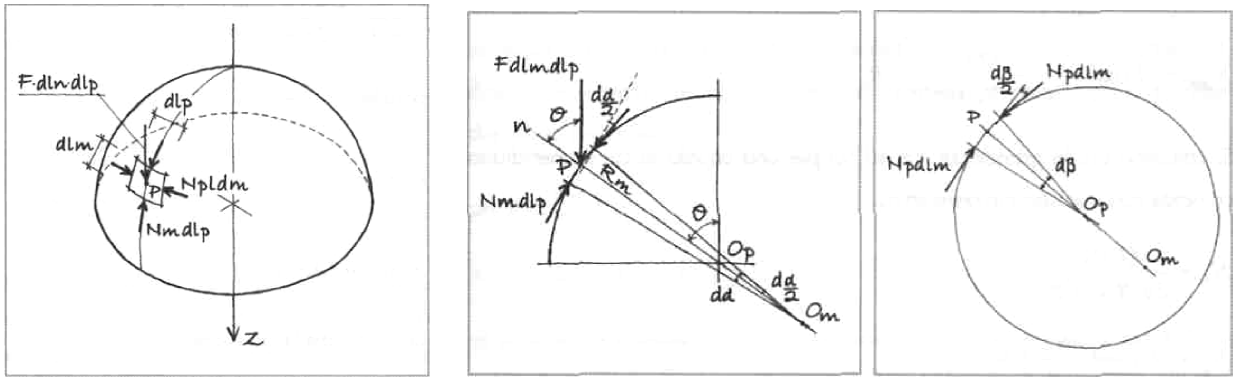
$q*2*\pi*R^2*(1-\cos\theta)\ /[2*\pi*R*(1-\cos\theta^2)]$

$N_m = q*R\ /[(1+\cos\theta)]$

in chiave per $\theta = 0$ $\quad N_m = q*R\ /2$

Alla base della cupola per $\theta = 90°$ $\quad N_m = q*R$

Per quanto concerne lo sforzo di trazione negli anelli N_P *variabile da parallelo a parallelo per cui se sezioniamo la nostra cupola co tanti piani orizzontali otterremo infinite incognite*



Consideriamo un intorno areale del punto P ed imponiamo l'equilibrio intorno alla normale n , le forze in gioco sono il carico verticale q ,. lo sforzo normale nei meridiani e lo sforzo di trazione nei parallelli le cui componenti secondo la normale n

$q*\cos\theta\ *dA + 2*N_m*\ dl_p*\ d\alpha\ /2 + 2*N_P*\ dl_m*d\beta/2 = 0$

$dA = dl_m*\ dl_P$ *elemento areale infinitesimo rettangolare di lati* dl_m *e* dl_P

$dl_m = R_m*\ d\alpha \quad ; \qquad dl_P = R_P*d\beta$

$q*\cos\theta\ *\ R_m*R_P + N_m*\ R_p*\ + N_P*\ R_m = 0 \qquad q*\cos\theta = N_m/R_m\ + N_P/\ R_p$ *si evince*

$N_P/\ R_p = q*\cos\theta - N_m/R_m$ *; lo sforzo di trazione nel parallelo*

$N_P = [q*\cos\theta - N_m/R_m]*R_p$ *ricordando la formula per lo sforzo nel meridiano*

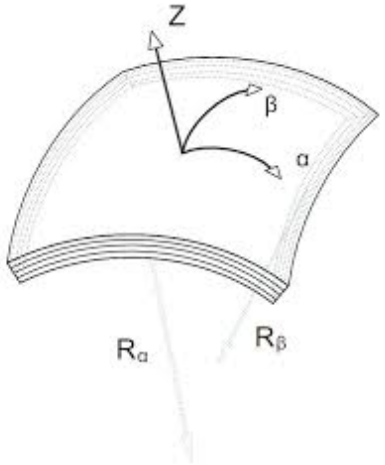
$N_m = Q/[2*\pi*R_P*\sin\theta^2]$ *posto* $\quad Q = \int q*dA\ ;\ q = \gamma*s\ + p\ ;\ N_m = q*R\ /[(1+\cos\theta)]$

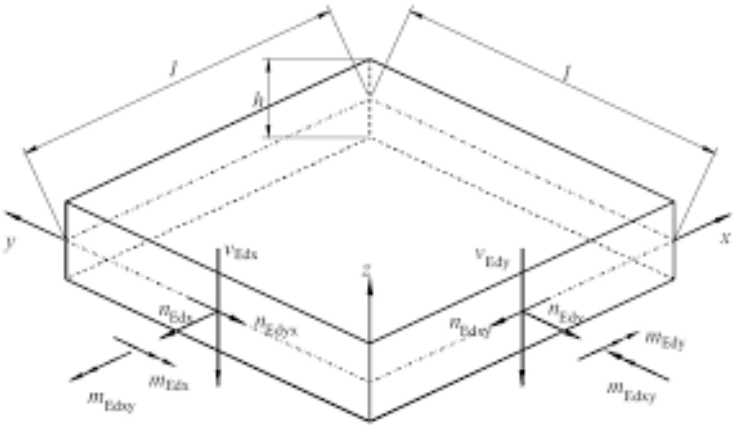
$N_P = [q*\cos\theta - q/[(1+\cos\theta)]]*R_p = q*R_p*[(\cos\theta - 1/(1+\cos\theta)] =$

Al solito in chiave $\theta = 0$ *lo sforzo di trazione* $N_P = q*R_p/2 = N_m$

Per l'anello di base $\theta = 90°$ *lo sforzo di trazione* $N_P = - q*R_p$

La trattazione eseguita per la cupola tiene conto esclusivamente dello sforzo normale si parla di cupole sottili che non hanno rigidezza flessionale hanno già subito spostamenti ovvero ***"strutture cupolari variate"*** *per cui la trattazione corretta è quella a membrana considerando anche le sollecitazioni flettenti nei meridiani e paralleli adatta ad una modellazione FEM plate-shell dove si può tener conto di azioni orizzontali dovute al sisma e al vento . La teoria delle cupole in genere delle volte in regime membranale considera le seguenti sollecitazioni sull'elementino piano quali sforzo normale flessione e taglio ovvero sui meridiani e paralleli vano aggiunte siffatte sollecitazioni*





La modellazione FEM delle cupole è adatta per materiali continui quali cemento armato , plexiglass , composito, muratura di laterizio o pietra , per cupole in lamellare alluminio acciaio , anche per la cupola del Brunelleschi o di San Pietro è preferibile una modellazione tramite elementi lineari quali aste.

Riportiamo la modellazione FEM di una cupola in cemento armato sollecitata da azioni sismiche orizzontali verticali per la quale eseguiamo una analisi di bukling.

Dimensioni cupola semisferica Diametro 50 m , Saetta 25 m ;
Anello di base 30x50 , vincoli appoggio - incastro.
Spessore 20 cm Cemento Armato 500 daN/cmq
Impermeabilizzazione , guaina, rivestimento, isolante termico 50 daN/mq
Carico da neve costante 260 daN/mq

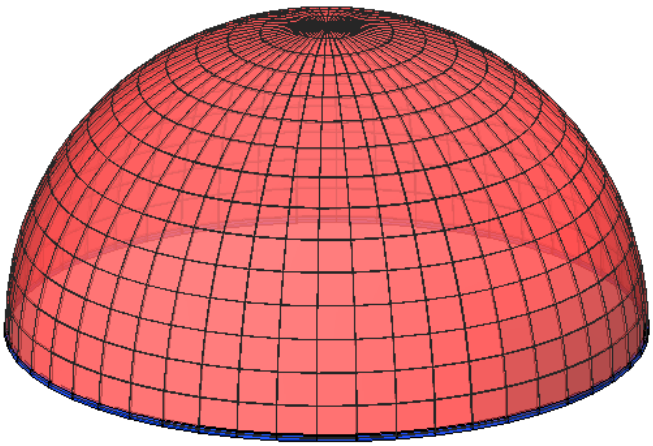
La cupola è spingente ,Anello di base tensoinflesso

Azioni sismiche orizzontali e verticali Comune di Castel di Sangro Ag= 2.63 m/sec^2

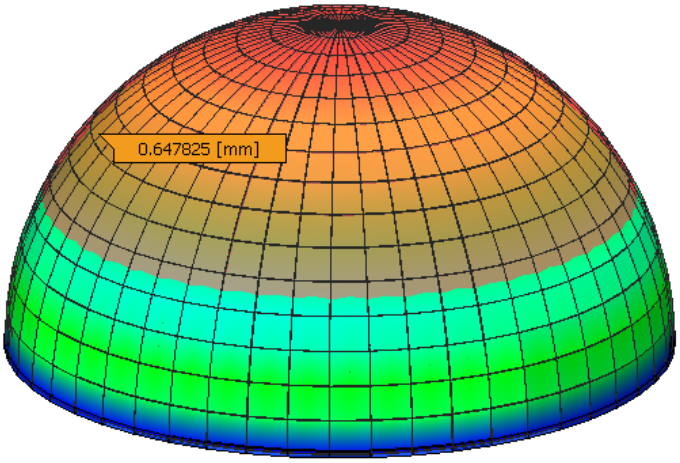
Analisi di instabilità globale determinazione coefficiente moltiplicatore $\alpha > 10$
La stessa modellazione è valida per cupole in vetroresina e materiale composito che vedremo nel paragrafo dedicato.

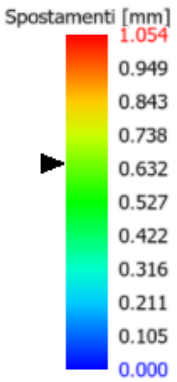
Dal calcolo eseguito la cupola è verificata . Riportiamo i risultati

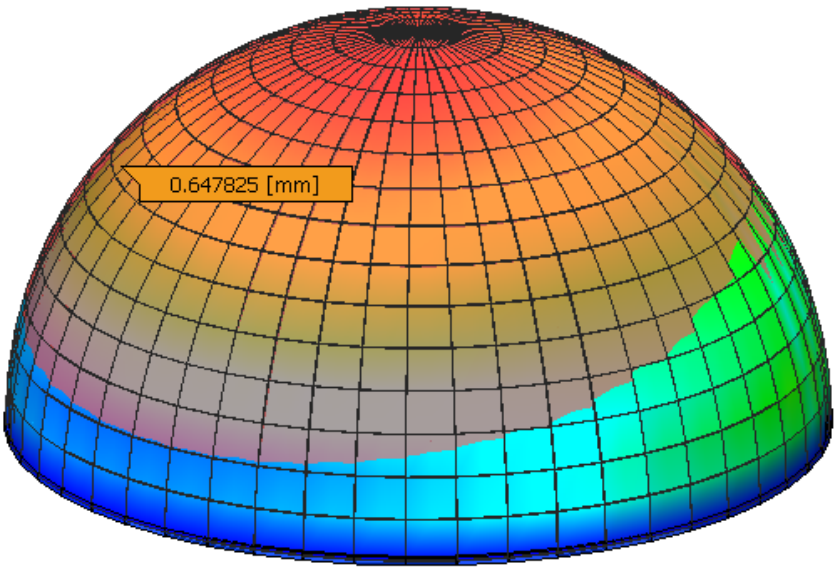
Modellazione FEM

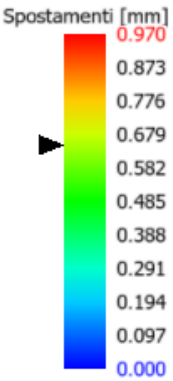


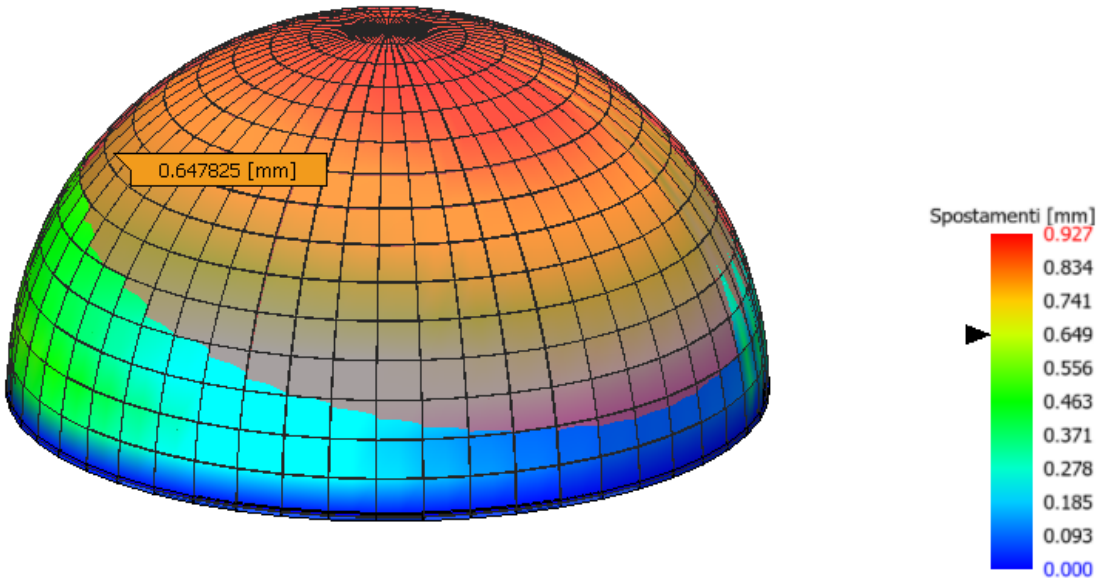
Deformazioni Carichi verticali Sisma direzione X e Y



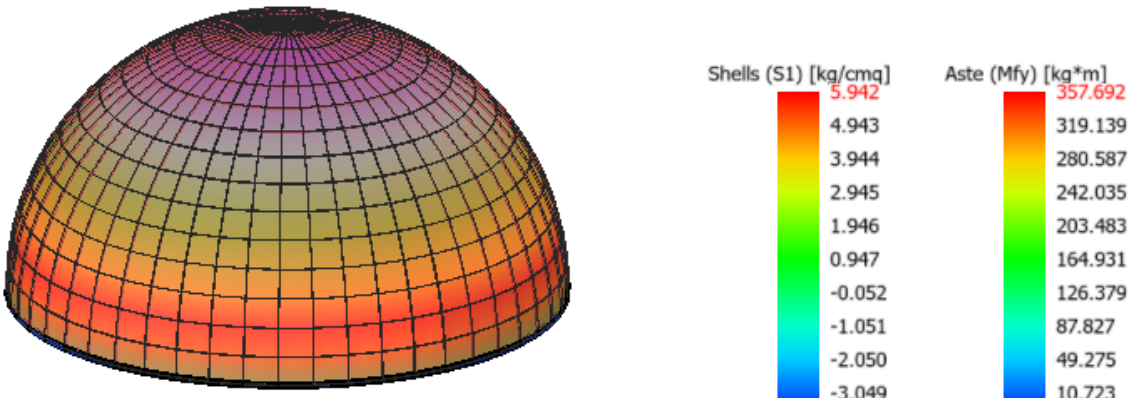


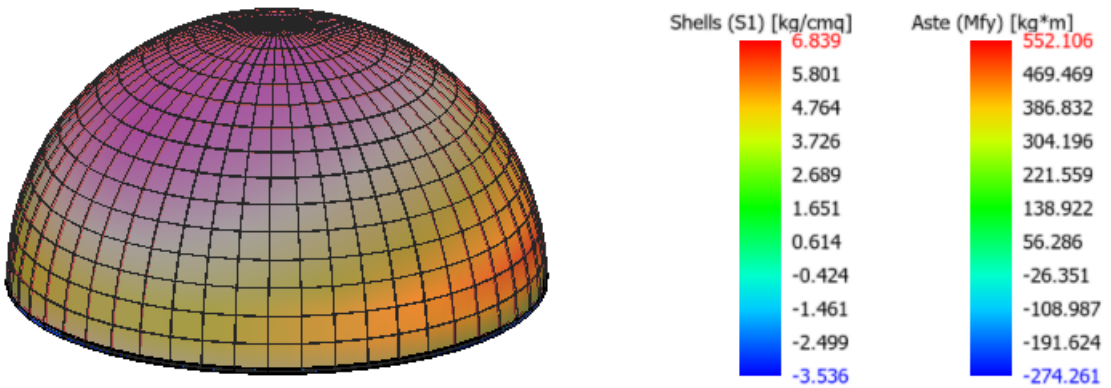


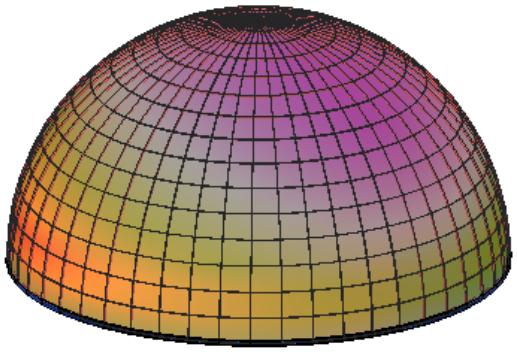


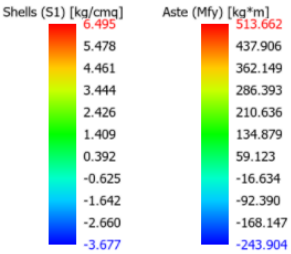


Tensioni principali Carichi verticali Sisma direzione X e Y
S_1

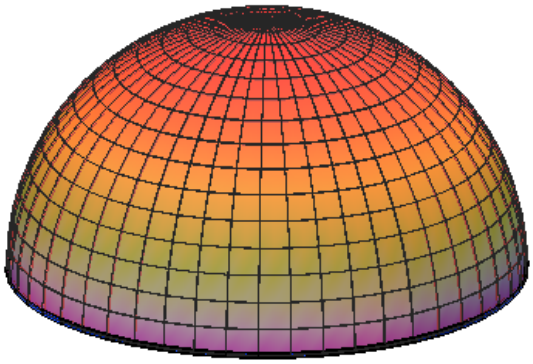


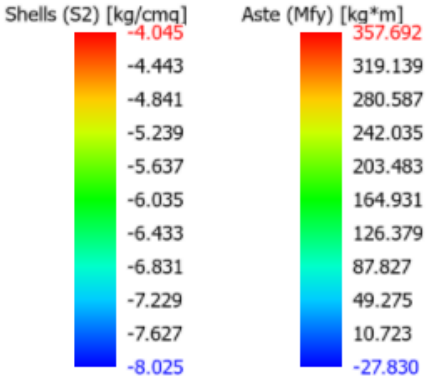


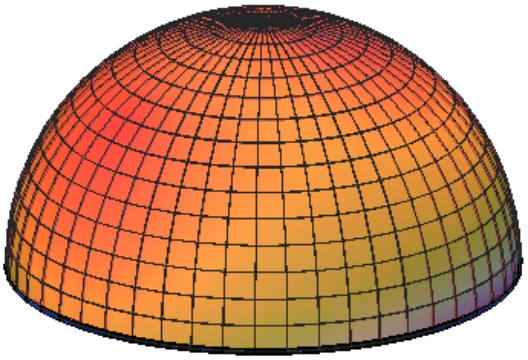


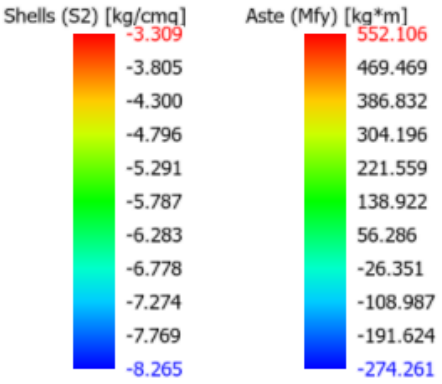

Shells (S1) [kg/cmq]
6.495
5.478
4.461
3.444
2.426
1.409
0.392
-0.625
-1.642
-2.660
-3.677
Aste (Mfy) [kg*m]
513.662
437.906
362.149
286.393
210.636
134.879
59.123
-16.634
-92.390
-168.147
-243.904

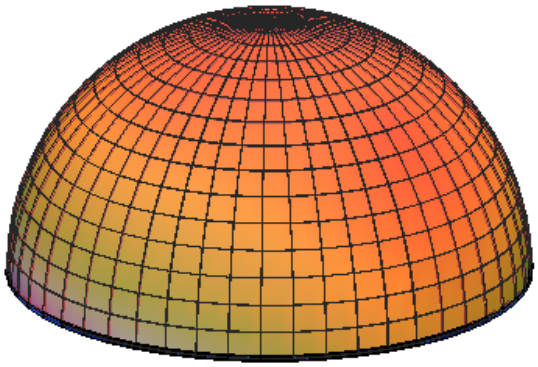
S_2

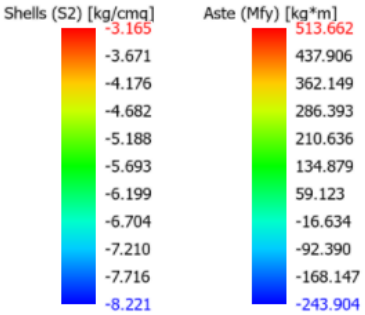



Shells (S2) [kg/cmq]
-4.045
-4.443
-4.841
-5.239
-5.637
-6.035
-6.433
-6.831
-7.229
-7.627
-8.025
Aste (Mfy) [kg*m]
357.692
319.139
280.587
242.035
203.483
164.931
126.379
87.827
49.275
10.723
-27.830




Shells (S2) [kg/cmq]
-3.309
-3.805
-4.300
-4.796
-5.291
-5.787
-6.283
-6.778
-7.274
-7.769
-8.265
Aste (Mfy) [kg*m]
552.106
469.469
386.832
304.196
221.559
138.922
56.286
-26.351
-108.987
-191.624
-274.261

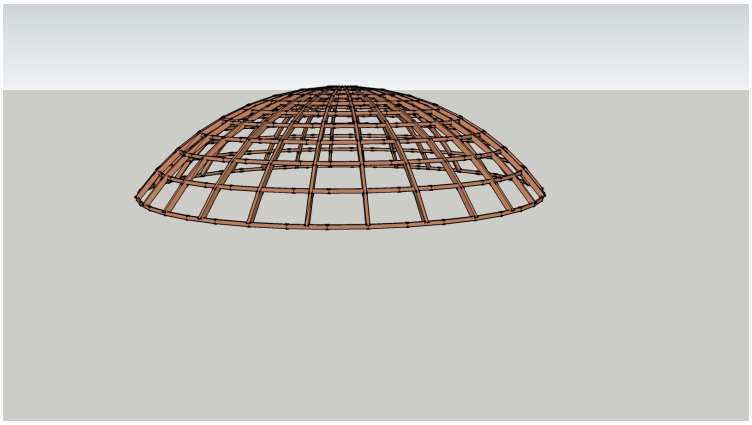



Shells (S2) [kg/cmq]
-3.165
-3.671
-4.176
-4.682
-5.188
-5.693
-6.199
-6.704
-7.210
-7.716
-8.221
Aste (Mfy) [kg*m]
513.662
437.906
362.149
286.393
210.636
134.879
59.123
-16.634
-92.390
-168.147
-243.904

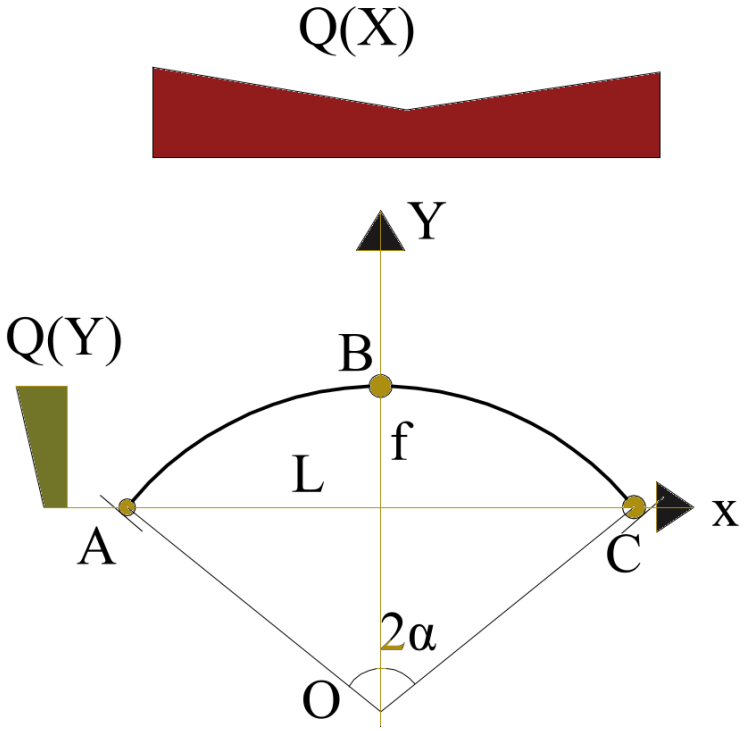
4- La cupola in lamellare

La cupola in legno lamellare può essere costruita facendo riferimento al meccanismo resistente della cupola ovvero meridiani compressi ed anelli tesi individuando quindi degli archi in lamellare collegati lungo i paralleli da anelli compresi un un piano orizzontale. Il calcolo manuale di questa cupola è immediato basta risolvere un semplice arco a tre cerniere caricato dalla porzione di carico verticale che gli compete; gli archi convergono nel nodo centrale in sommità dove viene posizionato un anello in acciaio in grado di trasmettere gli sforzi normali delle aste.

CUPOLA NERVATA



*Consideriamo un arco a tre cerniere definito da una curva circolare di raggio R angolo al centro 2*α che poggia su imposte laterali realizzato assemblando dei conci di pietra , quello che ci proponiamo e la determinazione delle sollecitazioni di sforzo normale, momento flettente e taglio nella struttura considerando uno schema statico di arco a tre cerniere. L'arco e sollecitato da un carico verticale Q(x) definibile mediante una funzione , e da un carico orizzontale Q(y)*



Le reazioni vincolari Rax , Ray , Rcx, Rcy, Rbxs , Rbys , Rbxd, Rbyd
l'arco viene suddiviso in due tratti AB e BC ed il nodo B le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale per ciascun tratto
IL carico Q e un carico verticale Qy ed un carico orizzontale dovuto ad azioni sismiche orizzontali Qx

Tratto AB

$Ray + Rbys - \int Qy(x)dx = 0$
$Rax + Rbxs - \int Qx(y)dy = 0$
equilibrio intorno a B
$Rax * f - Ray * L/2 + \int Qy * xdx + \int Qx * ydy = 0$

Equilibrio del nodo
$Rbxs = Rbxd \; ; \; Rbys = Rbyd$

Tratto BC

$Rcy + Rbyd - \int Qy(x)dx = 0$
$Rcx + Rbxd - \int Qx(y)dy = 0$

equilibrio intorno a B
$-Rcx * f + Rcy * L/2 - \int Qy * xdx - \int Qx * ydy = 0$

Equazioni globali di equilibrio

$Ray + Rcy = \int Qy(x)dx$
$Rax + Rcx = 2 * \int Qx(y)dy$

il carico orizzontale viene considerato uguale sui due tratti
le incognite sono le sei reazioni vincolari abbiamo un sistema di sei equazioni in sei incognite

$Ray + Rbys = \int Qy(x)dx$

$Rax + Rbxs = \int Qx(y)dy$

$- Ray * L/2 + Rax * f = \int Qy * xdx + \int Qx * ydy$

$Rcy + Rbys = \int Qy(x)dx$

$Rcx + Rbxs = \int Qx(y)dy$

$-Rcx * f + Rcy * L/2 = \int Qy * xdx + \int Qx * ydy$

le incognite sono Rax, Ray, Rcx, Rcy, Rbxs, Rbys
per verificare i risultati sui utilizzano le equazioni di equilibrio globale

$Ray + Rcy = \int Qy(x)dx$
$Rax + Rcx = 2* \int Qx(y)dy$
Se l'arco e sollecitato da un solo carico verticale q costante le reazioni sono immediate

$Ray = Rcy = q*L/2$ $Rax=Rcx= H = q*L^2/(8f)$

Le coordinate di ciascun punto dell'arco

$X = R*\sin\beta$; $Y = f- R*(1-\cos\beta)$ β *e compreso nell'intervallo* $(-\alpha, +\alpha)$

La sollecitazione flettente *tratto AB positivo se antiorario*

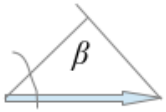
$M(X,Y) = Ray * x – Rax * y + \int Qy*xdx - \int Qx*ydy$

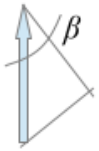
La sollecitazione tagliante

$V(X,Y) = Ray *\cos\beta + Rax*\sin\beta - \int Qy*\cos\beta*dx + \int Qx*\sin\beta*dy$

La sollecitazione di sforzo normale

$P(X,Y)= Ray *\sin\beta + Rax*\cos\beta - \int Qy*\sin\beta*dx + \int Qx*\cos\beta*dy$





I punti di massimo del momento sono individuati dalle coordinate

$X = R*\sin\beta$; $Y = f- R*(1-\cos\beta)$ *definite dall'angolo* β *ricavato dalla equazione*

$dM(\beta)/d\beta = 0$

$dx = ds \cos\beta$; $dy = ds \sin\beta$ $ds= R*d\beta$

Per quanto concerne le verifiche da eseguire sulle aste in lamellare sono a pressoflessione e taglio . Si utilizzano le note formule riportate in bibliografia nell'eurocodice 5 , nelle NTC 2018 e nelle istruzioni CNR

Tensoflessione

$(\sigma_{t,0,d} / f_{t,0,d}) + (\sigma_{m,Y,d} / f_{m,Y,d}) + K_m * (\sigma_{m,Z,d} / f_{m,Z,d}) \leq 1$

Pressoflessione

$(\sigma_{t,0,d} / f_{t,0,d})^2 + (\sigma_{m,Y,d} / f_{m,Y,d}) + K_m * (\sigma_{m,Z,d} / f_{m,Z,d}) \leq 1$

Taglio

$V/I*Sx/b = \tau_d \leq f_{vd}$

Nella valutazione della τ_d è opportuno considerare l'influenza delle fessurazioni presenti nell'elemento strutturale, utilizzando una larghezza $b_{ef} = k_{cf}$
b larghezza dell'elemento
k_{cf}= 0,67 per legno massiccio
k_{cf}= 1 per legno lamellare
k_{cf}= 1 per altri prodotti a base di legno LVL

La verifica di instabilità dell'arco a 3 cerniere può essere eseguita

$\sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c} * f_{c,0,d}) < 1$

la resistenza di calcolo a compressione viene maggiorata con un coefficiente

$K_{crit,c} = 1/[k + (k^2 - \lambda^2_{rel,c})^{1/2}]$

$k = 0,5 * [1 + \beta_c * (\lambda_{rel,c} - 0,3) + \lambda^2_{rel,c}]$

$\lambda_{rel,c} = \lambda/\pi * (f_{c,0,k}/E_{0.05})^{1/2}$

$\lambda = Lo/\rho$

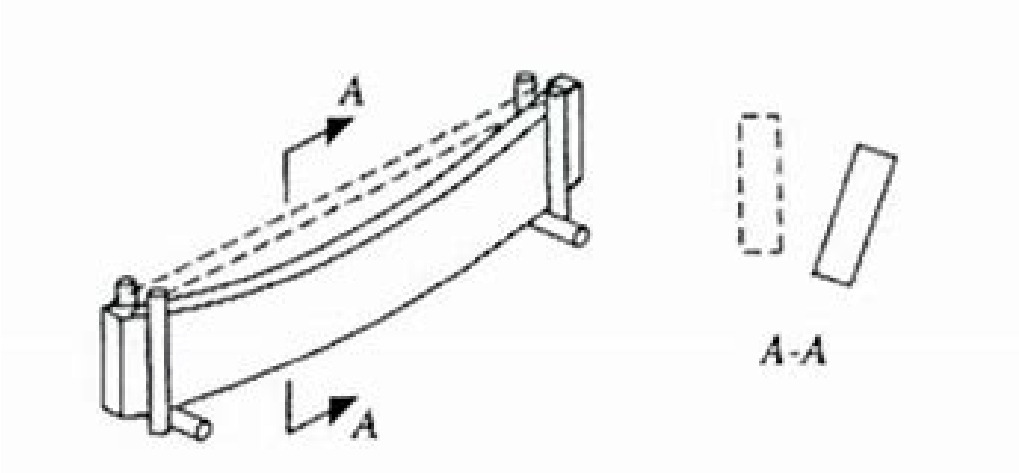
Lo lunghezza libera di inflessione
ρ raggio d inerzia minimo

Se $\lambda_{rel,c} < 0,3$ si assume $K_{crit,c} = 1$

Il carico critico per un arco a tre cerniere

$N_C = \pi^2 * E * I/L_O^2$ *la lunghezza libera di inflessione viene assunta pari a L/2 dove L è la luce del'arco*

Gli anelli ovvero le aste di collegamento orizzontali evitano lo sbandamento laterale degli archi per i quali la verifica a instabilità flessotorsionale va eseguita con la formula



$\sigma_{m,d}/(K_{crit,m}*f_{m,d})\leq 1$

$\sigma_{m,d} = M/W$ *tensione massima per flessione semplice*

$$K_{crit,m}\quad\begin{cases} 1 & \text{per } \lambda_{rel,m}\leq 0.75 \\ 1{,}56-0{,}75 * \lambda_{rel,m} & \text{per } 0{,}75< \lambda_{rel,m}\leq 1{,}4 \\ 1/\lambda^2_{rel,m} & \text{per } \lambda_{rel,m} > 1{,}4 \end{cases}$$

$\lambda_{rel,m}= (f_{m,k}/\sigma_{m,crit})^{1/2}$

$\sigma_{m,crit}= M_{Y,crit}/W_Y$

$M_{Y,crit} =\pi/L_{eff}*[E_{0.05}*I_z*G_{0.05}*I_p]^{1/2}$

La lunghezza efficace in mancanza di più accurate valutazioni si può porre pari a

$L_{eff}=\beta*L$

dove nella ipotesi di carico applicato nel baricentro della sezione e rotazione torsionale impedita alle estremità della trave β è riportato nella seguente tabella

Tabella 7-4 - Valori del coefficiente β per il calcolo della lunghezza efficace l_{eff}

Condizioni di vincolo	Tipo di carico o di sollecitazione	β
Semplice appoggio	Momento flettente costante	1.00
	Carico uniformemente distribuito	0.88
	Forza concentrata in mezzeria	0.74
Incastro ad un estremo (mensola)	Carico uniformemente distribuito	0.49
	Forza concentrata all'estremo libero	0.78

Se non vi sono elementi di contrasto L rappresenta la luce intera dell'arco , gli anelli impediscono lo svergolamento per cui L = i dove i è l'interasse tra le aste facenti parte dei paralleli , è evidente che la verifica non è necessaria per interassi minimi.
Nel caso frequente di carico non applicato nel baricentro della sezione la lunghezza efficace può essere modificata nella maniera seguente:

- trave su due appoggi: $l_{eff} = \beta \cdot L + \begin{cases} +2h & \text{se il carico è applicato sul bordo compresso} \\ +0 & \text{se il carico è applicato sull'asse} \\ -0.5h & \text{se il carico è applicato al bordo teso} \end{cases}$
- trave a mensola: $l_{eff} = \beta \cdot L + \begin{cases} +2h & \text{se il carico è applicato sul bordo teso} \\ +0 & \text{se il carico è applicato sull'asse} \\ -0.5h & \text{se il carico è applicato al bordo compresso} \end{cases}$

essendo h l'altezza della sezione trasversale dell'elemento.

$$\sigma_{c,0,d}/(K_{crit,c,y}*f_{c,0,d}) + \sigma_{m,d}/(K_{crit,m}*f_{m,d}) + K_m*(\sigma_{m,Z,d}/f_{m,Z,d}) \leq 1$$

$$\sigma_{c,0,d}/(K_{crit,c,y}*f_{c,0,d}) + K_m*\sigma_{m,d}/(K_{crit,m}*f_{m,d}) + (\sigma_{m,Z,d}/f_{m,Z,d}) \leq 1$$

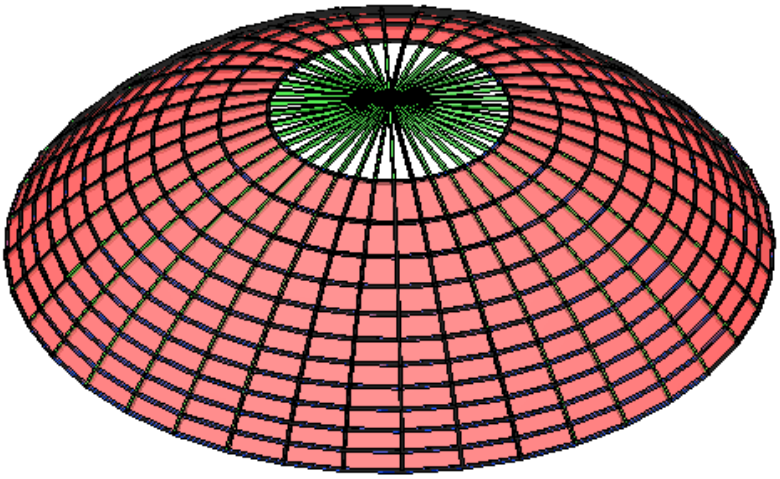
$$\sigma_{c,0,d}/(K_{crit,c,z}*f_{c,0,d}) + \sigma_{m,d}/(K_{crit,m}*f_{m,d}) + K_m*(\sigma_{m,Z,d}/f_{m,Z,d}) \leq 1$$

$$\sigma_{c,0,d}/(K_{crit,c,z}*f_{c,0,d}) + K_m*\sigma_{m,d}/(K_{crit,m}*f_{m,d}) + (\sigma_{m,Z,d}/f_{m,Z,d}) \leq 1$$

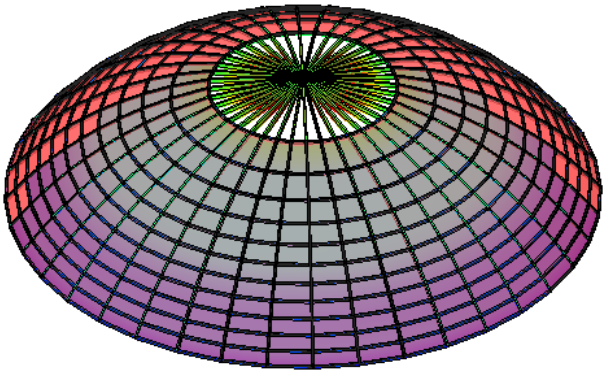
In presenza di azioni orizzontali quali vento e sisma le aste costituenti l'anello sono sollecitate in virtù degli spostamenti orizzontali relativi tra gli archi e della condizione di vincolo ovvero dalla capacità da parte del collegamento metallico tra asta e arco di trasmettere il momento flettente ;interviene la deformabilità assiale della asta che limita tale spostamento relativo in modo che sia sollecitata a sforzo normale. Gli spostamenti relativi tra i meridiani si generano per la inclinazione dell'arco rispetto alla direzione X orizzontale del carico che sollecita gli anelli stessi . Per un approccio strutturale corretto in presenza di forze orizzontali eseguiamo la modellazione FEM della nostra cupola nervata in lamellare

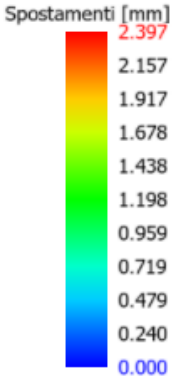
Diametro 50 m , freccia 12 m Interasse verticale anelli 1 m
Legno lamellare GL32 ,
Sezione archi 18x35 cm ; sezione anelli 20x20 cm
Vincolo di bordo cerniera
Pannelli non collaboranti- collaboranti in vetro o legno
Carico da neve 260 daN/mq costante
Azioni orizzontali sismiche Comune Castel di Sangro
Azioni verticali sismiche Comune Castel di Sangro
Azioni orizzontali da vento per semplicità costanti
Analisi di buckling instabilità globale
Verifica anello metallico centrale

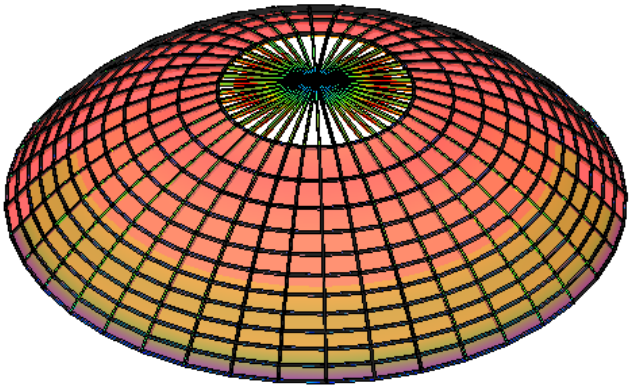
Riportiamo i risultati della modellazione FEM tramite Iperspace personal edition
I modellazione pannello in legno inserito nei riquadri spessore 10 cm

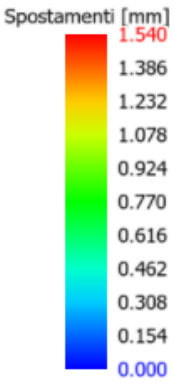


Deformazioni carichi verticali

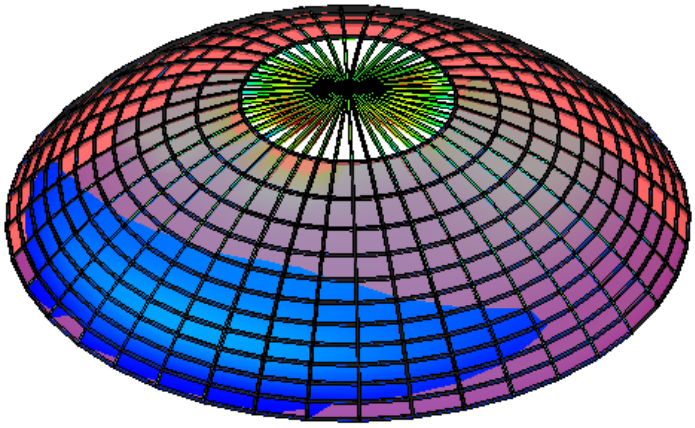


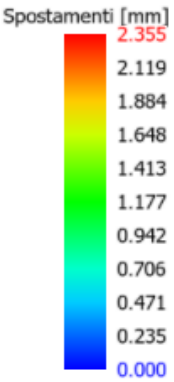


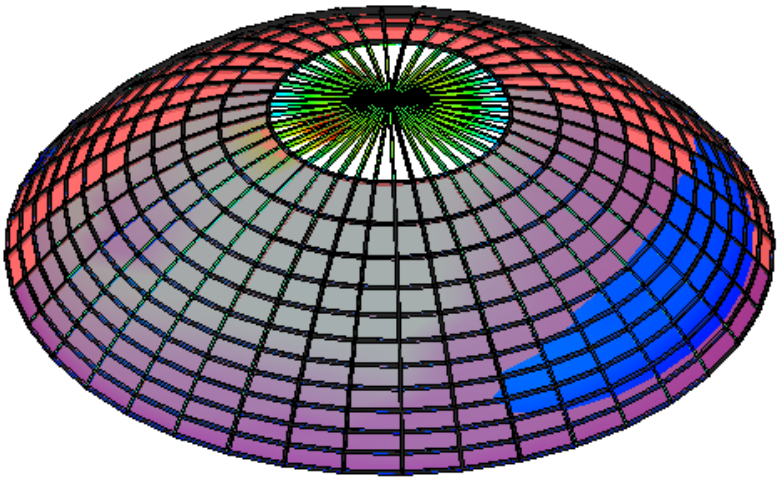


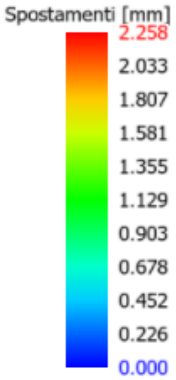


Sisma direzione X e Y

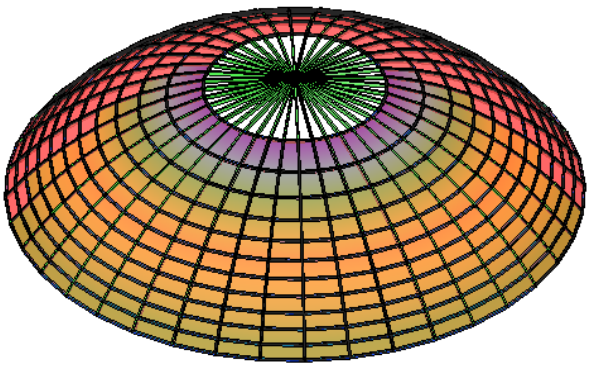


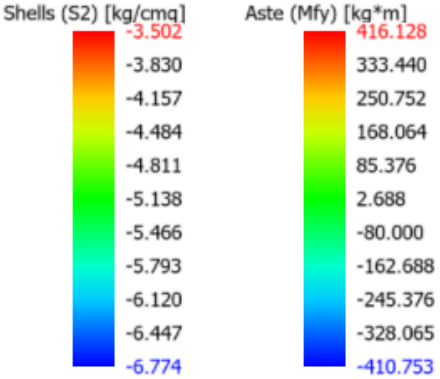




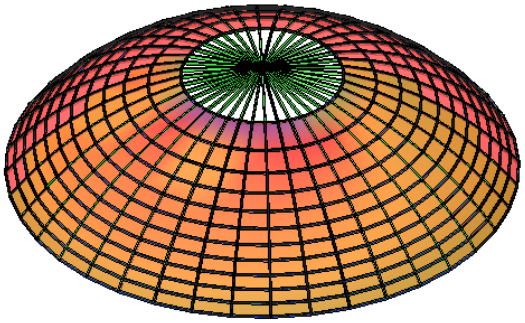


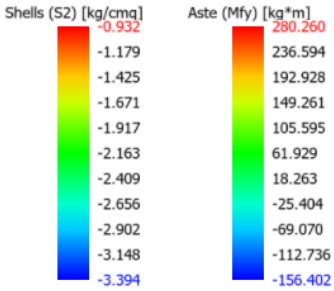
Sollecitazioni , tensioni principali carichi verticali

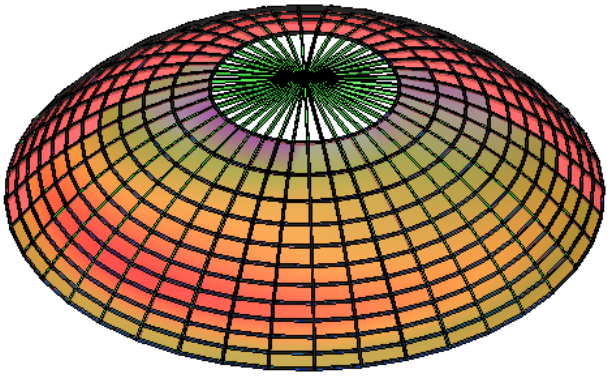


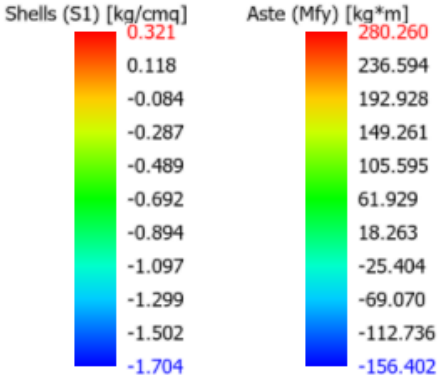


Sisma direzione X

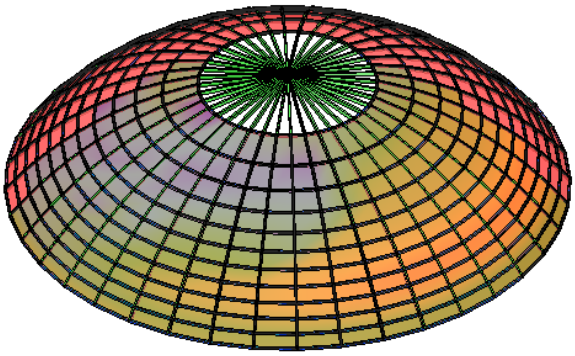


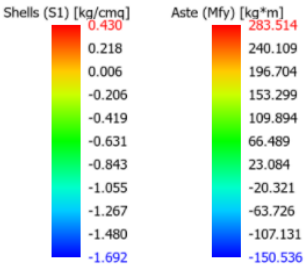


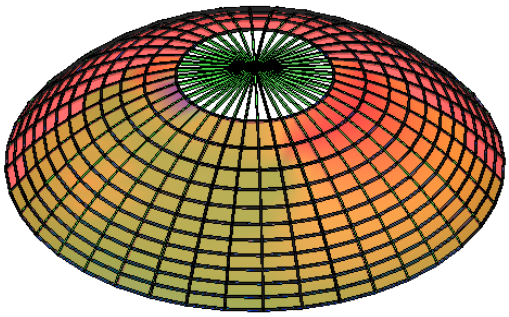


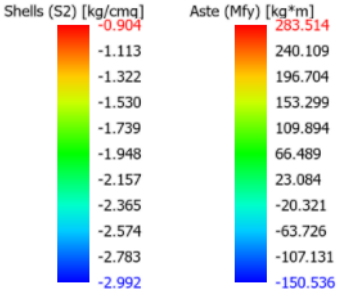


Sisma Direzione Y









I risultati della analisi di buckling per soli carichi verticali e coefficienti parziali γ_G *=1,3 ;* γ_Q *=1,5 ;* ***Moltiplicatore critico α > 10***

(Buckling)

N°	fattore
1	41.289
2	97.973
3	97.973
4	150.162
5	155.496
6	155.496
7	157.518
8	157.518
9	163.753
10	163.753

Per la stessa cupola sostituiamo l'elemento plate shell con una lastra di vetro avente le seguenti caratteristiche

Modulo di elasticità normale E = 650000 daN/cmq
Modulo di poisson 1/m = 0,23
Peso specifico γ = 2500 kg/mc
Spessore lastra 5 cm , tre strati di vetro da 13 mm , con intercalare

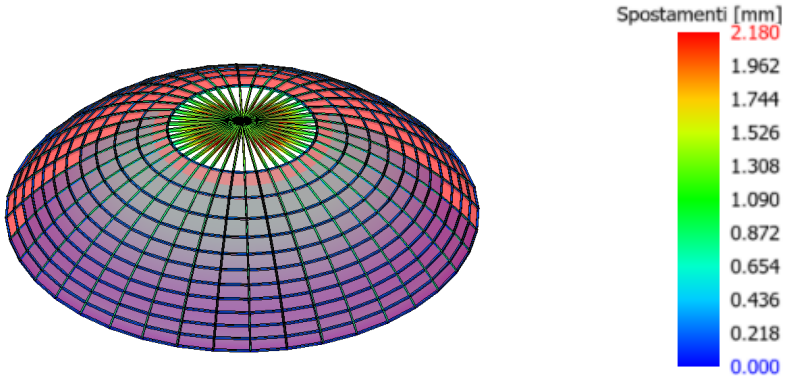
I risultati della analisi di buckling per la medesima condizione di carico
Moltiplicatore critico α > 10

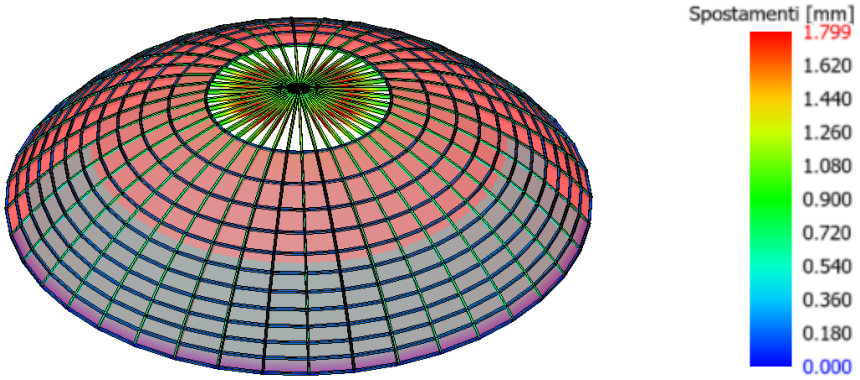
(Buckling)

N°	fattore
1	42.508
2	112.832
3	112.832
4	113.805
5	113.805
6	114.968
7	114.968
8	118.056
9	118.056
10	124.144

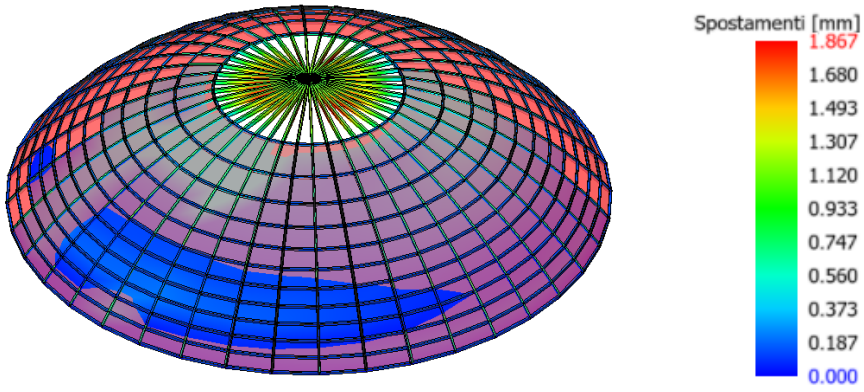
La cupola attraverso la collaborazione del vetro non dà né problemi di instabilità de-formazioni e stato tensionale, ovviamente come per il pannello in legno va eseguita la verifica del collegamento del pannello nel riquadro

Le deformazioni per Carico verticale

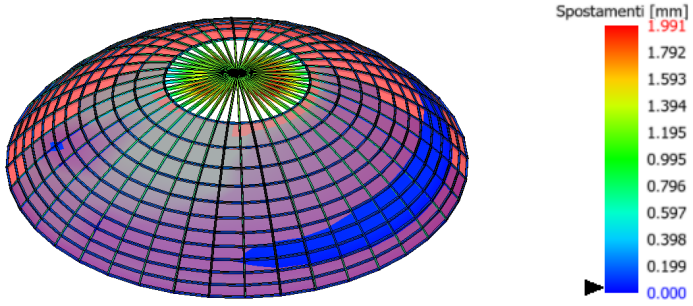




Sisma direzione X



Sisma direzione Y



Per la stessa struttura eliminiamo gli elementi plate-shell ed inseriamo lastre di solai deformabili con medesimo carico

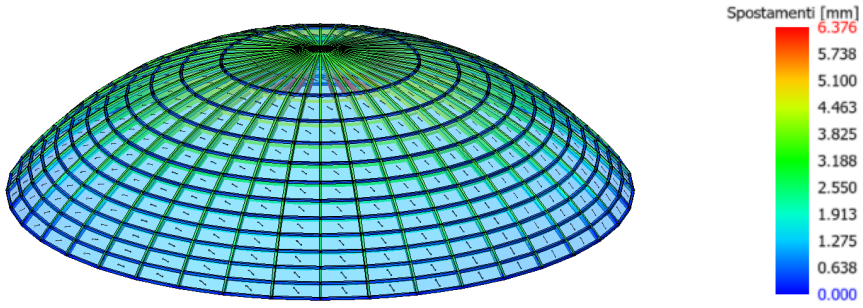
Neve 260 daN /mq
Peso proprio 40 daN/mq
Guaina 20 daN /mq

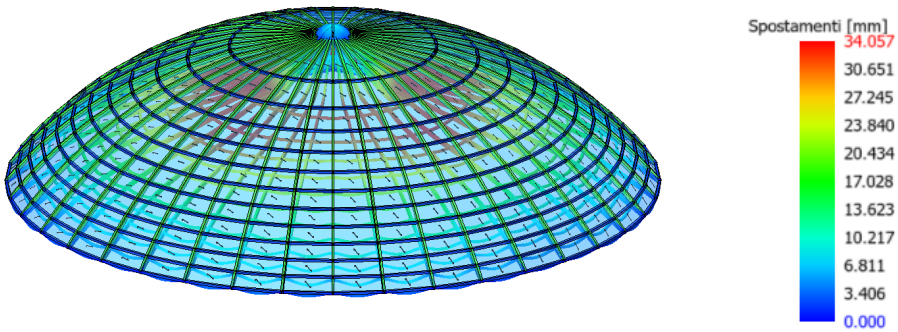
Per la modellazione non si può fare la ipotesi di impalcato rigido poiché impone limitazioni agli spostamenti verticali ed alla conseguente deformata ; è stata eseguita come per le precedenti strutture una modellazione a membrana con impalcato deformabile . I risultati della analisi di instabilità globale evidenziano il collasso della struttura conseguente ad una errata modellazione FEM .

(Buckling)

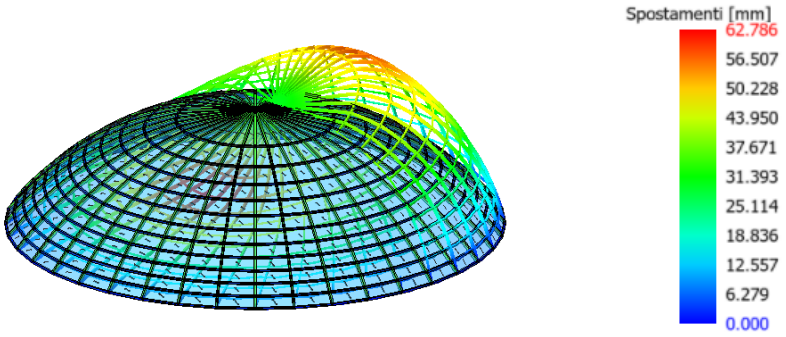
N°	fattore
1	1.430
2	1.430
3	1.515
4	1.517
5	1.520
6	1.520
7	1.642
8	1.642
9	1.711
10	1.711

Moltiplicatore critico α<< 10
Riportiamo le deformazioni per soli carichi verticali

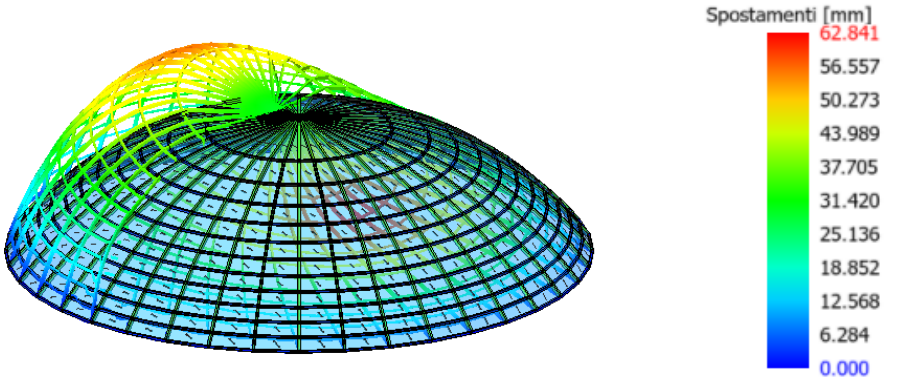




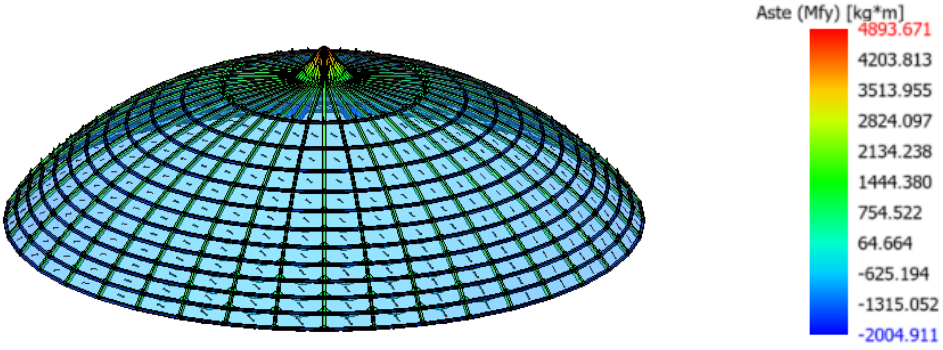
Sisma direzione X



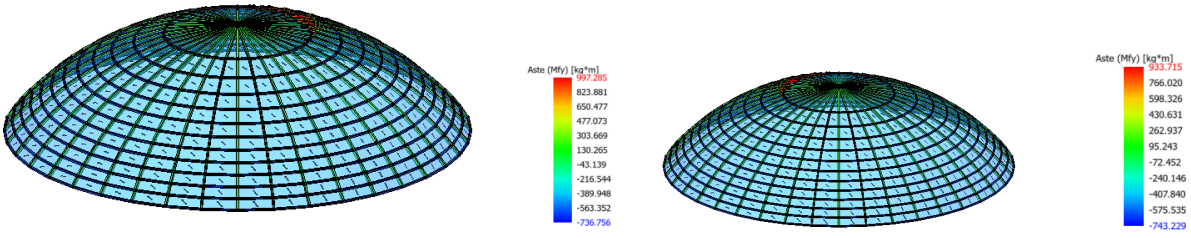
Sisma direzione Y



Le sollecitazioni flettenti sulle aste carico verticale

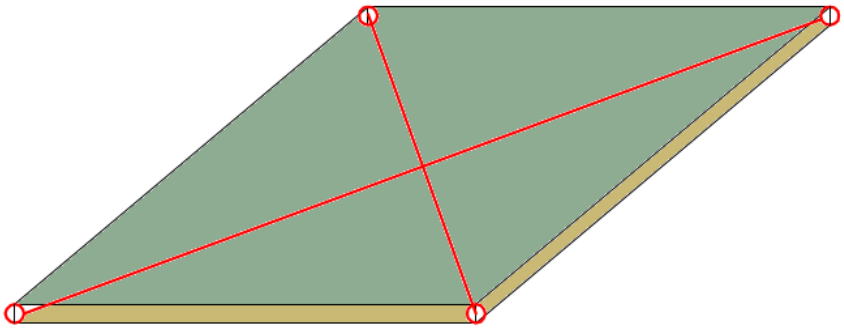


Sisma direzione X e Y

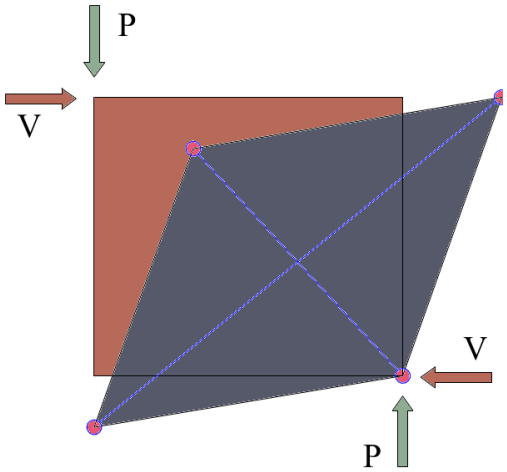


Le aste della cupola costituenti gli archi e i meridiani non sono verificate;

Il calcolo e la costruzione della cupola deve avvenire con la collaborazione dei pannelli il cui comportamento lo possiamo assimilare ad una doppia diagonale trasformando la cupola in cupola reticolare. Il pannello sia esso in legno o vetro deve interagire con le aste adiacenti è contenuto nel piano e può essere modellato con due aste incernierate agli estremi



Traslando la teoria delle tamponature in laterizio inserite nelle maglie di telaio delle strutture in cemento armato si può determinare la larghezza della singola diagonale in funzione della tipologia di materiale impiegato e modellare la cupola come una cupola reticolare con doppia diagonale resistente a trazione e a compressione .



Per questa schematizzazione il materiale deve avere il medesimo comportamento a trazione e compressione , gli spostamenti verticali e orizzontali dovuti alla deformabilità flessionale e tagliante del pannello

$\Delta_O = V^* H^3/(12^*E^*I_X) + \chi\ ^*V^*H/G^*A)$

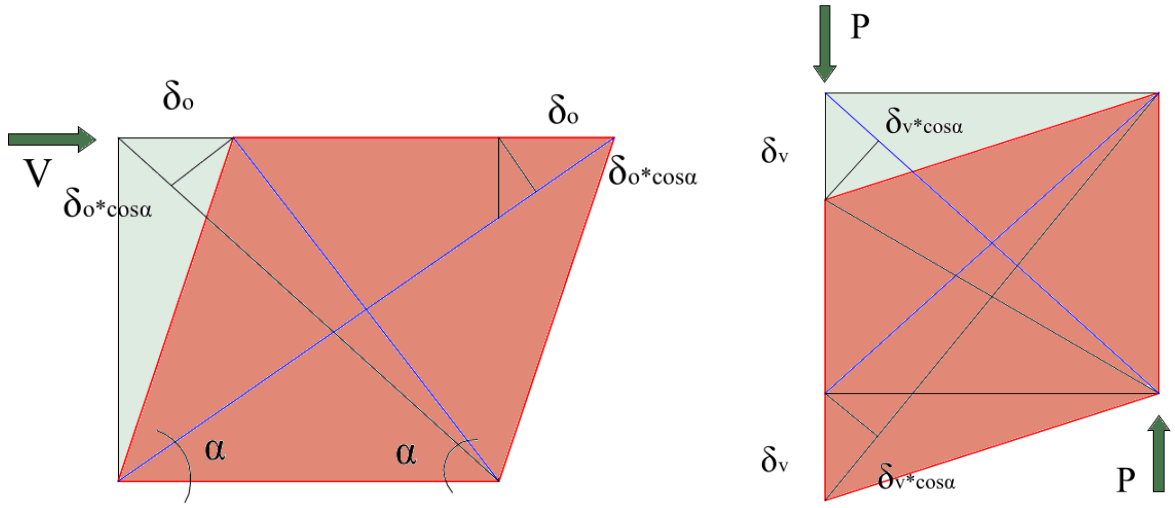
$\Delta_V = P^*B^3/(12^*E^*I_Y) + \chi\ ^*P^*B/G^*A)$

Le rispettive rigidezze orizzontali e verticali del pannello

$K_O = 1/[(12^*E^*I_X)/H^3) + (G^*A)/(\chi^*H)]$; $K_V = 1/[(12^*E^*I_Y)/(B^3) + (G^*A)/(\chi^*B)]$;

$\Delta_O = V/K_O$; $\Delta_V = P/K_V$

Le componenti degli spostamenti secondo le 2 diagonali :



La prima compressa $\delta_C = (\delta_O + \delta_V)*\cos\alpha$; $tg\alpha = H/B$
La seconda tesa $\delta_T = (\delta_O + \delta_V)*\cos\alpha$;

La rigidezza della diagonale ipotizzando u comportamento elastico lineare omogeneo isotropo sia a trazione che a compressione

$K = EA/d$; $\delta_C = N_C*d/EA$; $\delta_T = N_T*d/EA$;

Gli sforzo normali $N_C = (V+P)/(2*\cos\alpha)$ $N_T = (V+P)/(2*\cos\alpha)$

$\delta_C = (V+P)/(2*\cos\alpha)*d/EA$; $\delta_T = (V+P)/(2*\cos\alpha)*d/EA$;

$(\delta_O + \delta_V)*\cos\alpha = (V+P)/(2*\cos\alpha)*d/EA$;

$(\delta_O + \delta_V)*\cos\alpha = (V+P)/(2*\cos\alpha)*d/EA$;

$(\delta_O + \delta_V) = (V+P)/(2*\cos\alpha^2)*d/EA$; $(V/K_O + P/K_V) = (V+P)/(2*\cos\alpha^2)*d/EA$;

Disaccoppiamo la equazione

$V/K_O = V/(2*\cos\alpha^2)*d/EA$; $P/K_V = P/(2*\cos\alpha^2)*d/EA$;

$EA = K_O*(2*\cos\alpha^2)*d$; $EA = K_V*(2*\cos\alpha^2)*d$; *eseguiamo la somma*

$EA = (K_O+K_V)(2*\cos\alpha^2)*d$; $A = t*s$ *s spessore pannello t larghezza diagonale*

$A = (K_O+K_V)(2*\cos\alpha^2)*d/E$; $t = (K_O+K_V)(2*\cos\alpha^2)*d/(s*E)$;

Lo spessore delle due diagonali equivalenti come da tecnica delle costruzioni

$t=\{1/[(12*E*I_X)/H^3)+(G*A)/(\chi*H)]+1/[(12*E*I_Y)/(B^3)+(G*A)/(\chi*B)]\}*$
**2*cosα^2*d/(s*E)*
Il puntone ed il tirante hanno la stessa sezione
E modulo elasticità normale pannello
G modulo elasticità tangenziale
B larghezza pannello
H altezza pannello
tgα= H/B ; α angolo inclinazione diagonale tesa e compressa
*A = s*t area diagonale ; t spessore pannello ; s larghezza diagonale*
I_X = tB^3/12 momento di inerzia ; I_Y = t*H^3/12 momento di inerzia ;*
χ = 6/5 fattore di taglio sezioni rettangolare .
L'elemento plate-shell è inclinato comunque inserito in una maglia appartenente ad un piano di conseguenza per la definizione delle diagonali ci interessano gli spostamenti le deformazioni e sollecitazioni complanari.

Eseguiamo un ulteriore calcolo della nostra cupola aggiungendo il carico da vento che per facilitare l'inserimento dei dati nel software ipotizziamo uniforme su tutta la cupola. La distribuzione delle azioni del vento su cupole sferiche come da istruzioni CNR

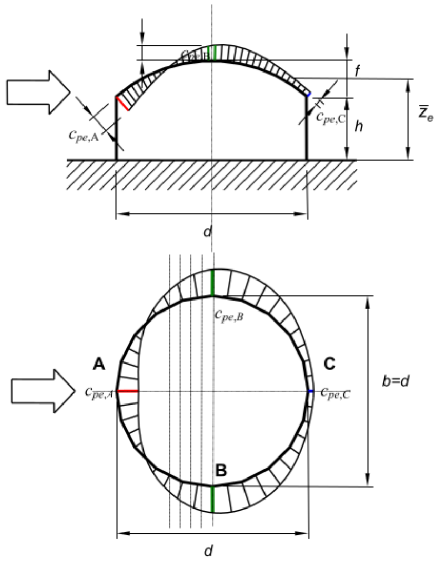


Figura G.18 – Schema di riferimento per cupole sferiche.

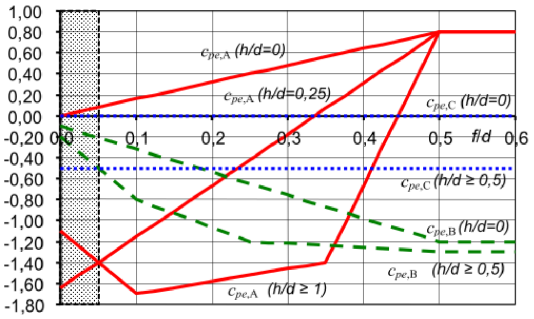


Figura G.19 – Coefficienti di pressione per cupole sferiche.

Consideriamo una azione statica pari a :

$$\boldsymbol{P = Q_r * C_e * C_p * C_d}$$

pressione cinetica $Q_r = 1/2 * \rho * V_r^{\,2} = 0{,}5 * 27^2 * 1{,}25 = 46$ *daN/mq*

V_r *velocità pari a 27 m/sec*
ρ *densità dell'aria pari a 1,25 kg/mc*
C_e *coefficiente di esposizione*
C_p *coefficiente di pressione*
C_d *coefficiente dinamico = 1*

$h/d = 0{,}2$; $f/d = 0{,}24$ $f = 12$ m $d = 50$ m $h = 10$ m

Si ipotizza che la cupola sia collocata su una struttura in cemento armato avente altezza 10 m . Il coefficiente di pressione lo si ottiene dal diagramma riportato figura attraverso una interpolazione lineare

$C_{PA} = 0{,}3$ $C_{PB} = -1{,}1$ $C_{PC} = -0{,}2$ ******

C_e *coefficiente di esposizione risulta dal seguente diagramma per zona III ed altezza* $Z > 10$ m *e per* $C_T = 1$ $C_e \approx 2{,}3$

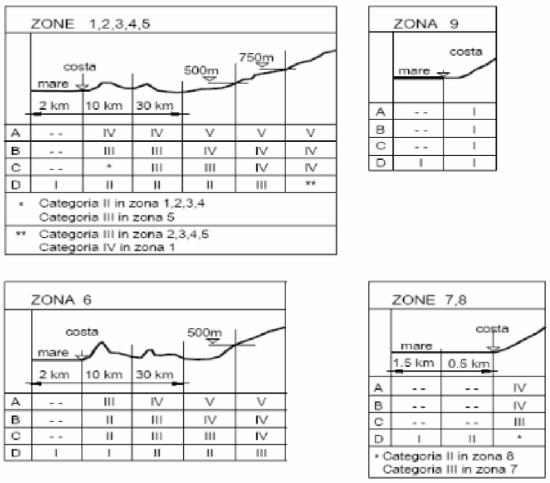


Fig. 3.3.2 - *Definizione delle categorie di esposizione*

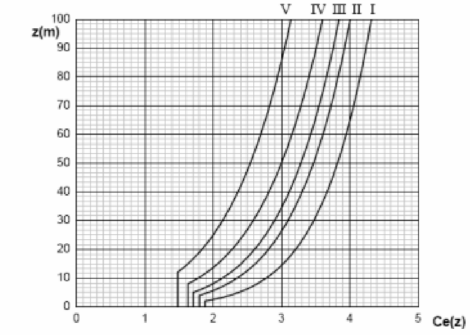


Fig. 3.3.3 - *Andamento del coefficiente di esposizione* c_e *in funzione dell'altezza sul suolo (per* $c_t = 1$*)*

In modo approssimato per la cupola consideriamo i seguenti valori di P per le tre parti della cupola ortogonali alla superficie come da figura

P_A = 32 daN/mq P_B = 115 daN/mq P_C = 20 daN/mq

Per facilitare l'inserimento dei carichi nel software dividiamo la cupola in due parti

D/3 = 16,60 m ≈ 17 m 2/3*D= 33,4 m ≈ 33 m

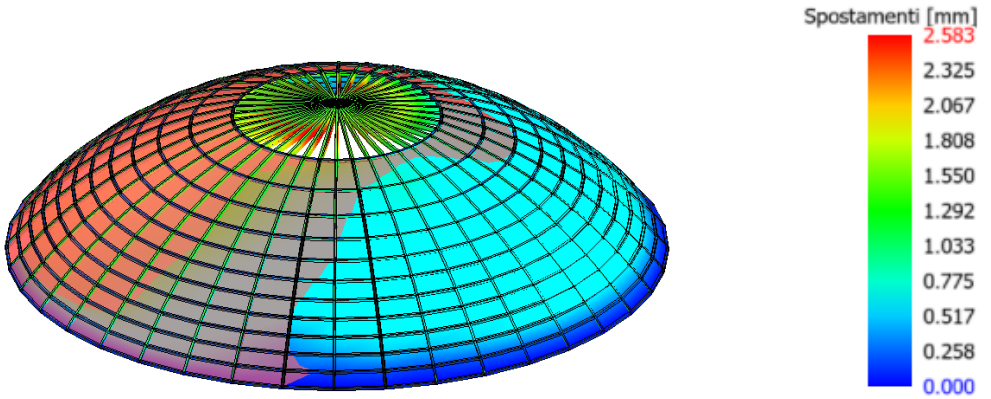
ed applichiamo i seguenti carichi normali aventi all'elemento ***plate shell***

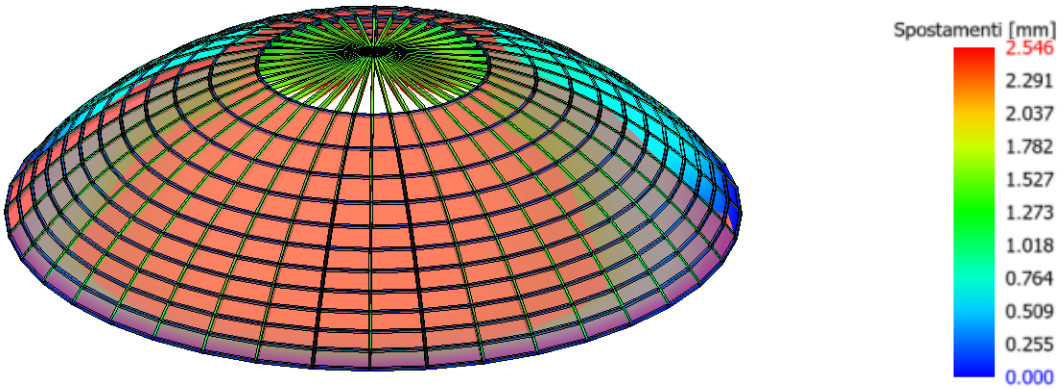
P_1=40 daN/mq *verso discorde alla normale*

P_2=120 daN/mq *verso concorde alla normale*

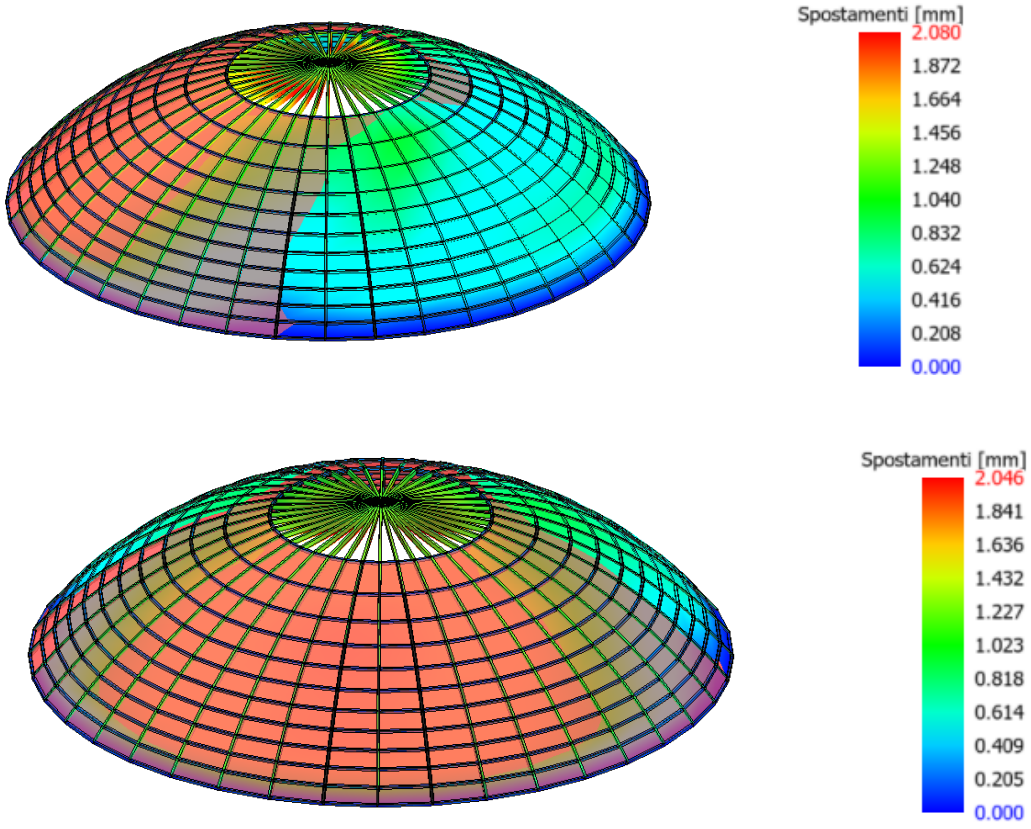
I singoli elementi della volta aste , ***plate-shell*** *sono tutti verificati , riportiamo le deformazioni*

Vento direzione X e Y carico verticale sfavorevole

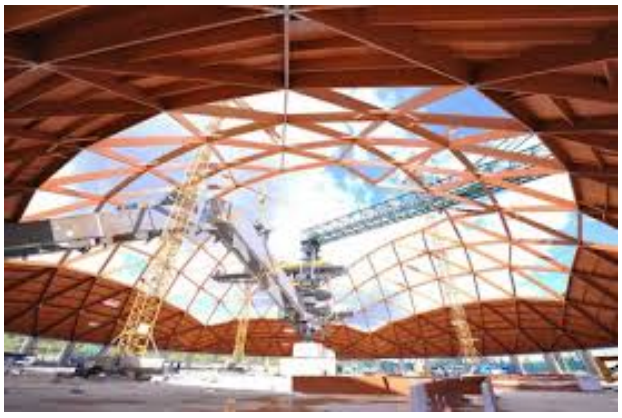




Vento direzione X e Y carico verticale favorevole



La cupola in lamellare è una eccellente soluzione di design soprattutto per strutture sportive, edifici religiosi , musei ect qualora venga integrata con pannelli di vetro assolvendo anche alla funzione di serra bioclimatica in modo da riscaldare l'ambiente sottostante ; se poi il vetro è colorato il gioco della luce solare, la cupola e l'edificio diventano ancora più gradevoli esteticamente.





5- La cupola in acciaio , alluminio e vetro.

Le cupole metalliche sono delle strutture reticolari dove nei riquadri tra le aste vengono inserite delle diagonale in modo che il sistema struttuirale diventi perima isostatico e poi iperstatico co una sola diagonale e nodi cerniera; all'interno del riquadro viene inserito un pannello di vetro inutili ricordare le architetture in metallo e vetro quali il louvre di Parigi o il British Museum di Londra





La galleria Umberto di Napoli e la galleria Vittorio Emanuele di Milano con le cupole in acciaio e vetro :



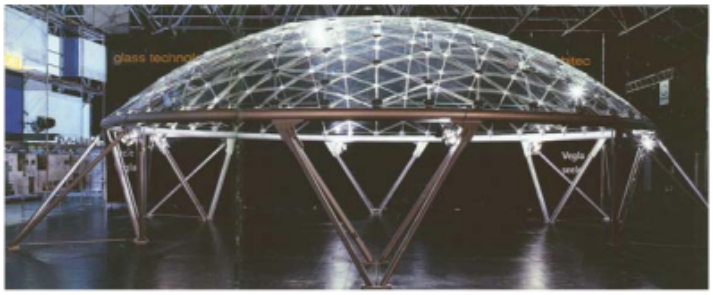


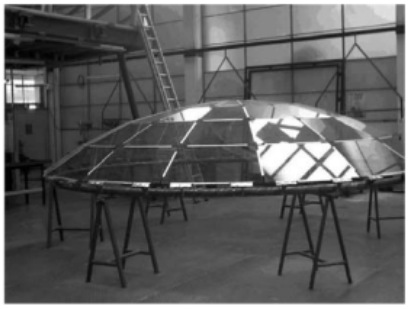
Se osserviamo la struttura portante di queste cupole individuiamo al solito meridiani e parallelli con orditura metallica al loro interno, gli archi costitutenti i meridiani sono delle vere e proprie travature reticolari ; le cupole in metallo e vetro sono oggi utilizzate per serre bioclimatiche per orti giardino ma per la progettazione di edifici religiosi islamici e cristiani rappresentano una soluzione architettonico moderna ed un simbolismo antico che con la introduzione del vetro risolve sia la problematica della illuminazione che del riscaldamento della chiesa tramite apporti solari. Vanno integrate con tende solari da chiudere ed aprire anche per il singolo pannello attraverso la domotica ricordando il famoso edficio di Singapore adibito a serra orto giardino.



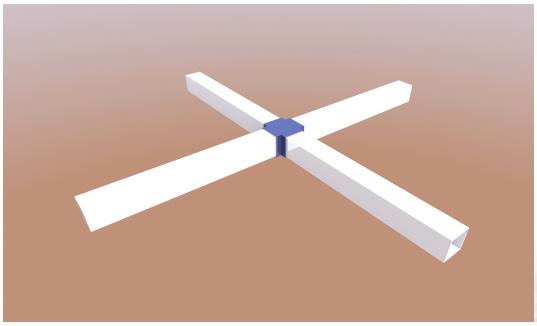


Una cupola in metallo e vetro sia esso acciaio o alluminio è una struttura molto leggera dove diventa fondamentale la interazione e resistenza del pannello di vetro nel riquadro per la modellazione FEM in modo che i profili metallici abbiano dimensioni contenute . Oggi vengono utilizzate anche in agricoltura come serre solari





Le azioni sismiche viste le masse in gioco sono ridotte strutture solecitate prevalentemente da azioni del vento funzione della altezza ed esposizione e dal carico da neve per zone di montagna ; per quanto concerne i giunti tra le aste metalliche possono essere dei nodi incastro se trasmettono la flessione o nodi cerniera







Il sistema a nodi sferici trasmette solo sforzo normale la rigidezza flesionale è ridotta le aste vanno modellate come incernierate agli estremi ; l'altro sistema importato dalla tecnologia degli edifici intelaiati in acciaio con travi e pilastri aventi profilo scatolare dove le aste vengoni inserite nel nodo metallico rirpistinando la contnuità strutturale trasmettendo tutte le sollecitazioni flessionale taglio sforzo normale e torsione. Riportiamo la modellazione di una cupola FEM in acciaio (alluminio) e vetro ponendo attenzione alla problematica della instabilità globale tipica di queste strutture .

La cupola si compone di meridiani e paralleli diametro 50 m altezza 12,5 m per gli anelli e gli archi si utilizzano dei profilati scatolari quadrati di lato 10 cm. Il numero complessivo di archi è pari a 20 per un interasse angolare di 18° , nei riquadri è inserito un pannello di vetro (in alternativa legno) da dimensionare e calcolare (istr. CNR DT 210 2013 strutture invetro) che interagisce con la deformazione delle aste incrementando la rigidezza e limitando gli spostamento ovvero irrigidendo la cupola. Il giunto tra le aste è in grado di trasmettere tutte le sollecitazioni un nodo di acciaio come riportato nella figura precedente saldato che ripristina la rigidezza , il sistema non è labile poichè il nodo è un incastro interno.
Caratteristiche del profilo asta : Spessore 3- 4 mm
Acciaio E = 206000 N/mmq ; γ = 7800 daN/mc ; 1/m = υ= 0,125
Alluminio E = 75000 N/mmq ; γ = 2500 daN/mc ; 1/m = υ= 0,3

a mm	s mm	Peso kg/m	Sezione metallica cm^2	Momenti di inerzia Jx = Jy cm^4	Moduli di resistenza Wx = Wy cm^3	Raggi di inerzia ix = iy cm
20	1,5	0,87	1,11	0,64	0,64	0,76
	2,0	1,13	1,44	0,79	0,79	0,74
25	1,5	1,11	1,41	1,30	1,04	0,96
	2,0	1,44	1,84	1,63	1,31	0,94
30	2,0	1,76	2,24	2,94	1,96	1,15
	3,0	2,54	3,24	3,99	2,66	1,11
35	2,0	2,07	2,64	4,81	2,75	1,35
	3,0	3,01	3,84	6,61	3,78	1,31
40	2,0	2,39	3,04	7,34	3,67	1,55
	3,0	3,49	4,44	10,20	5,10	1,52
	4,0	4,52	5,76	12,60	6,30	1,48
50	2,0	3,01	3,84	14,77	5,91	1,96
	3,0	4,43	5,64	20,85	8,34	1,92
	4,0	5,78	7,36	26,15	10,46	1,89
60	2,0	3,64	4,64	26,05	8,68	2,37
	3,0	5,37	6,84	37,14	12,38	2,33
	4,0	7,03	8,96	47,07	15,69	2,29
70	2,0	4,27	5,44	41,96	11,99	2,78
	3,0	6,31	8,04	60,27	17,22	2,74
	4,0	8,29	10,56	76,95	21,98	2,70
80	2,0	4,90	6,24	63,32	15,83	3,19
	3,0	7,25	9,24	91,45	22,86	3,15
	4,0	9,55	12,16	117,38	29,35	3,11
	5,0	11,76	15,00	141,25	35,31	3,07
100	2,0	6,15	7,84	125,54	25,11	4,00
	3,0	9,14	11,64	182,71	36,54	3,96
	4,0	12,06	15,36	236,34	47,27	3,92
	5,0	14,92	19,00	286,58	57,32	3,88
120	2,0	7,41	9,44	219,13	36,52	4,82
	3,0	11,02	14,04	320,53	53,42	4,78
	4,0	14,57	18,56	416,73	69,46	4,74
	5,0	18,06	23,00	507,92	84,65	4,70
150	3,0	13,85	17,64	635,57	84,74	6,00
	4,0	18,34	23,36	830,53	110,74	5,96
	5,0	22,77	29,00	1.017,42	135,66	5,92
180	3,0	16,67	21,24	1.109,37	123,26	7,23
	4,0	22,11	28,16	1.454,56	161,62	7,19
	5,0	27,48	35,00	1.787,92	198,66	7,15
200	3,0	18,56	23,64	1.529,43	152,94	8,04
	4,0	24,62	31,36	2.008,71	200,87	8,00
	5,0	30,62	39,00	2.473,25	247,33	7,96
	6,0	36,55	46,56	2.923,35	292,33	7,92
220	4,0	27,13	34,56	2.688,31	244,39	8,82
	5,0	33,76	43,00	3.314,58	301,33	8,78
	6,0	40,32	51,36	3.923,22	356,66	8,74
250	4,0	30,90	39,36	3.970,90	317,67	10,04
	5,0	38,47	49,00	4.904,08	392,33	10,00
	6,0	45,97	58,56	5.814,23	465,14	9,96

Riportiamo i risultati della modellazione FEM specificando i carichi e le combnazioni agenti.

Carico verticale da neve 260 daN/mq

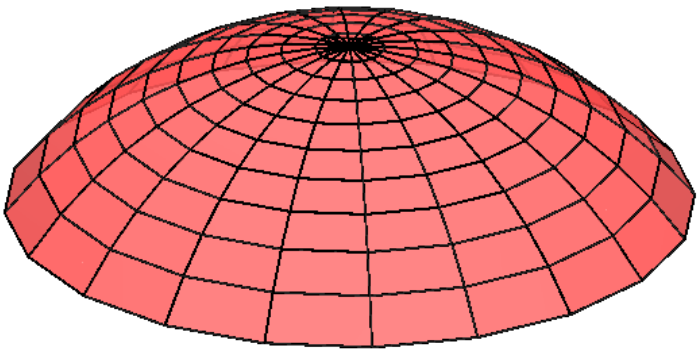
Dividiamo la cupola in due parti

*D/3 = 16,60 m ≈ 17 m 2/3*D= 33,4 m ≈ 33 m*

ed applichiamo i carichi orizzontali all'elemento ***plate shell*** *direzione X e Y*

P_1=40 daN/mq P_2=120 daN/mq

Modellazione FEM



Risultati analisi di buckling per aste in acciaio e alluminio

(Buckling)

N°	fattore
1	61.757
2	62.281
3	62.281
4	63.835
5	63.835
6	66.354
7	66.354
8	69.701
9	69.701
10	73.604

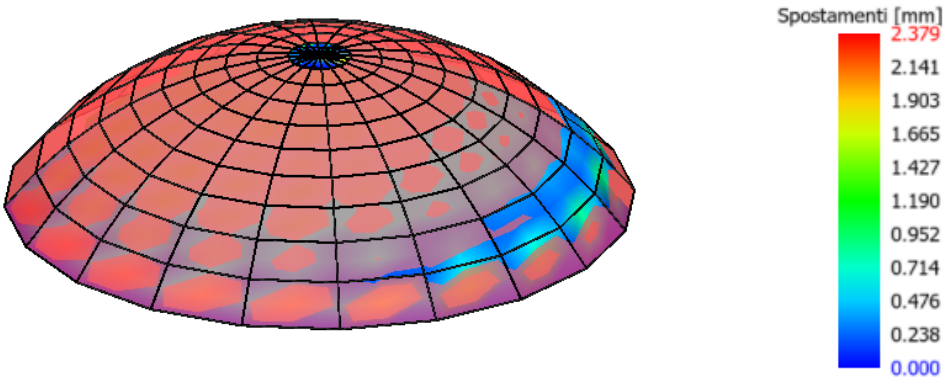
(Buckling)

N°	fattore
1	60.699
2	61.227
3	61.227
4	62.789
5	62.789
6	65.310
7	65.310
8	68.626
9	68.626
10	72.405

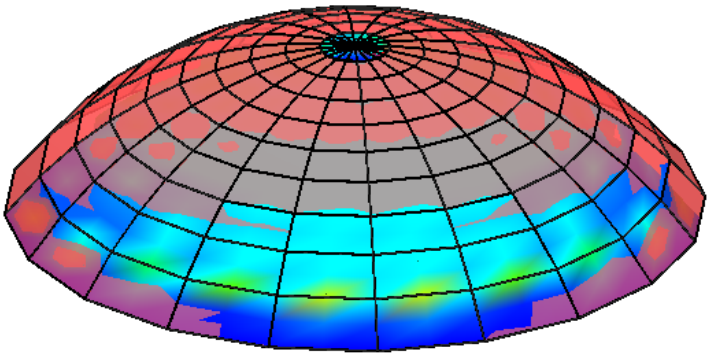


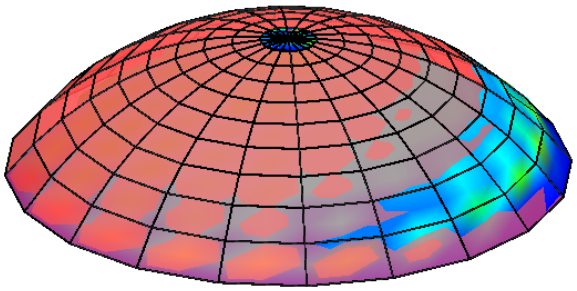
Il carico da neve ha un coefficiente 0,75 .
La differenza nel valore dei moltiplicatori crititci per acciaio e alluminio per la prsenza del pannello in vetro è insignificante α =61,75 α =60,69

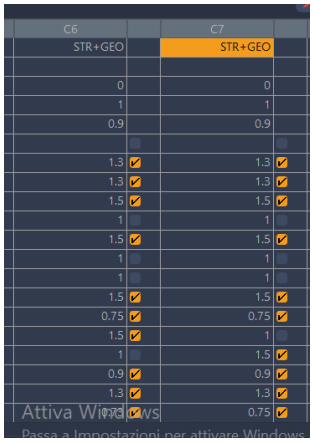
Deformazioni per la CUPOLA IN ACCIAIO



Vento X e Y

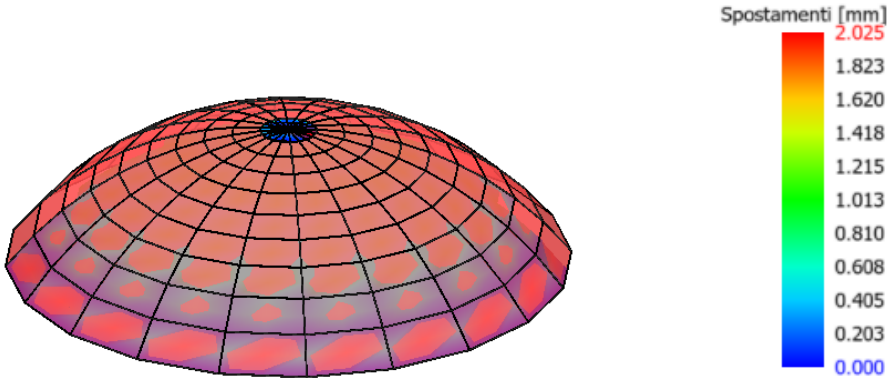




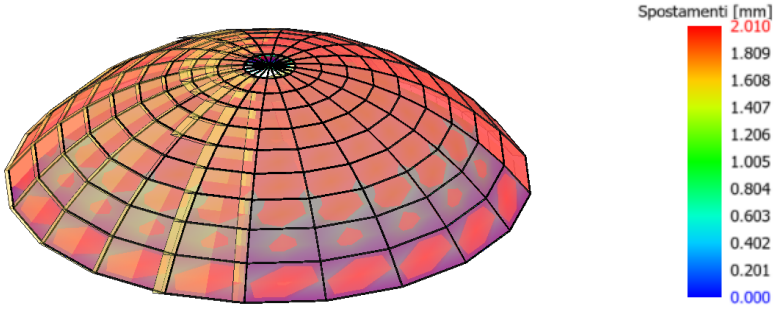


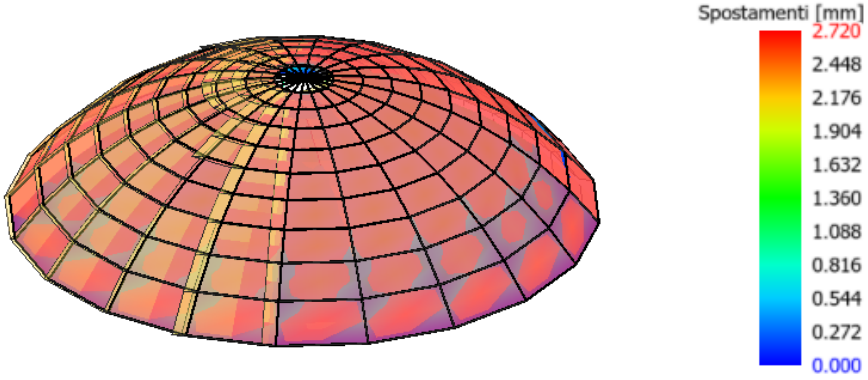
Vento amplificato di 1,5
Neve amplificata di 0,75

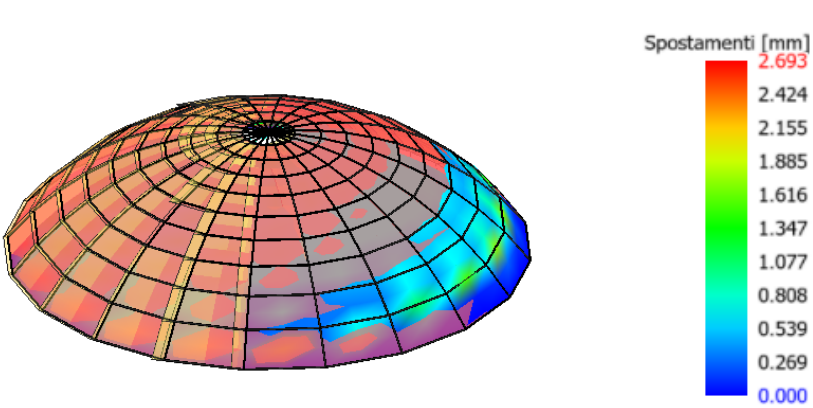
Gli spostamenti per azioni sismiche sempre nel comune di Castel di Sangro vista la massa in gioco e quindi azioni sisimche ridotte sono inferiori alle azioni orizzontali del vento



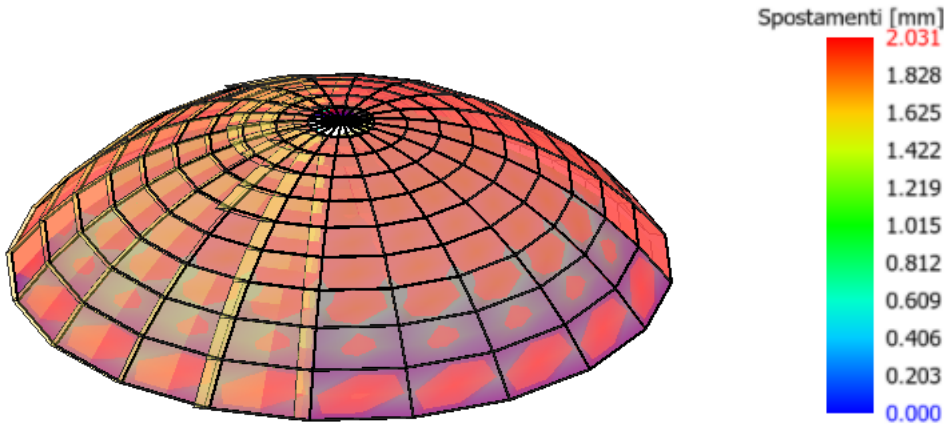
Per la volta in alluminio più deformabile e leggera







Sisma direzione X e Y



I risultati tra le due cupole in acciaio e alluminio pur essendoci differenza nei moduli elastici è lo stesso per la presenza dei pannelli poichè la rigidezza della cupola è demandata esclusivamente all'elemento plate shell inserito nei riquadri e quindi al vetro o al legno.

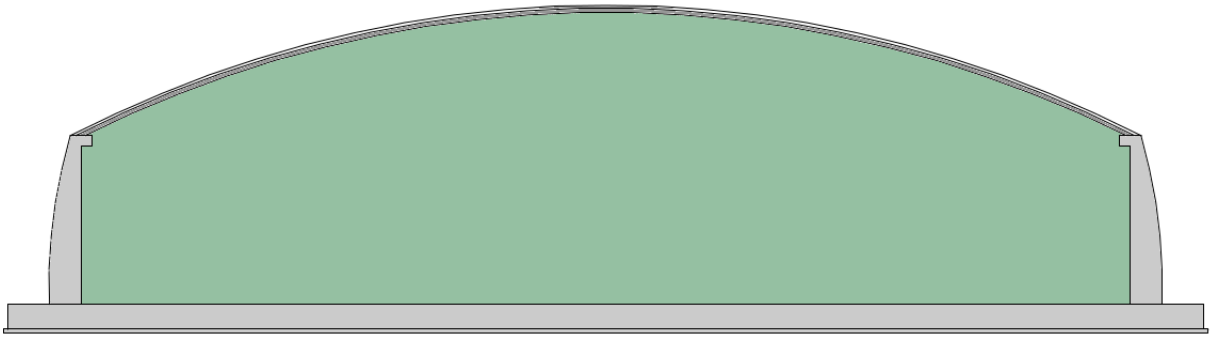
6- La cupola in cemento armato

Le cupole in cemento armato vengono costruite per le chiese islamiche il getto non è di facile realizzazione poichè prevede un tavolato inferiore che ha la funzione di casero per cui è preferibile utlizzare elementi prefabbricati da assemblare; ti poica è la cupola ribassata del palazzetto dello sport di Roma progettata da Pier Luigi Nervi attraverso la introduzione di pilastri ad Y la cui funzione è la eliminazione delle spinte orizzontali.

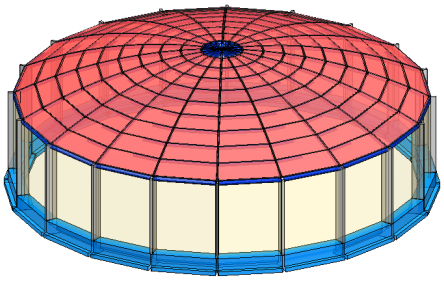


É una cupola con nervature che seguono le isostatiche di compressione strutture studiate realizzate e costruite dall'architetto Pier Luigi Nervi in Italia sono numerosi gli esempi di volte reticolari e di hangar in cemento armato. Il disegno delle nervature e le isostatiche all'intradosso della cupola conferiscono al palazzetto una design interno gradevole anche se la costruzione è complicata si hanno elevate azioni sismiche e tali strutture sono state concepite esclusivamente per carichi verticali per cui hanno un funzionamento dinamico errato. In questo paragrafo eseguiamo la modella-

zione FEM di una cupola ribassata in c.a. avente spessore di 12 cm diametro 50 m e freccia 6 m con nervature quali archi e meridiani aventi sezione 20x40, anello di base 30x50 , trave di fondazione a T rovescio che definisce un anello di fondazione sollecitata da azioni sismiche orizzontali e verticali;assume importanza l'analisi di buckling per il carico verticale dovuto al peso proprio; le spinte orizzontali sui pilastri sono eccessive per cui si utilizza un pilastro setto a sezione variabile lungo la altezza .



Riportiamo la modellazione FEM della cupola con carico da neve verticale pari a 260 daN/mq e azioni sismiche relative al comune di Castel di Sangro.I pilastri per semplicità sono stati modellati a sezione costante 30x150cm ad interasse di 785 cm



Analisi di instabilità globale , moltiplicatori critici per carichi verticali

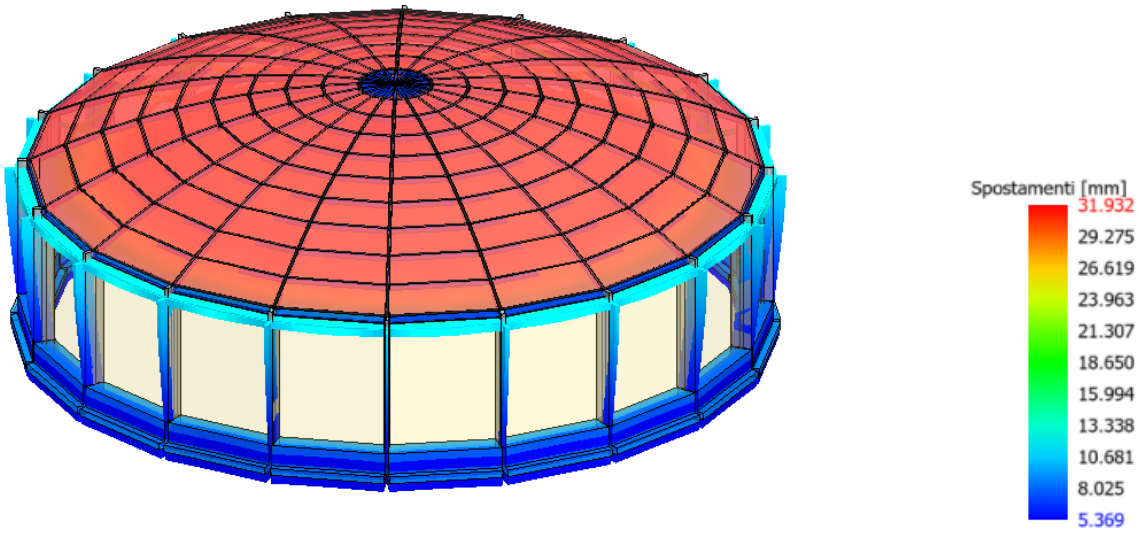
(Buckling)

N°	fattore
1	18.154
2	46.226
3	46.226
4	97.963
5	104.103
6	104.103
7	104.864
8	104.864
9	105.720
10	105.720

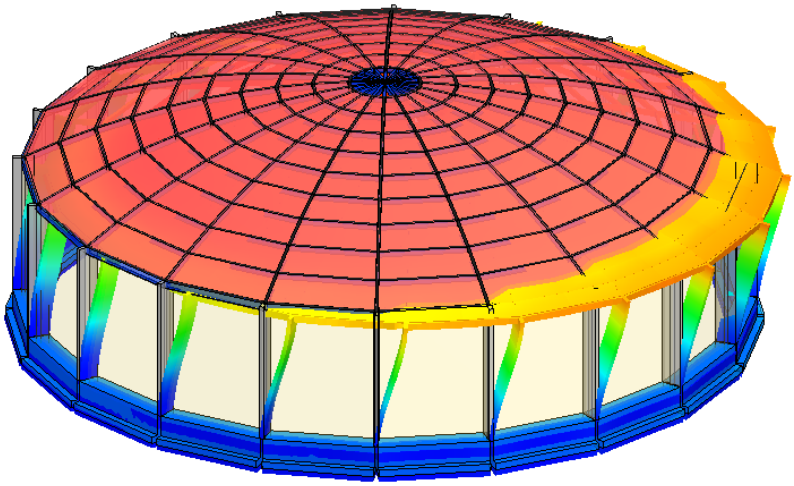
γ_G = 1,5 peso proprio
γ_P =1,5 manto di copertura 60 daN/mq
γ_Q =1,5 neve 260 daN/mq

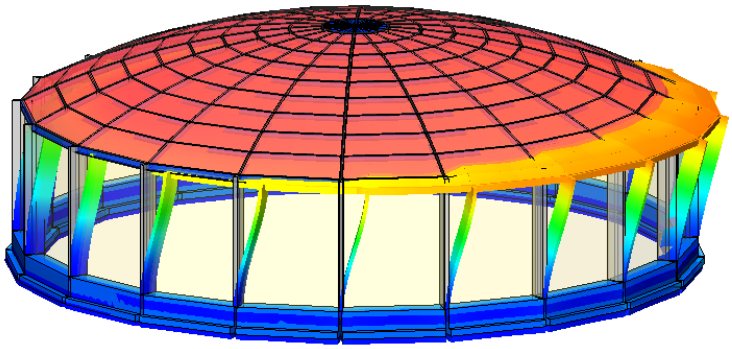
α= 18,15 > 10

Deformazioni per carichi verticali e azioni sismiche X e Y



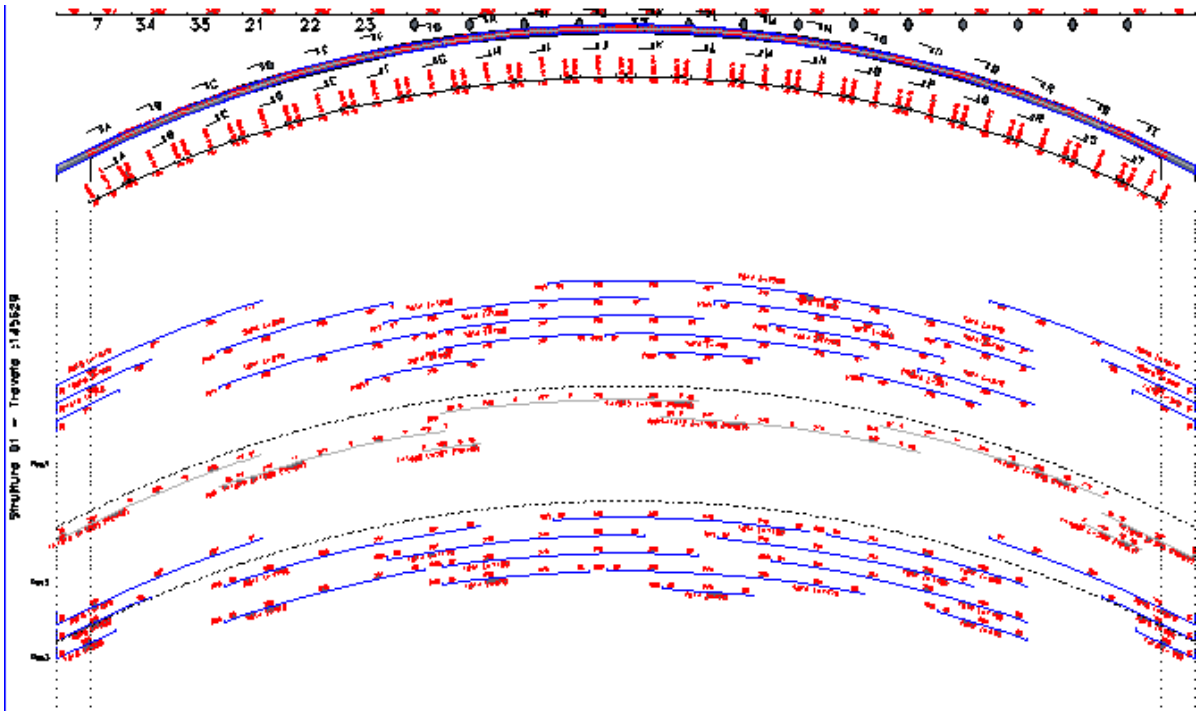
Azioni sismiche direzione X e Y

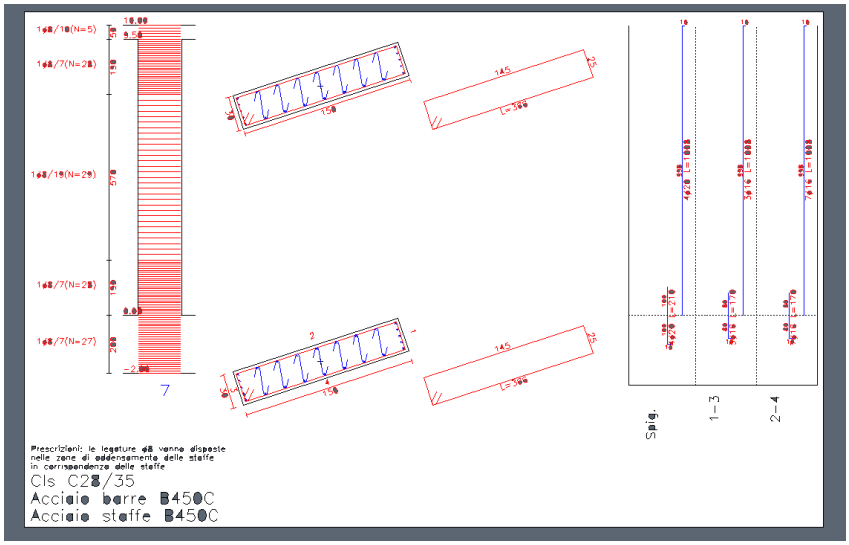


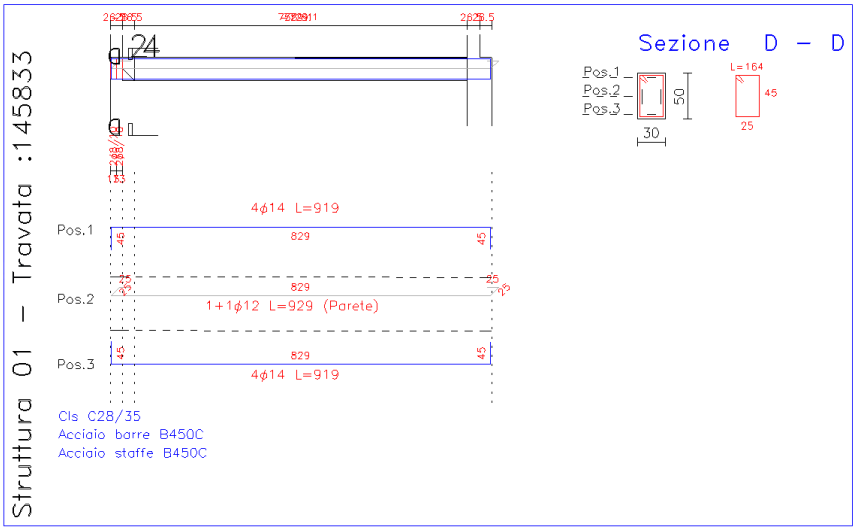


Stante la simmetria strutturale e di carico sia verticale che orizzontale le deformazioni nelle due direzioni sono uguali.

Riportiamo le armature dei meridiani dei pilastri e di una asta dell'anello







La fase di cantiere ovvero la posa in opera della centinatura ed il getto di calcestruzzo richiede tempo ed è molto laboriosa; conviene realizzare la struttura portante in cemento armato prefabbricato con archi realizzati in cantiere sollevati con la gru e messi in opera tra i quali agganciare le aste degli anelli con getti di completamento e pannello di cls alleggerito inserito tra le maglie definite dagli anelli e dagli archi . La cupola prefabbricata viene assemblata in tempi brevi com costi di costruizine ridotti e si possono inserire anche pannelli vetrati disegnandone la copertura .

7- La cupola in muratura: meccanismi di danno

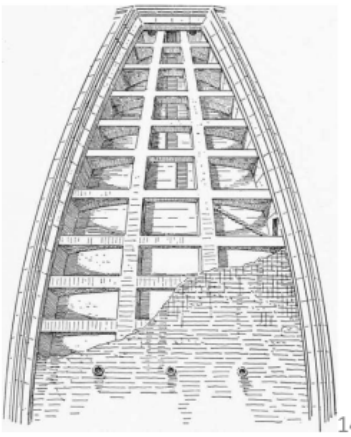
La cupola in muratura per eccellenza in Italia è quella del duomo di Firenze di Santa Maria del Fiore progettata e costruita Filippo Brunelleschi nel rinascimento del cui calcolo e verifica ci occuperemo in questo paragrafo. Le cupole in muratura sono presenti in quasi tutti gli edifici religiosi italiani, che hanno una forma a croce greca o latina e lo spazio centrale vien copertura tramite una cupola in muratura materiale che ha un buon comportamento a compressione mentre a trazione la resistenza è trascurabile pari alla tensione tangenziale di taglio puro f_{vo} *. Anche la chiesa più importante del mio comune di residenza denominata di Santa Maria Assunta propriamente detta* ***"Chiesa Matrice"*** *ha una cupola centrale in muratura la cui struttura portante è caratterizzata da archi principali in pietra emulando lo schema di funzionamento statico della cupola del Brunelleschi. La critica che viene mossa a queste strutture è l'essere state concepite in periodi storici nei quali non si aveva alcuna cognizione teorica degli eventi sismici , costruite in base alla sola esperienza ovvero dal confronto con altri edifici esistenti per cui un evento tellurico può essere dannoso non solo per la chiesa se avviene durante la celebrazione di una funzione religiosa può provocare un grande numero di vittime, si era soliti ripararsi in chiesa anche duranti eventi sismici affidandosi alla preghiera ma le chiese sono gli edifici più vulnerabili sismicamente. La cupola di Santa Maria del Fiore fu realizzata in seguito ad un concorso bandito nel 1418 per completare la cattedrale iniziata nel 1296 da Arnolfo di Cambio e rimasta incompiuta per la quale era prevista una cupola immensa di diametro 42 m .Vinse il concorso Filippo Brunelleschi nel 1420 nominato provveditore della cupola iniziando una impresa rischiosa che lo tenne impegnato per molti anni. La cupola fu completata senza la lanterna nel 1436 e nel 1471 venne posizionata la lanterna completando la cupola.*



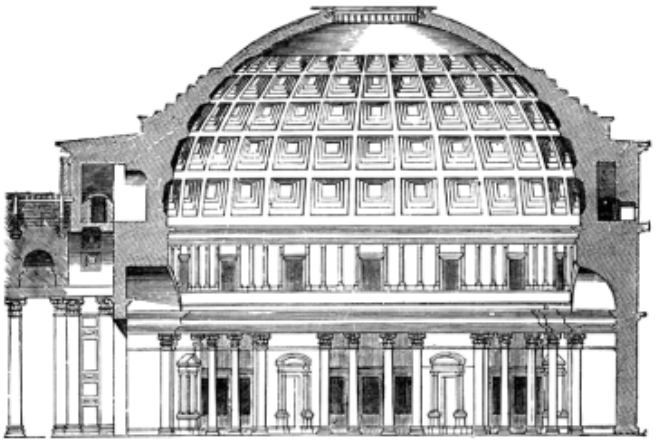
Dal punto di vista architettonico la costruzione della cupola di Santa Maria del Fiorappresenta l'evento che segnò l'inizio del rinascimento cioè la riscoperta dei modelli costruttivi dell'età classica e la contemporanea mutazione della organizzazione del cantiere che vide la separazione dei ruoli del progettista e costruttore tutt'ora adottata; proprio la nuova figura del progettista di cui Brunelleschi fu il capostipite consente di definire la architettura come una disciplina artistico scientifica che da questo momento in poi si inserisce a pieno titolo nel sistema culturale. La cupola è a pianta ottagonale come ben noto dalla teoria statica dell'arco le spinte orizzontali sulle imposte sono tanto maggiori quanto minore è la freccia dell'arco

$H = Q*L^2/8f$,

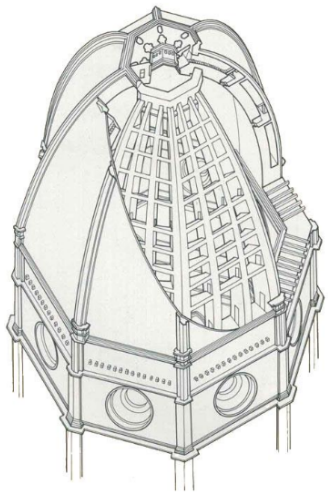
di conseguenza al fine di ridurre le spinte sul tamburo Brunelleschi studiò una forma ogivale, con 8 archi detti costoloni maggiori e sedici costoloni minori sistemati a coppie tra due maggiori richiamando la struttura nervata del Pantheon con anelli ottagonali orizzontali



14



La cupola è a doppia calotta per preservarla dalla umidità e conferirle maggiore magnificenza ma anche per distribuire meglio i pesi all'interno e all'esterno con il risultato di ridurlo della metà . All'esterno i pesi dei costoloni scendono attraverso i costoloni maggiori esterni sugli 8 contrafforti angolari esterni.



La cupola è a Firenze da ben 600 anni non ha mai palesato problematiche di cedimento strutturale sollecitata prevalentemente da carichi verticali , la terra nei suoi movimenti oscillazioni e vibrazioni è stata abbastanza clemente come per la città di Roma poiché un evento sismico danneggerebbe in modo irreparabile la cupola del duomo e il patrimonio monumentale italiano. L'intervento più semplice di adeguamento sismico del duomo senza intervenire attraverso consolidamenti in acciaio , ringrossi in calcestruzzo , intonaci armati materiali fibrorinforzati ect è quello di ridurre le forze orizzontali sulla cupola dovuti alle azioni sismiche funzione del periodo proprio di oscillazione che viste le dimensione degli elementi strutturali e quindi la rigidezza ed il periodo di vibrazione sono molto elevate. Tale riduzione la si consegue attraverso un sistema di isolamento sismico posto sul tamburo , se ipotizziamo la parte inferiore del duomo come struttura rigida il comportamento dinamico della cupola è definito dalla equazione differenziale

$M*Y'' + C*Y' + K*Y = M*Sd(T)$

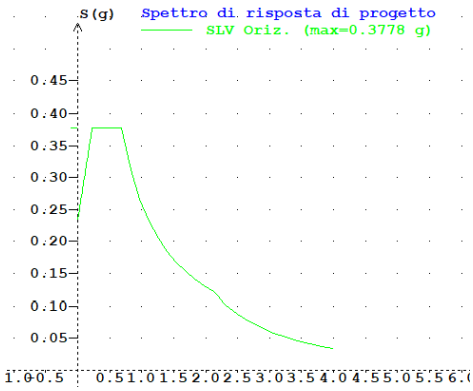
M massa sismica cupola
$K = \sum K_{is}$ *rigidezza isolatori sismici*
C smorzamento viscoso
T periodo fondamentale di vibrazione $T = 2*\pi/\omega$ *dove* $\omega = \sqrt{K/M}$

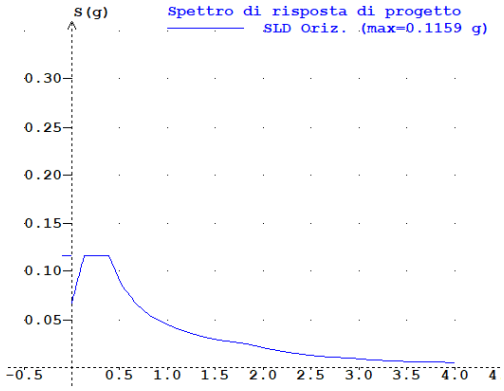
Trascurando il dumping

$M*Y'' + K*Y = M*Sd(T)$; $Y'' + \omega^2 *Y = Sd(T)$ *la soluzione*
$Y(t) = Sd(T)/\omega^2*(1-\cos \omega t)$ *, le azioni sismiche orizzontali inerziali*
$F(t) = -M* Sd(T)*\cos \omega t$ *funzione di Sd(T) ovvero dello spettro di risposta che per la città di Firenze*

Parametri di pericolosità sismica

	ag (g/10)	F0 (adim)	TC*(sec)
SLO	0.46618876	2.55493061	0.25000000
SLD	0.55981241	2.58872416	0.26804884
SLV	1.30788339	2.40726077	0.30000000
SLC	1.66254827	2.38861538	0.31000000





Si è utilizzato un fattore di struttura q = 1,5

A valori del periodo di vibrazione T = 4 sec corrispondono accelerazioni sismiche allo stato limite di salvaguardia della vita pari 0,3 m/sec² di conseguenza la azione sismica inerziale sulla cupola espressa in Newton

$F(t) = -M^* 0,3 ^*\cos \omega t$ pari al 3% della massa della cupola in daN e quindi Kg_p

La rigidezza globale del sistema di isolamento

$T = 2^*\pi/\omega \quad \omega = 2^*\pi/T ; \quad K/M = 4 * \pi^2 /T^2 \quad ; \quad K = M^* 4^* \pi^2 /T^2$

Analisi dimensionale $N/m = kg/sec^2$; $kg = N^*sec^2/m$

La massa della cupola è pari a M = 37000 tonnellate

La forza di inerzia F = 1.110.000 daN una forza orizzontale elevata per cui conviene utilizzare un periodo T > 4 sec

$T_D \leq T \qquad Sd(T) =2/3^*Ag^*S^*\eta^*Fo ^*(T_C ^*T_D/T^2) \qquad q = 3/2$

$Ag = 1,30 m/sec^2 \quad Fo = 2,407 ; \quad \eta = [10/(5+\zeta)]^{1/2} \geq 0,55$;

$T_C = 0,3sec ; \quad T_D = 2,12 sec \quad S = 1,25$ (valore più gravoso)

$Sd(T) =2/3^*1,3^*1,25^*0,6^*2,4 ^*(0,3 ^*2,12 /5^2) = 0,039 m/sec^2$

$F(t) = -M^* 0,039^*\cos \omega t = -144300^*\cos \omega t$ daN per T = 5 sec

La cupola sul tamburo subisce un moto rigido è sollecitata esclusivamente da questa forza orizzontale da ripartire sulle otto costolature maggiori , trasmessa alla sottostruttura dagli isolatori elastomerici , riducendo sensibilmente le azioni sismiche

$F_I(t) = -M^* 0,039^*\cos \omega t /8 \approx -18000^*\cos \omega t$ daN

$K = M^* 4^* \pi^2 /25 = 58428 KN/m \approx 60000 KN/m$ si dispongono 8 isolatori

$K_{IS} = 7500 KN/m = 7,5 KN/mm$

DISPOSITIVO	Fzd KN	Ned KN	Kb KN/mm	Kv KN/mm	Tq mm	Dg mm	Htot mm	Lpc mm
Tec IG 300/52 H	2700	950	1,9	1333	52	300	136	350
Tec IG 350/52 H	3600	2200	2,69	1826	50	350	137	400
Tec IG 400/50 H	4700	3200	3,52	2735	50	400	137	450
Tec IG 450/54 H	7550	5500	4,12	3090	54	450	156	500
Tec IG 500/54 H	9400	7100	5,09	4202	54	500	166	550
Tec IG 550/56 H	9900	7700	5,94	4735	56	550	164	600
Tec IG 600/56 H	10500	8200	7,07	5473	56	600	170	650
Tec IG 650/54 H	11000	8800	8,6	6499	54	650	174	700
Tec IG 700/60 H	11500	10000	8,98	6641	60	700	180	750
Tec IG 750/60 H	12500	10500	10,31	8139	60	750	190	800
Tec IG 800/60 H	15000	13000	11,73	9798	60	800	190	850
Tec IG 850/60 H	19000	15000	13,24	11616	60	850	190	900
Tec IG 900/60 H	22000	18500	14,84	11872	60	900	200	950
Tec IG 1000/70 H	23000	20000	15,71	12131	70	1000	210	1050

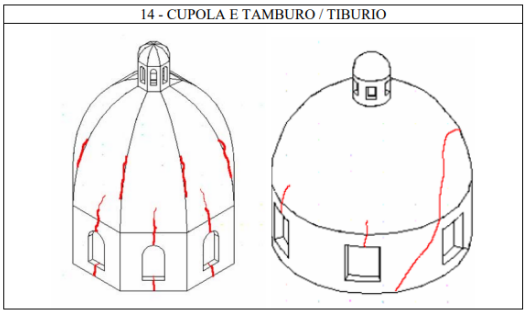
LEGENDA	
Fzd (KN)	Carico verticale massimo allo SLU in assenza di sisma
Ned (KN)	Carico verticale agente sull'isolatore in presenza di Sisma (SLC)
Kb (KN/mm)	Rigidezza orizzontale
Kv (KN/mm)	Rigidezza verticale
Tq (mm)	Spessore totale strati in gomma
Dg (mm)	Diametro isolatore
Htot (mm)	Altezza totale incluse piastre di collegamento
Lpc (mm)	Lato piastra di collegamento

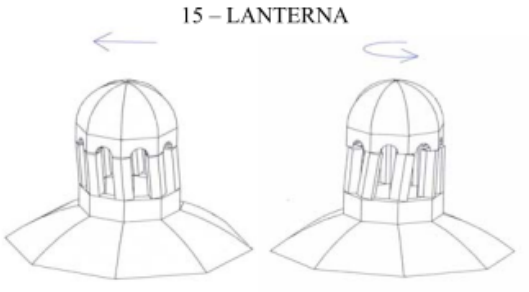
La max forza verticale sull'isolatore sismico

P =37000000/8 = 46250 KN *P =37000000/24 ≈ 16000 KN*

È conveniente triplicare il numero degli isolatori elastomerici , la soluzione migliore è un sistema di isolamento sismico elastomerico distribuito sul tamburo ottagonale , progettare e costruire un isolatore apposito per l'adeguamento sismico anche per distribuire in modo uniforme la azione sismica ed il carico verticale sul tamburo e la sottostruttura senza picchi di tensione obiettivo della progettazione rinascimentale di Filippo Brunelleschi

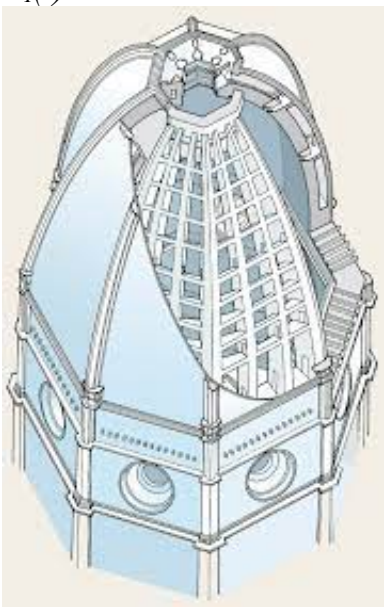
Le linee guida sui beni culturali per le cupole riportano i seguenti meccanismi di danno per la cupola e la lanterna





Il cinematismo concerne il ribaltamento di uno spicchio della cupola definito da due costoloni ; inserito il sistema di isolamento sismico la problematica non si pone poiché non vi è forza orizzontale che provoca il meccanismo

$F_I(t) = 18000$ *daN*

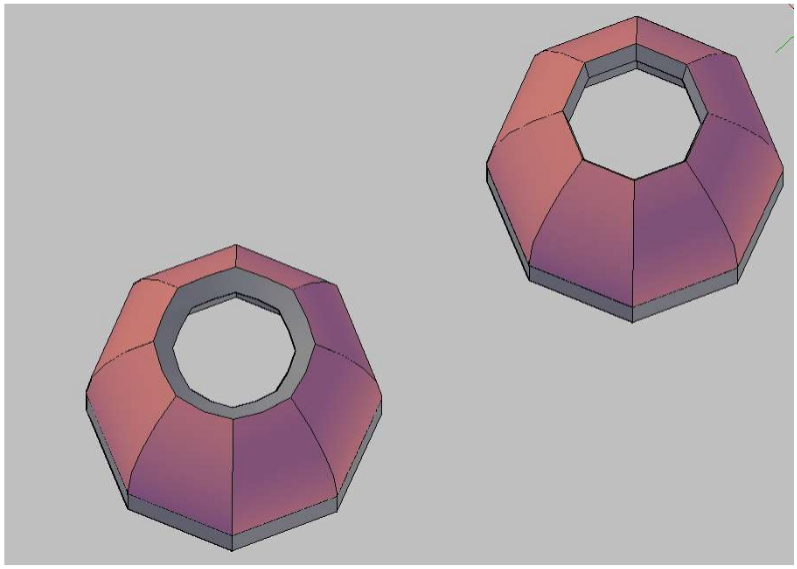


In questi appunti ci occupiamo di cupole , il progetto ed il calcolo dell'isolamento sismico del duomo di Firenze è già stato eseguito e prevede l'isolamento alla base della chiesa di Santa Maria del Fiore in muratura lavori che non sono stati eseguiti ; si è quindi studiato esclusivamente l'isolamento sismico della cupola separandola dalla restante parte della struttura

Occupiamoci in modo sintetico del meccanismo di danno , per il quale ipotizziamo il ribaltamento rigido alla base sul tamburo di una porzione di cupola compresa tra due costoloni principali ovvero uno spicchio della cupola ottagonale avente massa sismica

M = 37000000 /8 = 4.625.000 kg

La inclinazione verso l'interno dello spicchio ne assicura la stabilità poiché la distanza del baricentro dello spicchio dall'asse di rotazione va oltre gli usuali cinematismo dove è pari allo spessore del muro; riportiamo il disegno dello spicchio e del relativo ribaltamento , eseguendo una analisi del primo ordine e poi una analisi del secondo ordine attraverso la rimozione della ipotesi di piccoli spostamenti .



Peso cupola	29000 t
Peso lanterna	750 t
Larghezza int.	45 m
Larghezza est.	54 m
Spessore cupola int.	2.2 m
Spessore cupola est	0.9 m
Spazio tra le 2 cupole	1.2 m
H tamburo	8 m
H vele	36 m
H lanterna	25 m
H di imposta	55 m da terra
H alla lanterna	91 m da terra
H Totale	116 m da terra

La analisi del meccanismo prevede la determinazione del momento stabilizzante e del momento ribaltante il primo dovuto al peso sismico dello spicchio il secondo alla azione sismica orizzontale

$M_S = W*d \quad ; \quad M_R = Sd(T) * W*h_G = \alpha * W*h_G$

Per la azione sismica definiamo un moltiplicatore α , ponendo il valore della accelerazione spettrale $Sd(T) = 1\ m/sec^2$ dove W peso sismico

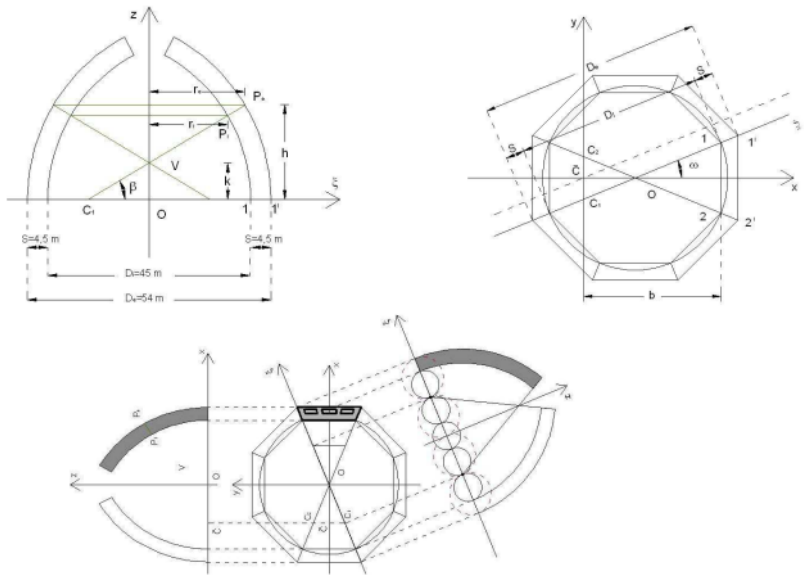
D e h_G rispettivamente distanza orizzontale e verticale del baricentro dello spicchio dal centro di rotazione

L'equilibrio è garantito se $M_S \geq M_R$

Possiamo definire un moltiplicatore dei carichi verticali tenendo presente che è necessario aggiungere il peso della lanterna

$M_S = \alpha * W*d \qquad M_R = Sd(T)*W*h_G$

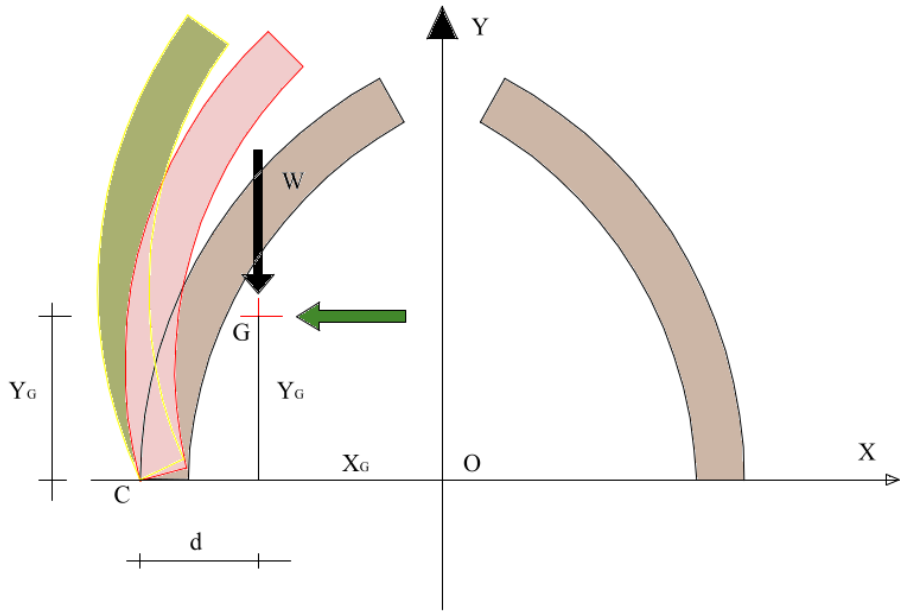
Per quanto concerne le caratteristiche geometriche della cupole , le riportiamo in figura



Per quanto concerne le coordinate del baricentro dello spicchio di cupola vengono determinate con le solite formule della geometria delle masse

$X_G = \int x*\rho dA /M \;\; ; \quad Y_G = \int Y*\rho dA /M \;\; ;$

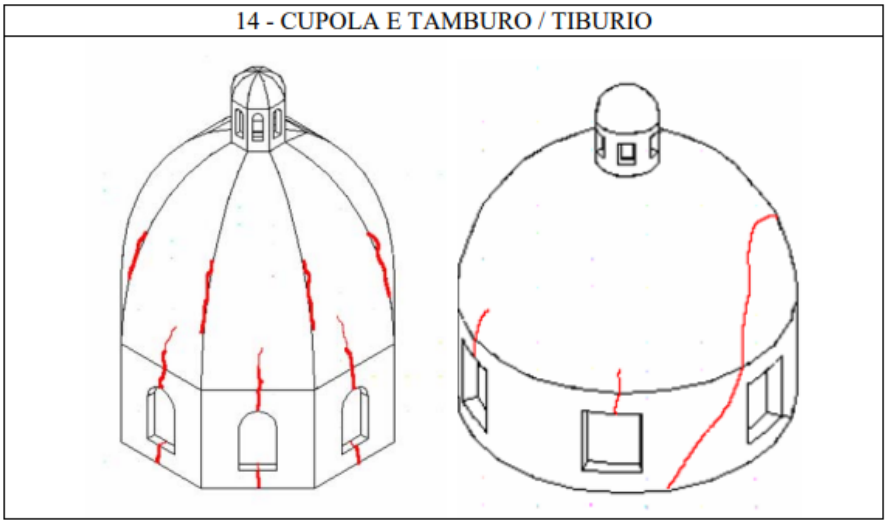
M massa del singolo spicchio ; ρ densità della muratura costituente la cupola
Il sistema di riferimento è contenuto nel piano verticale



Momento stabilizzante W*d
Momento ribaltante Fo*Hg

$D = R - X_G$;

Come si vede dalla figura lo spicchio è stabile con meccanismo inesistente , il ribaltamento se avviene è verso l'interno ma controbilanciato dalla presenza delle altre porzioni di cupola ottagonale, ovvero andrebbe studiato il ribaltamento contemporaneo dei 2 spicchi di cupola. Le linee guida sui beni culturali per le cupole riportano i seguenti meccanismi di danno.



La cupola come l'intero duomo è stato oggetto di studio da parte della università di Firenze che ha provveduto alla tutela e salvaguardia dello stesso da eventi sismici poiché patrimonio culturale internazionale e meta di turisti .

8- La cupola in plexiglass , vetroresina in materiale composito

Le cupole in vetroresina plexiglass hanno trovato largo impiego soprattutto per quanto concerne i lucernai , vengono inoltre utilizzate per architetture religiose islamiche ; il calcolo viene sempre eseguito attraverso una modellazione agli elementi finiti tenendo conto delle caratteristiche dei materiali e dei carichi agenti quali neve e vento

Cupole in fiberglass (vetroresina)



Lucernai in plexiglass





Le schede tecniche delle aziende produttrici ci forniscono le dimensioni e gli spessori corrispondenti del plexiglass o della cupola in vetrorresina ovviamente per la modellazione FEM si necessita delle caratteristiche meccaniche del materiale ovvero nella ipotesi di comportamento isotropo

Modulo di elasticità normale E
Modulo di elasticità tangenziale G
Coefficiente di Poisson 1/m
Resistenza a compressione f_C
Resistenza a trazione f_t
Resistenza a taglio $f_V = f_t$

Le deformazioni massime a trazione e compressione ε_U

Possiamo progettare un cupola in plexiglass o vetroresina con in solito schema statico con archi in acciaio o alluminio all'interno dei quali vengono inseriti spicchi in composito







Nel calcolo si tiene conto del policarbonato e del fiberglass , modellando la cupola con i soli archi ed anelli in acciaio o alluminio inserendo tra i riquadri dei pannelli plate shell in grado di trasferire le azioni quali vento e neve , verificando il relativo stato tensionale .

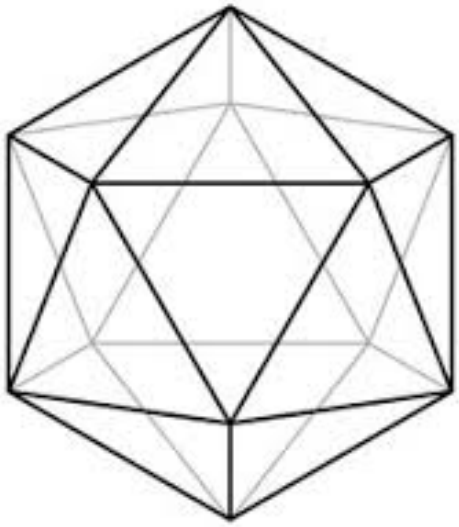
9 - Le cupole geodetiche

Una cupola geodetica è un poliedro a facce triangolari, detto anche poliedro geodetico, inscritto in una sfera i cui lati giacciono approssimativamente sulle circonferenze massime della sfera; la scelta delle facce triangolari è la conseguenza di un teorema di Cauchy secondo il quale un poliedro convesso è indeformabile se le sue facce figure piane sono rigide . Le facce di una copula geodetica sono contenute in aste di acciaio o alluminio incernierate agli estremi con rigidezza assiale che definiscono u triangolo indeformabile ovvero infinitamente rigido nel suo piano . Il procedimento più diffuso per costruire una cupola geodetica inizia dall'icoesaedro regolare dividendo le sue facce regolari in facce più piccole



Icoesaedro troncato (pallone da calcio)

Per la costruzione di sfere geodetiche si parte dall'icoesaedro



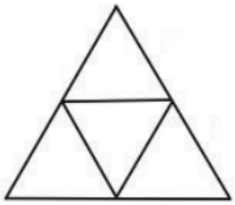


Figura 7. Frequenza 2v

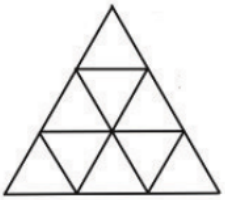


Figura 8. Frequenza 3v

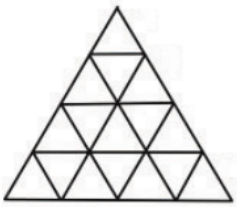


Figura 9. Frequenza 4v

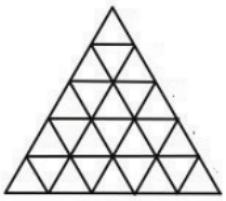
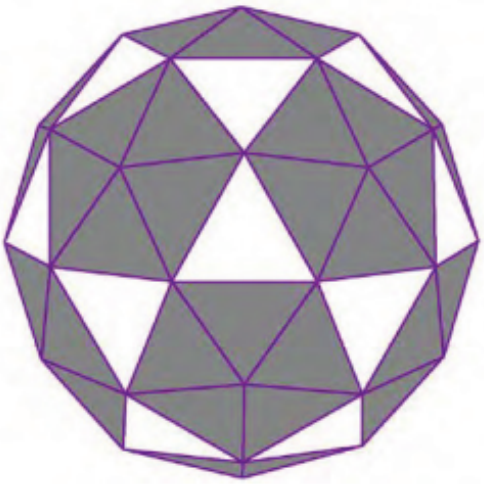


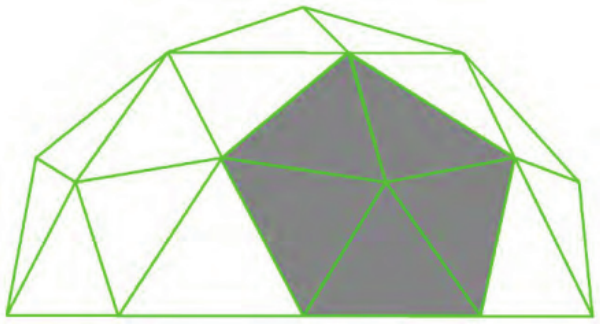
Figura 10. Frequenza 5v

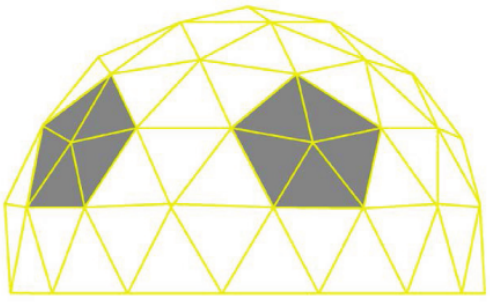
*La faccia piana triangolare viene suddivisa definendo una frequenza n*v funzione della suddivisione dei lati; La sfera geodetica 2v ha 80 facce 42 vertici e 120 spigoli*



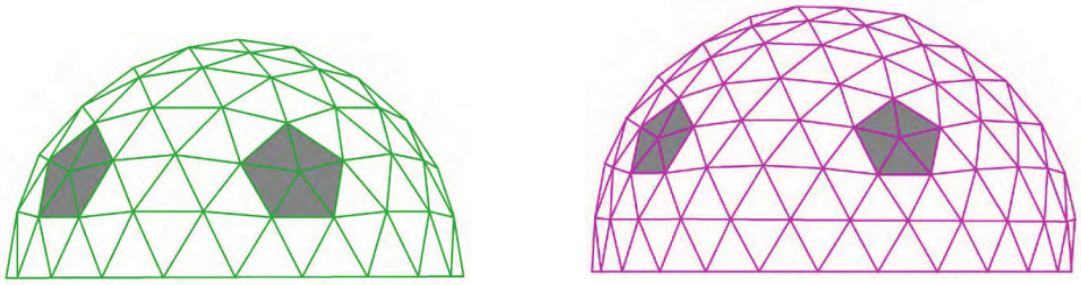


Super pallone da calcio per la sua forma simile all'icoesaedro troncato.
Le cupole geodetiche sono delle semisfere o calotte





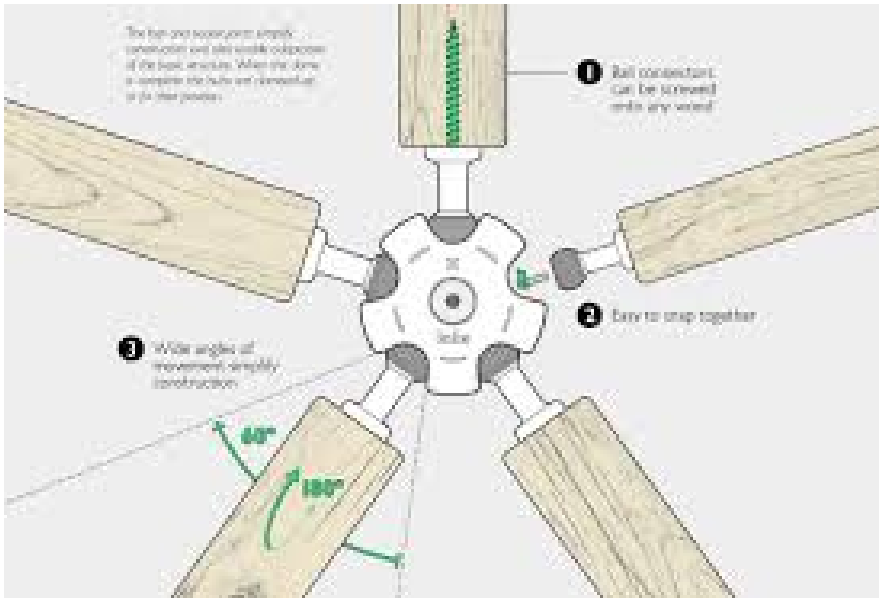
Semisfera geodetica 2v e semisfera 3v ,



Semisfera geodetica 4v e semisfera 5v
La struttura portante di una cupola geodetica è costituita da aste metalliche anche in legno o profili pultrusi e nei riquadri sono inseriti pannelli di vetro policarbonato o fiberglass con aste sono sollecitate esclusivamente a sforzo normale . Le azioni che sollecitano la cupola sono :

- Peso proprio
- Carico da neve
- Carico da vento

che schematizziamo come forze concentrate nei nodi cerniera dei triangoli della maglia. Se eseguiamo una modellazione FEM ai fini della applicazione del carico è conveniente modellare il policarbonato o il vetro all'interno del triangolo in modo che sull'elemento plate shell si può applicare il carico verticale da neve variabile con la inclinazione della faccia triangolare ed il relativo carico da vento orizzontale. Per quanto concerne i vincoli alla base sulla circonferenza di coronamento le aste sono appoggiate con nodi cerniera. La cupola geodetica per la sua forma molto arcuata non ha problemi di instabilità globale funzione essenzialmente della rigidezza delle singole aste ; per quanto concerne i collegamenti metallici



Trasmettono la sola sollecitazione assiale. Se utilizziamo collegamenti in grado di trasmettere anche la flessione ei taglio nelle aste diventa importante soprattutto per

cupole di grande luce la modellazione dell'elemento plate-shell che contribuisce alla rigidezza della cupola e alla sua stabilità globale. Esempi di architetture moderne anche abitazioni realizzate con cupole geodetiche





Padiglioni espositivi fiere mostre stand



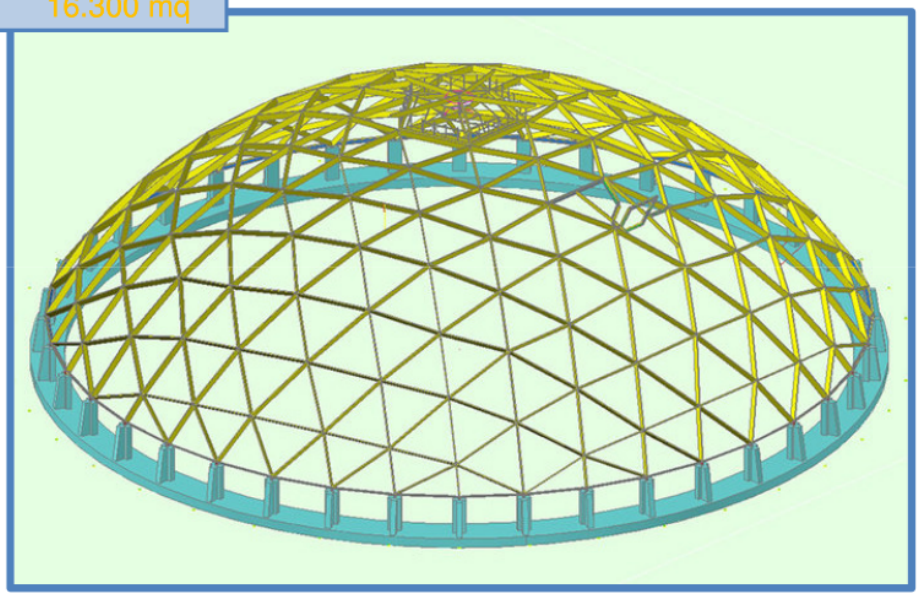
In Italia la cupola geodetica più importante dal punto di vista strutturale e dimensionale è quella di Brindisi della centrale Enel



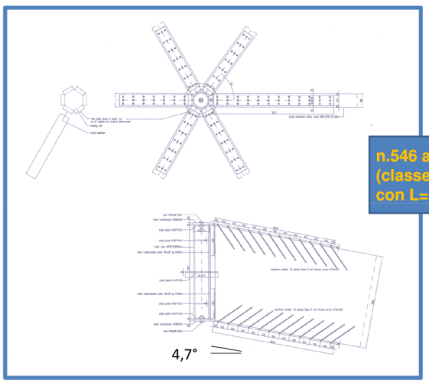
Lo schema statico

Lo schema geodetico

Diametro	144 m
Altezza	≅ 50 m
Superficie coperta	16.300 mq

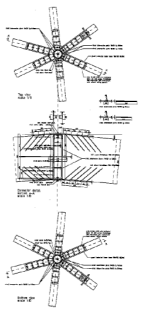


I nodi tra le aste in legno

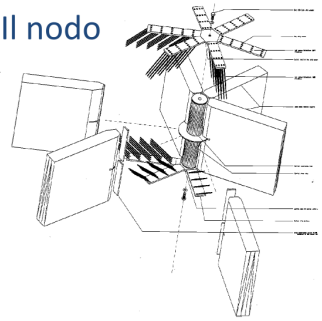


Il nodo

n.546 aste di legno lamellare (classe GL28h) 80/200x1132mm, con L= 9,00 – 13,00 m circa



Il nodo



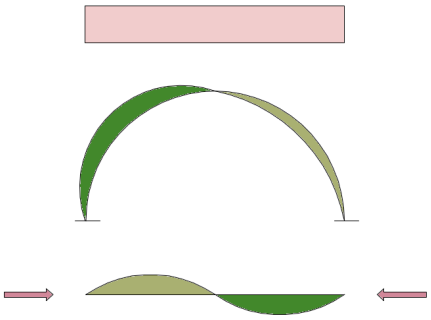
10 - Le cupole ribassate e la instabilità globale (buckling)

La instabilità globale non è una problematica delle cupole che sono delle semisfere la cui freccia è pari al raggio della cupola stessa , riguarda invece le calotte ovvero le cupole ribassate ; per meglio approcciare alla problematica calcoliamo il carico critico per un arco sferico con R = f ed un arco ribassato con f = R/10 .

Per l'arco circolare ,

$Nc = \pi^2 * EI/(L_o)^2$

*dove la lunghezza libera di inflessione è pari ad R e la prima deformata sinusoidale è quella indicata ovvero la seconda forma sinuisoidale ottenuta assimilando l'arco ad una trave di luce 2*R*

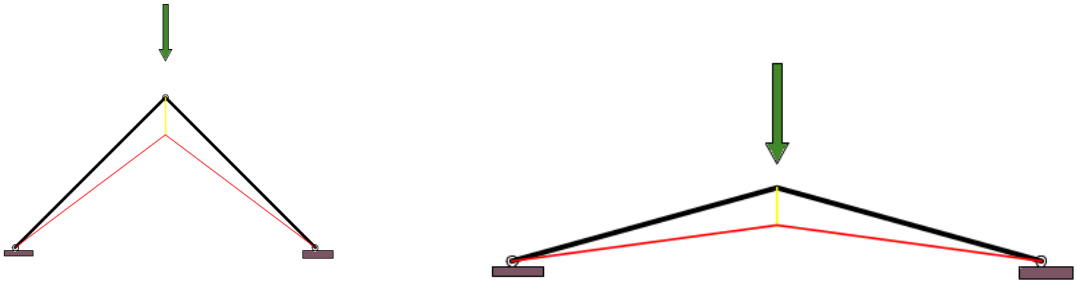


Questa formula è valida per un anello circolare sollecitato da forze radiali centripeta ed è stata estesa al caso dell'arco circolare .
Per una cupola sferica possiamo definire il carico critico o meglio pressione verticale critica per una sfera sollecitata da azioni radiali centripete , estesa anche a cupole semisferiche

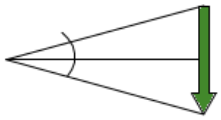
$Qcr = 2*E/[3*(1-\upsilon^2)]^{1/2}*(t/R)^2$ *dove t è lo spessore della cupola R il raggio*

Per una cupola in calcestruzzo con peso specifico $\gamma = 2500$ *daN/mc*
$Qcr = \gamma * E*(t/R)^2$ *con coefficiente di Poisson* $\upsilon = 0{,}2$ *valore ragionevole per cls*

Per un arco ribassato consideriamo inizialmente un arco a tre cerniere con due aste



Lo sforzo normale nelle due aste
$N = F/\sqrt{2}$; $\alpha = 45°$ $N = F/(2*\sin\alpha) = 5*F$; $\alpha = 5{,}7°$



L'accorciamento dell'asta $\Delta L = N*L/EA$ *con* $L = R$

Lo spostamento verticale ovvero l'abbassamento $\delta = \Delta L/\cos\alpha$ *ovvero*

$\delta = N*L/(E*A*\cos\alpha) = F*L/(2*\sin\alpha*\cos\alpha*EA)$

Per il calcolo del carico critico il metodo è incrementale si fa riferimento alla configurazione variata applicando degli incrementi di carico costanti ΔF

ΔF ; $2\Delta F$; $3\Delta F$; $4\Delta F$; $5\Delta F$; $6\Delta F$; $7\Delta F$ *gli spostamenti corrispondenti*

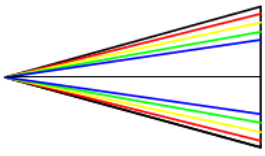
$\delta_1 = \Delta F*L/(2*\sin\alpha_1*\cos\alpha_1*EA)$

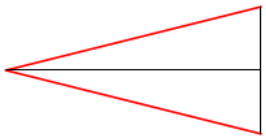
$\delta_2 = 2*\Delta F*L/(2*\sin\alpha_2*\cos\alpha_2*EA)$

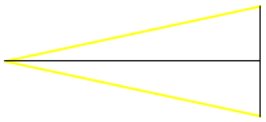
$\delta_3 = 3*\Delta F*L/(2*\sin\alpha_3*\cos\alpha_3*EA)$

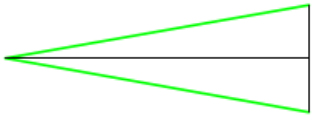
$\delta_4 = 4*\Delta F*L/(2*\sin\alpha_4*\cos\alpha_4*EA)$

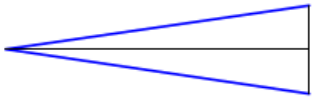
.....
Nella ipotesi di piccoli angoli ovvero per archi ribassati si confondono il seno e la tangente con l'arco mentre il coseno è pari ad 1











Sinα= (f-δ)/R ; $sinα_i$= (f-$δ_i$)/L ; f freccia L lunghezza asta

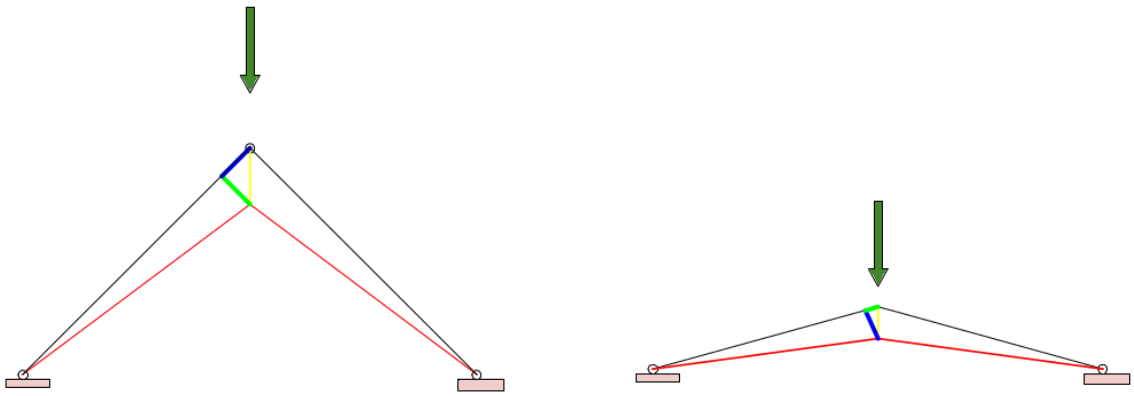
Lo spostamento

*δ = F *L/(2*(f-δ)/L *EA) ; δ = F *L/(2*EA)*L/(f-δ)*

L'asta presenta una variazione (diminuzione) rigidezza pari a

*EA*2*(f -δ)/L funzione dello spostamento verticale δ*

Se invece determiniamo le sollecitazioni nell'asta quali taglio è sforzo normale in conseguenza dello spostamento verticale



L'incremento di sollecitazione

$ΔN_i$ = EA/L$δ_i$ *$sinα_i$ $ΔT_i$ = N_i /L*$δ_i$ *$cosα_i$*

È stato aggiunto l'effetto P-Δ

*La forza ΔF =$ΔN_i$ *$sinα_i$ + $ΔT_i$ *$cosα_i$ ovvero*

$ΔF_i$= [EA/L($sinα_i$)^2 -N_i /L*($cosα_i$)^2]*$δ_i$*

Possiamo determinare la variazione di rigidezza per archi ribassati

F= [EA/L($sinα_i$)^2 -N/L*(cosα)^2]*δ*

K= EA/L(sinα)^2 -N/L*(cosα)^2 Angolo iniziale α*

*Ai fini della determinazione del carico critico per arco ribassato si deve tener conto dell'effetto P-Δ dei tagli presenti sull'arco la relativa flessione e della variazione di rigidezza ovvero una analisi di **buckling** . Si è visto come gli sforzi normali siano molto più grandi e per quali motivazioni la instabilità globale di una cupola di una*

calotta in generale di una volta dipende dalla curvatura ovvero dalla freccia
Eseguiamo una stima del moltiplicatore per due strutture , sollecitate dallo stesso carico verticale , costituite da 20 semi archi meridiani e 10 anelli parallelli

Cupola semisferica D = 20 m f = 10 m
Calotta D = 20 m f = 2,5m

Sezione quadrata tubolare in acciaio 10x10 spessore 2 mm
Nodi incastro stessa rigidezza aste

Modulo di elasticità normale E = 650000 daN/cmq
Modulo di poisson 1/m = 0,23
Peso specifico γ = 2500 kg/mc
Spessore lastra 5 cm , tre strati di vetro da 13 mm , con intercalare

evidenziamo la differenza nei valori del moltiplicatore critico .
I coefficienti parziale per peso proprio e neve sono stati assunti pari a 1,5

Cupola sferica

Parte in vetro

$Qc = 2*E/[3*(1-\upsilon^2)]^{1/2}*(t/R)^2 = 19.3$ daN/mq

Carico critico arco sferico in acciaio

$Nc = \pi^2*EI/(L_o)^2 = 2590$ daN $I = 125$ cm^4

*Il numero di archi è pari a 10 Ncr = 10*Nc = 25900 daN*

Lo sforzo normale in un meridiano

$N_m = q*R/[(1+\cos\theta)]$ $q = 2590$ daN/mq

Il carico critico globale è circa 2610 daN/mq

Il peso proprio è pari a circa 130 daN/mq si ottiene un moltiplicatoire critico

α = 2610/130= 20 > 10 non si ha instabilità globale Se aggiungiamo il carico da neve

α = 2610/390= 7 < 10 il valore di Q= 260 daN/mq è riferito a superficie orizzon

tale , i pannelli sono molti inclinati la instabilità globale per neve non si pone

*Per la **cupola ribassata** eseguiamo sempre una stima sintetica del moltiplicatore critico , tenendo presente che è una calotta e fa parte di una sfera avente un raggio più grande R = 21,20 m*

$Qc = 2*E/[3*(1-v^2)]^{1/2}*(t/R)^2 = 4,3\ daN/mq$

$Nc = \pi^2*EI/(L_o)^2 = 569\ daN \qquad I = 125\ cm^4$

Il carico critico globale è circa 575 daN/mq

Il peso proprio è pari a circa 130 daN/mq si ottiene un moltiplicatoire critico

$\alpha = 575/130 = 4 < 10 \qquad \boldsymbol{\alpha = 4 < 10}$

si ha instabilità globale di buckling per solo peso proprio

I moltiplicatori critici

Cupola semisferica $\alpha = 20 > 10$
Cupola ribassata $\alpha = 4 < 10$

*La problematica del moltiplicatore critico per le cupole e volte non è esclusivamente di instabilità globale , se tali verifiche non sono soddifsatte le strutture sono eccessivamente deformabili per cui non sono soddisfatte neanche le normali verifiche a pressoflesione del singolo pannello di volta , Esempi di architetture con cupole ribassate le trovoiamo in un progetto di **Zaha Hadid Architects** per il **gruppo BEEAH** realizzato nel 2022 rappresenta il fulcro centrale gestionale e amministrativo del gruppo e si inserisce in un contesto dalle particolari condizioni climatiche.*



L'edificio sorge, infatti, come un insieme di ***dune*** *inserite nel* ***deserto Al Sajaa di Sharjah****. Il design del progetto si integra perfettamente con il paesaggio circostante modellato dai venti dominanti che trasformano le dune di sabbia. E' evidente che siffatte strutture sono state calcolate verificate anche nei confronti del* ***buckling*** *e se costruite messe in cantiere la verifica nei confronti della instabilità è insita nella vita nominale della struttura; nessuno penserebbe di sindacare o metter in dubbio strutture anche cupole e volte presenti sul territorio da più di 40 o 50 anni in base ad esclusive conasiderazioni di carattere teorico. Una volta o cupola costruita e messa in opera in zone dove non vi è carico da neve, che porta il solo peso proprio subisce un crollo per instabilità globale dopo pochi mesi dalla sua costruzione se non subito dopo il disarmo.*

$Qcr = 2*E/[3*(1-\upsilon^2)]^{1/2}*(t/R)^2 = 1{,}178* E*(t/R)^2$

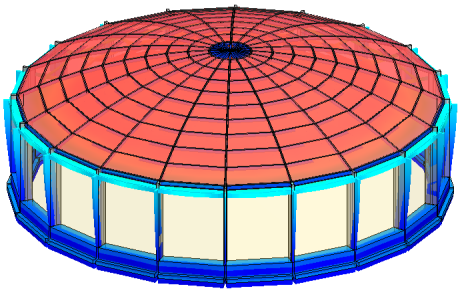
con coefficiente di Poisson $\upsilon = 0{,}2$ *valore ragionevole per cls*

Si possono determinare valori ottimali del rapporto t/R , tenendo presente che

$\alpha = Qcr /(\gamma *t) = 4{,}712 *t*E/R^2 = 10 \qquad t \approx 2*R^2/E$

Per cupola semisferica $R = 25$ *m* $E = 400.000$ *daN/ cmq* $t \approx 30$ *cm*

Per evitare il buckling di cupole in cemento armato ribassate basta inserire archi e anelli di irrigidimemto come visto nel paragrafo dedicato alle cupole in c.a.



(Buckling)

N°	fattore
1	18.154
2	46.226
3	46.226
4	97.963
5	104.103
6	104.103
7	104.864
8	104.864
9	105.720
10	105.720

$Qc = 2*E/[3*(1-\upsilon^2)]^{1/2}*(t/R)^2 = 1{,}4$ *daN/mq* $t = 12$ *cm* $R = 65$ *m*

$Nc = \pi^2*EI/ (L_o)^2 = 8721$ *daN* $I = 106666$ *cm*^{4} *20x40*

$Q = (260+0{,}12*2500)*2 + 0{,}2*0{,}4*2500 \approx 1120$ *daNmq*

carico medio sullo spicchio per 2 m $\alpha = (2*8721+1{,}4)/1120 = 14{,}77 > 10$

Il valore calcolato $\alpha = 18{,}154$ *è più alto per la presenza degli anelli.*
Queste considerazioni sono utili in fase di dimensionamento

11- Il simbolismo religioso, sociale e psicoanalitico

La cupola è simbolo del cielo "sfera della storia, sede dell'asse del mondo e perfetta miniatura dell'Universo, nel suo ordine e nella sua bellezza.[.....] La cupola ci dice chiaramente che il Cielo si è aperto alla Terra, è sceso fino a farsi uomo, ed è ugualmente il messaggio chiaro che, grazie a questo incarnarsi , abbassarsi di Dio, è data all'uomo la possibilità di salire al Cielo, di farsi santo, di arrivare con la sua libertà alla santità". La cupola "ci parla di un Dio che si è fatto uomo; che in Gesù Cristo il cielo e la terra, Dio e l'uomo, si sono riconciliati e uniti attraverso la sua morte e resurrezione, attraverso quella nuova creazione che è la Pasqua".La cupola rappresenta dunque la volta celeste il cui centro è Cristo. Spesso la cupola o la volta sono sostenute da quattro pilastri, oppure da angeli o dai simboli degli evangelisti che con la loro predicazione hanno annunciato la "buona novella" della salvezza a tutto il mondo (ad esempio la cupola della Basilica di San Pietro in Vaticano è circondata da quattro tondi che racchiudono gli evangelisti). Il simbolismo cosmico è richiamato anche dalle volte stellate o con sfondo oro (per esempio nel Mausoleo di Galla Placidia a Ravenna), al cui centro si apre un cerchio-cielo che racchiude il Cristo o qualche simbolo cristologico.Alcune chiese cristiane presentano una cupola, simbolo della volta celeste, costruita su una struttura quadrata che simboleggia la terra. Secondo la cosmologia geocentrica antica, il quadrato rappresenta simbolicamente la terra, poiché il Sole ne fissa gli assi a partire dai punti estremi del suo corso, dividendola in quattro parti, ciascuna delle quali delimita una stagione e, nello stesso tempo, uno dei punti cardinali. Se ci riferiamo al simbolismo psicoanalitico , la cupola inteso come guscio protezione , ovvero la struttura arcuata ci protegge qualcosa di ìmolto simile al grembo materno , che poi si estende all ambiente sociale diventando protezasioe sociale ovvero gruppo amicizia. E' questo il significato della cupola in Italia si parla di cupole mafiose ovvero di rapporti gruppi legami interpersonali di ***"amicizie"*** *che va oltre la mera suddivisione di appalti tangenti e torte che è la parte goliardica della cupola. La cupola ha oggi assunto un significato differente si parla di cupole sociali ovvero di poteri mafiosi sociali che si estrinsecano attraverso la emarginazione esclusione l'insulto la diffamazione in generale attraverso la psichiatria precludendo ai non mafiosi* ***"i nemici"*** *non gli* ***"amici"*** *ogni forma di integrazione negando loro anche banali diritti sociali economici di lavoro professionale di relazione capacità di agire andando contro leggi dello stato la costituzione e la carta dei diritti fondamentali dell'uomo . La cupola mafiosa sociale trasforma il nemico in un terrorista un bombarolo,collaborazionista di stati che ci fanno la guerra ; un tempo i russi(* ***il partito comunista italiano****) finanziavano le brigate rosse in Italia oggi i nemici per avere diritti alla inclusione ai diritti che vengono loro negati si rivolgono a stati esteri siano essi Stati Uniti Russia Cina Arabia Saudita Europa Giappone India ect in modo da poter avere il diritto ad affermare la propria personalità in sintonia con l'art. 3 della costituzione Italiana. Una persona in Italia vittima della mafia sociale è un malato fisico e mentale che subisce perpetuo mobbing nel lavoro che non ha diritto alla crescita della sua personalità oggetto di diffamazione insulti maldicenza calunnia privato di ogni mezzo di sussistenza con violazioni e interferenze illecite*





nella vita privata in mano a poteri usurai ect . I personaggi facenti parte di cupole mafiose si riuniscono per decidere dei comportamenti e di cosa fare di alcune persone violando la loro dignità di esseri umani; si è modificato ed evoluto anche il modo di fare criminalità da parte della mafia ormai ben radicato in tutta Italia ovvero quello di danneggiar alcune persone con poteri sociali e mediatici portarli in pronto soccorso di ospedali e lì ricattarli e decidere della loro vita , in piena sintonia con il concetto di soffferenza della religione cristiana con il diritto alla cura anzichè alla salute . Mafiosi oggi sono anche gli adolescenti nei loro comportamenti sociali devianti e di gruppo: la mafia sociale è materia di studio e apprendimento anche nelle scuole italiane Il mafioso sociale esercita il suo potere attraverso il ricatto alimentare , il nemico al quale viene negato ogni diritto economico sociale di immagine della personalità in mano a poteri usurai occulti , è costretto a nutrirsi poichè digiunando presta il fianco al potere mafioso finendo direttamente in pronto soccorso o in strutture di ricovero paragonabili ad antichi lager .

12- Conclusioni

Le cupole sono strutture gradevoli , progettare una abitazione a forma di cupola sferica oltre il caratteristoico igloo, in legno lamellare oltre che ad essre innovativo rappresenta un modo per richiamare l'attenzione in una zona del territorio; se poi si pensa a cupole metalliche con vetro o policarbonato adatte per stand serre bioclimatiche si va oltre il semplice utilizzo tipico della architettura religiosa dove ogni cattedrale ha la sua cupola in muratura . Le cupole sono utilizzate per coperture di impianti sportivi quali palazzetti dello sport del ghiaccio campi da tennis e forse anche per stadi di calcio. ***Russia 2018 Cosmos Arena di Samara***





La forma della cupola ne consente un utilizzo ambientale rappresentando con la struttura l'andamento del terreno definendo la montagna la collina e la duna , integrandole perfettamente nell'ambiente naturale senza problematiche di impatto.





Bibliografia

Documentazione reperibile on line

La verifica di aste tralicciate in acciaio

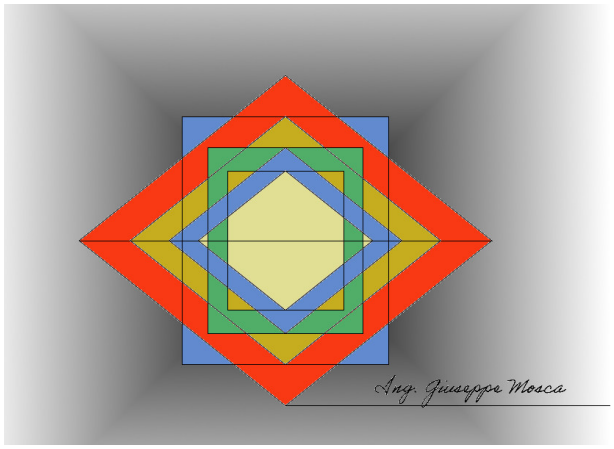
1-Introduzione

2-Inerzia e rigidezza : modellazione FEM

3-La verifica di instabilità

4-La verifica allo svergolamento

5-Conclusioni

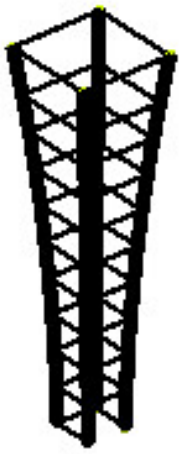


Ing. Giuseppe Mosca

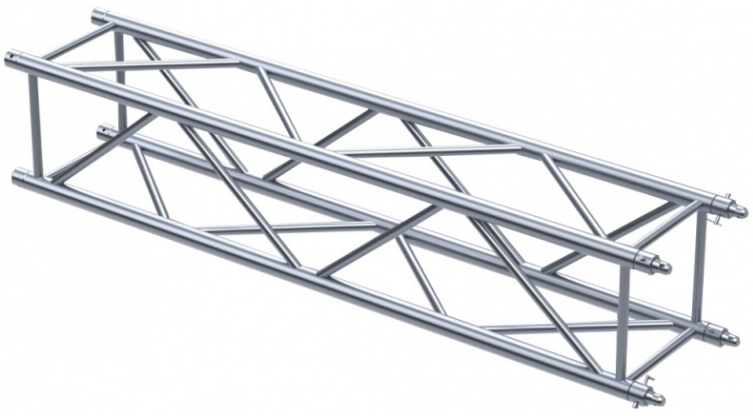
N.B Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

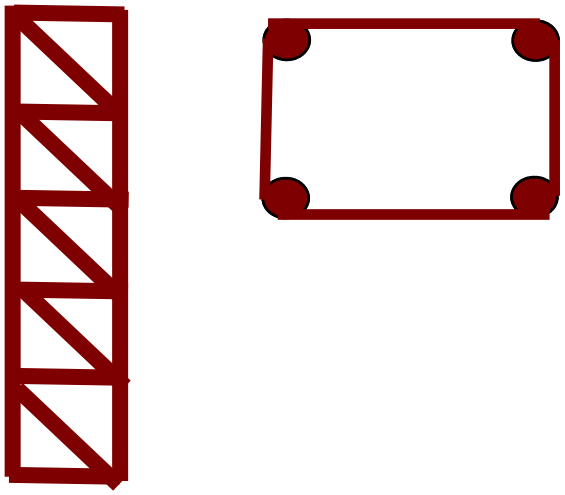
Le aste composte o tralicciate in acciaio sono utilizzate nella progettazione di capannoni in acciaio o anche per strutture più complesse aventi una funzione differente quali piscina , padiglioni espositivi, il classico pilastro tralicciato o calastrellato ad albero che conferisce all'elemento strutturale una sua gradevolezza estetica. Il vantaggio rispetto ad un pilastro normale HE è nella maggiore inerzia e quindi rigidezza assimilabile a quella di un telaio in acciaio con diagonale quindi la possibilità di resistere alle azioni orizzontali del vento senza irrigidimenti quali controventi in acciaio e tamponature e poter utilizzare delle pareti vetrate con limitati spostamenti orizzontali dell'impalcato.



Il distanziamento dei profili e la struttura del traliccio consente di verificare il singolo elemento verticale per una forza di compressione o trazione con un braccio della coppia interna maggiore senza flessioni locali che interessano il singolo profilo con conseguente incremento del momento resistente a pressoflessione.



2-Inerzia e rigidezza : modellazione FEM



La rigidezza dell'asta tralicciata è pari a quella del telaio ovvero

$K = 4*12*E*I_m /t^3 + 2*\cos\alpha*EA_d/L$ *dove*

E modulo elastico acciaio 2.100.000 daN/cmq
I_m *momento di inerzia montante*
A_d *area diagonale*
L lunghezza diagonale t/cosα
t interasse tra i correnti orizzontali

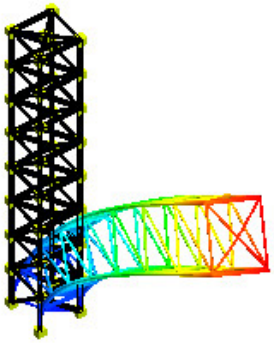
per un pilastro avente lunghezza 4 m con 8 riquadri t = 50 cm , di dimensioni 50x50cm realizzato con 4 profili del diametro di 5 cm ed aste circolari diametro 3 cm

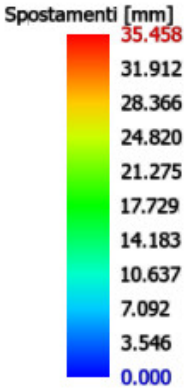
$I = 4,6\ cm^4$ *spessore 2 mm*
$A_d = 0,91\ cmq$ *spessore 1 mm*
$t = 50\ cm$
$L = 70,7\ cm$

K = 3709 + 38220 = 41929 daN/cm rigidezza del portale

la rigidezza complessiva va divisa per 8 K = 5241 daN/cm

Se in sommità applichiamo una forza di 2000 daN il nostro pilastro si sposta di circa 38 mm . Eseguiamo una modellazione fem valutando gli spostamenti e quindi la relativa rigidezza applicando la stesa forza si vede che si ha uno spostamenti di circa 35 mm per una rigidezza $K = F/\delta = 5714 daN/cm$





Il contributo alla rigidezza della diagonale è rilevante circa 10 volte maggiore se realizziamo dei soli collegamenti con aste orizzontali dobbiamo aumentare il diametro dei montanti ad esempio 10 cm spessore 4 mm

I = 139 cm^4 K = 14000 daN/cm (rigidezza globale traliccio)

La normativa italiana nelle istruzioni alle NTC definisce per le aste composte un momento di inerzia efficace
J_{eff} = 0,5*h^2 * Ac = 3768 cm^4

Ac area della sezione di ciascun montante 3 cmq
h è la distanza tra i baricentri dei montanti 50 cm
i montanti sono 4

*la rigidezza dell'asta 4*12*EI/L^3 = 5932 daN/cm*

la rigidezza complessiva del pilastro

	Rigidezza daN/cm
Modello FEM	*5714*
Calcolata	*5241*
Normativa	*5932*

3-La verifica di instabilità

La norma italiana esegue la verifica di instabilità dell'intero montante con inerzia efficace $\boldsymbol{J_{eff} = 0{,}5*h^2 * Ac}$ *e lunghezza libera di inflessione pari all'altezza dell'asta tralicciata. Le sollecitazioni alla base del pilastro sono*

M_{SDX} ; M_{SDY} ; P_{RD}

di conseguenza lo sforzo normale in ciascun montante lo si ricava della usuali formule della pressoflessione deviata

$N_{CED} = P_{RD}/4 \pm M_{SDX}*Ac/Wx \pm M_{SDY}*Ac/Wy$

per due montanti

$N_{CED} = P_{RD}/2 \pm M_{SDX}*Ac/Wx$

dove il modulo di resistenza $W = I/y$ *con* $y = h/2$

h interasse tra i montanti 50 cm
$I = \boldsymbol{J_{eff}}$
per pilastro tralicciato rettangolare interasssi a e b
$N_{CED} = P_{RD}/4 \pm M_{RDX}*a*Ac/(2*\boldsymbol{J_{eff}}) \pm M_{RDX}*b*Ac/(2*\boldsymbol{J_{eff}})$
La verifica di instabilità di un asta metallica pressoinflessa viene eseguita maggiorando il momento di progetto M_{ED} *della quantità 1/(1-N/Ncr) , il nostro montante è pressoinflesso ed il momento di calcolo*

$M_{ED} = (Ned*eo + M_{SDX})/[1-N_{ED}/N_{CRI} - N_{ED}/S_V]$

lo sforzo normale critico $N_{CRI} = \pi^2 * E*\boldsymbol{J_{eff}}/L^2$
L lunghezza libera di inflessione pari a 8 metri ovvero due volte l'altezza del pilastro
eo eccentricità accidentale dovuta a difetti di verticalità
S_V *la rigidezza a taglio e riportata nella seguente tabella in funzione della tipologia di asta*

Tabella C4.2.II - *Rigidezza a taglio equivalenti di aste tralicciate o calastrellate*

Schema dell'asta composta (v. fig. C4.2.7)	(1)	(2)	(3)	(4)
S_V – rigidezza a taglio	$\frac{n \cdot EA_d \cdot a \cdot h_0^2}{d^3}$	$\frac{n \cdot EA_d \cdot a \cdot h_0^2}{2 \cdot d^3}$	$\frac{n \cdot EA_d \cdot a \cdot h_0^2}{d^3 \cdot \left[1+\frac{A_d \cdot h_0^3}{A_v \cdot d^3}\right]}$	$\frac{24EJ_C}{a^2 \cdot \left[1+\frac{2 \cdot J_C \cdot h_0}{n \cdot J_V \cdot a}\right]} \le \frac{2\pi^2 EJ_C}{a^2}$

A_d area dei diagonali, A_v: area dei calastrelli, J_v: momento di inerzia del calastrello, A_c: area di un corrente, n numero di piani di tralicciatura o calastrellatura

$$e_0 = \frac{L}{500} \qquad [C4.2.21]$$

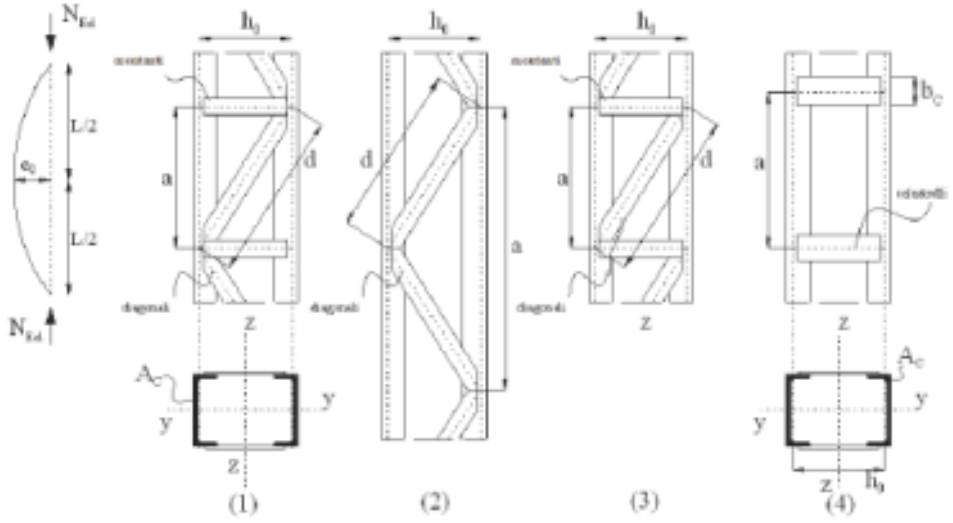


Figura C4.2.7-*Aste composte costituite da due correnti uguali*

Vanno eseguite due tipologie di verifiche :

- instabilità locale
- instabilità globale del montante

-Verifica di instabilità globale

La verifica di instabilità globale riguarda il montante dove la lunghezza libera di inflessione è pari all'altezza del pilastro, (dipende dalle condizioni di vincolo) può essere eseguita con un software FEM con l'analisi di buckling determinando il moltiplicatore critico . Per la struttura vista in precedenza sollecitata da una forza orizzontale di 2000 daN e da una forza verticale di 20000 daN , l'analisi di buckling fornisce il seguente valore del moltiplicatore critico

N°	fattore
1	9.852
2	10.992
3	13.793
4	17.471
5	17.999
6	21.999
7	22.346
8	22.535
9	24.635
10	27.046

Se eseguiamo una verifica di instabilità del montante

*M= 8000 daN*m P = 20000 daN*

N_{CED} *= 4000 +400000*50 *3/(2*50²*3)= 4400 daN*

$N_{CRI} = \pi^2 * E*\boldsymbol{J}_{eff}/L^2$ *= 485277 daN Lunghezza libera 8 m*

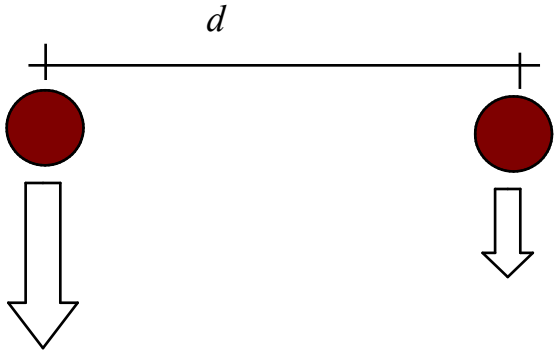
si vede che il moltiplicatore critico $N_{CRI}/N_{CED} \approx 10$

il momento

$M_{ED} = M_{SDX}/[1-N_{ED}/N_{CRI} - N_{ED}/S_V]$

La verifica della colonna composta consiste nel confronto tra

Mrd > Med nella ipotesi di elasticità lineare



$\sigma = N_{CED}/2 + M_{ED}/d < fyd/\gamma_M$

per comportamento plastico si determina il momento resistente ovvero la posizione dell'asse neutro , la deformazione εs

$Acfyd + Ac*Es*\varepsilon s = P$

$Mrd = (Acfyd + Ac*Es*\varepsilon s)*d/2 > M_{ED}$

-Verifica di instabilità locale

La verifica di instabilità locale la si esegue con la seguente formula

$\sigma = N_{CED} / N_{BRD} < 1$

dove N_{BRD} è il carico critico dell'asta (montante , diagonale) con lunghezza libera di inflessione pari all'interasse ovvero nel nostro caso 50 cm per il montante e 71 cm per la diagonale

$N_{CRI} = \pi^2 * E * \boldsymbol{J}_{eff} / L^2 \quad L = 50\ cm$

$J_{eff} = 0{,}5 * h^2 * Ac + 2 * \mu * J_C$

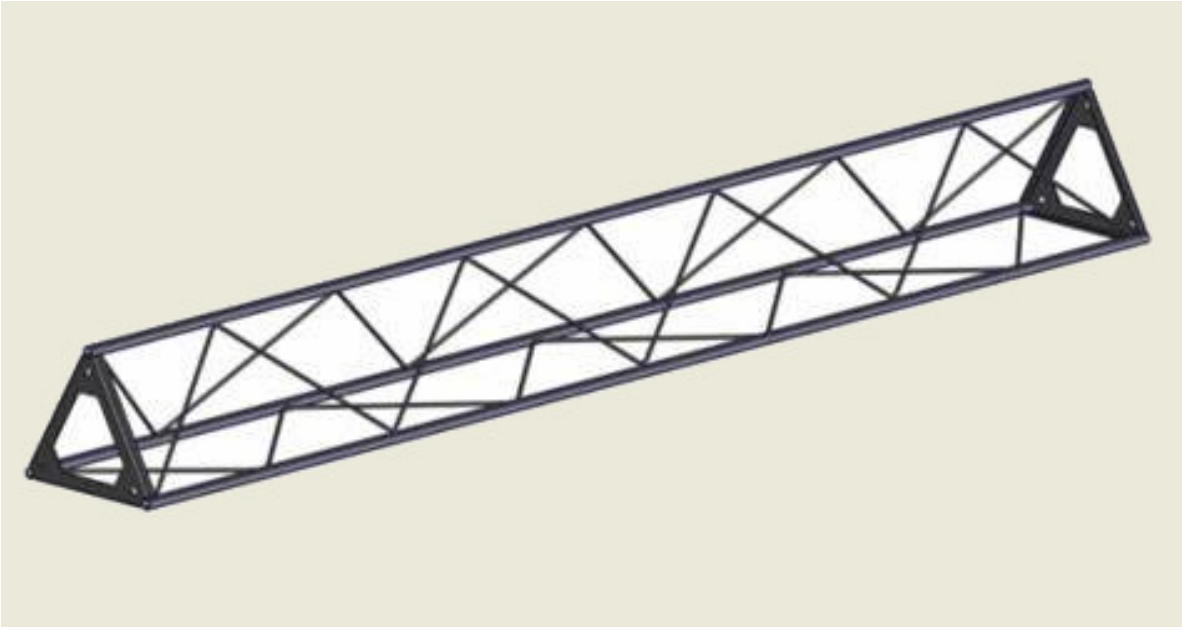
μ coefficiente di efficienza funzione della snellezza λ dell'asta composta

$\lambda = Lo/i = L * [2 * Ac / (0{,}5 * h^2 * Ac + 2 * J_C]$

J_C momento di inerzia del corrente

μ	λ
0	>150
1	≤75
2-λ/75	75<λ<150

4-La verifica allo svergolamento



Per travi sollecitate prevalentemente a flessione si può avere instabilità flessotorsionale ovvero sbandamento laterale ; la verifica globale da condurre su una trave tralicciata che può essere assimilata ad una trave Vierendel con diagonali consiste nel determinare il momento di inerzia efficace nella direzione trasversale

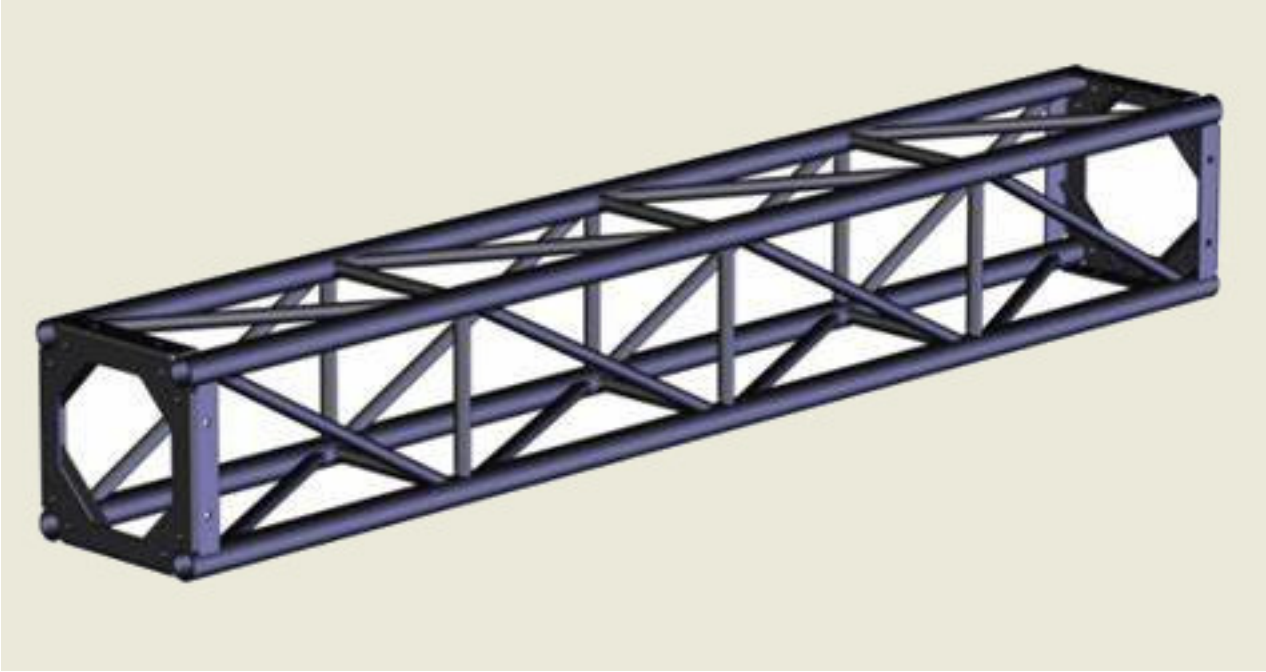
$J_{eff} = 0,5*h^2 *Ac +2*\mu*J_C$

il momento critico $M_{CRIT} = \pi/L*[E*J_{eff}*G*I_{Peff}]^{1/2}$

Il momento di inerzia efficace per una trave tralicciata rettangolare interessa il solo lato inferiore e superiore ; il momento di inerzia polare efficace riguarda la trave nella sua interezza , per una rettangolo di lato a e b

$J_{Peff} = 2*0,5*b^2 *Ac +2*0,5*a^2 *Ac +4*\mu*J_C$

E e G moduli di elasticità normale e tangenziale dell'acciaio



La verifica può essere ricondotta ad una normale verifica di instabilità flessotorsionale per trave in acciaio

$M_{ED}/M_{BRD} < 1$

M_{ED} *momento di progetto derivante dal calcolo*
M_{BRD} *momento resistente di progetto per l'instabilità*
$M_{BRD} = \chi*W*fyk/\gamma$

$W = 2*J_{eff}/h$; χ*=fattore di riduzione per instabilità flessotorsionale*

La circolare esplicativa delle NTC per la verifica alla instabilità flessotorsionale dà le seguenti indicazioni;

C4.2.4.1.3.2 Travi inflesse

Il coefficiente di snellezza adimensionale $\overline{\lambda_{LT}}$, di cui al § 4.2.4.1.3.2 delle NTC, che consente di eseguire la verifica ad instabilità flesso-torsionale dipende dal valore del momento critico elastico di instabilità torsionale, M_{cr}, del profilo inflesso in esame. Tale valore può calcolarsi, per profili di qualunque geometria, utilizzando metodi numerici, quali ad esempio metodi agli elementi finiti oppure programmi di calcolo strutturale che consentano di eseguire analisi di "buckling".

In alternativa, per profili standard (sezioni doppiamente simmetriche ad I o H) il momento critico può calcolarsi con la seguente formula

$$M_{cr} = \psi \cdot \frac{\pi}{L_{cr}} \cdot \sqrt{EJ_y \cdot GJ_T} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L_{cr}}\right)^2 \cdot \frac{EJ_\omega}{GJ_T}} \qquad [C4.2.30]$$

dove L_{cr} è la lunghezza di libera inflessione laterale, misurata tra due ritegni torsionali successivi, EJ_y è la rigidezza flessionale laterale del profilo (misurata in genere rispetto all'asse debole), GJ_T è la rigidezza torsionale del profilo mentre EJ_ω è la rigidezza torsionale secondaria del profilo. Il coefficiente ψ tiene conto della distribuzione del momento flettente lungo la trave ed è dato dall'espressione

$$\psi = 1.75 - 1.05 \cdot \frac{M_B}{M_A} + 0.3 \cdot \left(\frac{M_B}{M_A}\right)^2 \qquad [C4.2.31]$$

in cui M_A ed M_B sono i momenti flettenti agenti alle estremità della trave, con $|M_B| < |M_A|$.

5-Conclusioni

Le aste tralicciate in acciaio trovano un largo impiego per la realizzazione di capannoni in acciaio sono gradevoli esteticamente ed hanno una buona rigidezza e resistenza in grado quindi di far fronte alle azioni orizzontali senza controventi. In Italia l'acciaio con la chiusura dell'Ilva lo si è preferito ad altri materiali da costruzione , parlare oggi di inquinamento atmosferico quando tutti indossiamo la mascherina è un pò inopportuno. La chiusura delle industria della acciaio è legata alla costruzione del ponte di Messina le cui tonnellate di acciaio dovevano provenire dall'Ilva di Taranto un enorme affare economico con grande danno ambientale; il ponte di Messina è una struttura inutile poiché il futuro della ingegneria meccanica non è nella ingegneria stradale ma nella ingegneria aeronautica tra circa 50 anni tutti avremo la nostra utilitaria volante con la quale possiamo spostarci in ogni luogo di Italia. Le strutture in acciaio soprattutto se si utilizza il vetro sono delle strutture moderne gradevoli che migliorano il paesaggio urbano nelle quali l'azione sismica è inesistente per cui l'industria siderurgica andrebbe incentivata e non ostacolata soprattutto se si pensa all'acciaio come materiale da costruzione. Il calcolo di una struttura metallica con aste tralicciate può essere eseguito con un normale software FEM in grado di eseguire le verifiche di instabilità locale e globale con l'analisi di buckling. La verifica di instabilità globale della singola colonna se non prevista dal software va eseguita separatamente anche se per i pilastri è già contemplata nel calcolo del moltiplicatore critico per la instabilità globale. Lo studio di questa teoria può rivelarsi complicato rappresentano degli argomenti normali di un corso di tecnica delle costruzioni e nessuno può arrogarsi la presunzione di ostacolarne il normale apprendimento poiché va contro le leggi dello stato italiano.

Bibliografia

Circolare applicativa delle nuove norme tecniche sulle costruzioni

Gli edifici a sbalzo "Cantilever Building"

1- Introduzione

2- Lo sbalzo in cemento armato

3- Lo sbalzo in legno

4- Gli edifici a sbalzo in cemento armato

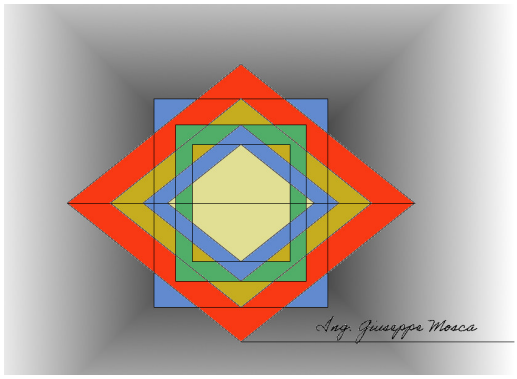
5- Gli edifici a sbalzo in legno

6- Gli edifici a sbalzo in acciaio (pannelli Bcore)

7- Il sisma verticale-Lo stato limite di oscillazione

8- La verifica a ribaltamento : Blocco rigido

9-Conclusioni



Ing. Giuseppe Mosca

N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti.

1- Introduzione

Gli sbalzi negli edifici destano dei problemi per quanto concerne la normativa sismica, la deformabilità e lo stato limite di oscillazione;nelle zone sismiche si possono realizzare balconi che hanno una luce non superiore a 130 cm e questa rappresenta una grande limitazione alla fantasia architettonica basti pensare alla casa sulla cascata di FRANK LIOYD WRIGHT o al minimalismo e brutalismo architettonico; tipici sono alcuni edifici a sbalzo che rappresentano più una provocazione che vera e propria architettura



Lo scopo di questi appunti è quello di trovare delle soluzioni progettuali strutturali alla realizzazione di sbalzi per i diversi sistemi costruttivi utilizzando materiali differenti quali legno, calcestruzzo acciaio, soluzioni che rispettino la normativa sismica e quindi che possano essere effettivamente costruiti. Per queste costruzioni in zona sismica si hanno problematiche di ribaltamento da blocco rigido , ovvero l'edificio per questioni di eccentricità del carico verticale sul piano di fondazione e quindi riduzione della sezione reagente può ribaltare ovvero il centro delle pressioni è esterno all'area di impronta. La progettazione di queste strutture deve essere molto accurata e deve tener conto della azione sismica verticale, rappresentando una notevole limitazione alla fantasia architettonica.

2- Lo sbalzo in cemento armato

Il balcone degli edifici in cemento armato in zona sismica viene realizzato tramite una soletta aggettante prosecuzione del solaio o semplice sbalzo laterale ancorato al solaio retrostante o alla trave di bordo; il calcolo è immediato lo schema statico è quello di mensola



Analisi dei carichi

Soletta	*500*	*daN/mq*
Intonaco	*40*	
Pavimento	*60*	
Ringhiera	*100*	
Carico accidentale	*400*	*Q= 1,5*1000= 1500 daN/ml F = 150 daN*

$M = Q*L^2/2 + F*L$; $V = F+Q*L$

Sbalzo di luce 150 cm soletta H=20cm

$\delta = Q*L^4/(8EI) + F*L^3/(3EI) = 1,4$ mm

Per tener conto della fessurazione senza eseguire un calcolo che tenga conto della parzializzazione (dobbiamo integrare la curvatura)consideriamo una rigidezza dimezzata e sezione interamente reagente;

$E = 320000$ daN/cmq ; $I = 100*20^3/12 = 66666$ cm^4

Sbalzo di luce 200 cm

$\delta = Q*L^4/(8EI) + F*L^3/(3EI) = 4,24$ mm

Sbalzo di luce 250 cm

$\delta = Q*L^4/(8EI) + F*L^3/(3EI) = 10$ mm

nel calcolo delle deformazioni si è trascurato il sisma verticale

$1,5*(G + Q) \approx G + Q + Ev$

Essendo $Ev \approx 0,5*(G+Q)$

La normativa Italiana impone le seguenti limitazioni per la freccia di elementi strutturali in cemento armato

L/250 carico quasi permanente al fine di garantire l'apestto e la funzionalità dell'opera
L/500 integrità delle pareti divisorie e di tamponamento portate

Per travi e solai con luce < 10 m è possibile omettere la verifica delle inflessioni verticali previa integrazione della curvatura a condizione che il rapporto tra luce e altezza della soletta rispetti la seguente limitazione

$L/H \leq K*[11+0,015*fck/(\rho+\rho')]*[500*Aseff/(fyk*Ascal)]$
ρ rapporto tra armatura compressa e sezione
ρ' rapporto tra armatura tesa e sezione
Aseff armatura tesa presente
Ascal armatura calcolata

K è riportato nella seguente tabella

Tabella C4.1.I *Valori di K e snellezze limite per elementi inflessi in c.a. in assenza di compressione assiale*

Sistema strutturale	K	Calcestruzzo molto sollecitato ρ=1,5%	Calcestruzzo poco sollecitato ρ=0,5%
Travi semplicemente appoggiate, piastre incernierate mono o bidirezionali	1,0	14	20
Campate terminali di travi continue o piastre continue monodirezionali o bidirezionali continue sul lato maggiore	1,3	18	26
Campate intermedie di travi continue o piastre continue mono o bidirezionali	1,5	20	30
Piastre non nervate sostenute da pilastri (snellezza relativa alla luce maggiore)	1,2	17	24

per mensole la nuova circolare alla NTC K= 0,4;
L/h= 6;per cls molto sollecitato
L/h=8 poco sollecitato

si vede quindi che la luce max dello sbalzo che può essere realizzata è 120 cm o 160 cm in funzione dello stato di sollecitazione del cls per uno spessore della soletta di 20cm

3- Lo sbalzo in legno e in acciaio



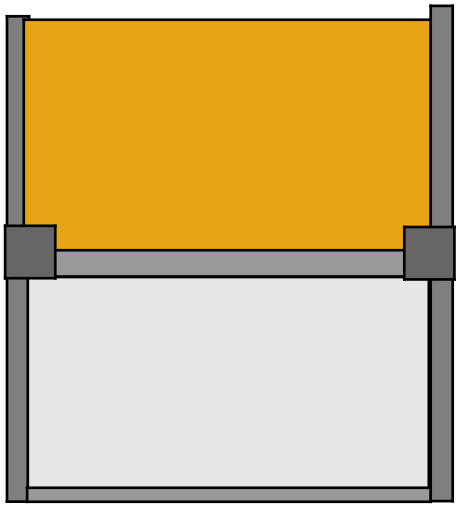
I balconi in legno o in acciaio vengono realizzati come prolungamento delle travi e pannelli di solaio , o nel caso di sbalzo laterale le travi sono ancorate alle travi di bordo o nel cordolo per gli edifici in muratura. La luce di questi sbalzi è limitata vista la deformabilità delle travi ed il carico che devono sopportare;le limitazioni della

normativa (eurocodici NTC) riguardano la freccia e la frequenza fondamentale di vibrazione.

Per sbalzi in legno
La freccia per mensole $L/75 < \delta < L/150$
La frequenza fondamentale di vibrazione $f > 8Hz$

4- Gli edifici a sbalzo in cemento armato

Vediamo in questo paragrafo come realizzare degli sbalzi di luce anche superiore a 3 m in accordo con la normativa italiana senza che si abbiano problemi di freccia e di vibrazione; lo sbalzo viene realizzato tramite una soletta in cemento armato che poggia su travi a sbalzo in prosecuzione delle travi di impalcato.



La soletta è una piastra armata con molle ancorate nelle travi di bordo ed armatura longitudinale, si comporta come un solaio a doppia orditura; per limitare le deformazioni possiamo aumentare l'altezza delle travi laterali che possono essere estradossate e fungere da parapetto con solaio sospeso



La trave è ancorata nel pilastro o se di bordo può proseguire all'interno per cui si ottengono elementi strutturali aventi dimensione 30x120 cm; il momento flettente trasmesso dallo sbalzo si ripartisce sui due pilastri ed in prosecuzione sulla trave e diventa sollecitazione torcente per la trave di bordo; la snellezza $L/h < 6$ è verificata

per una luce di 4 m. Lo sbalzo avente lunghezza 5 m trasmette un momento di circa

*M = (1500*16/2+ 100*4)=12400 daN*m/ml*

torsione per la trave di bordo e flessione per i due pilastri di estremità che devono avere dimensioni adeguate con prosecuzione quando è possibile della trave di bordo. La soluzione strutturale è quella di realizzare un parapetto in cemento armato con travi di bordo che seguono il contorno dello sbalzo in modo che le deformate siano congruenti e che il peso del parapetto frontale sia esiguo per non caricare eccessivamente lo sbalzo. Per costruzioni di architettura minimalista in cemento armato conviene utilizzare un sistema costruttivo a pareti gettate in opera , ovvero elementi monolitici in calcestruzzo ad elevata rigidezza per i quali le deformazioni e le sollecita-



zioni indotte da eventi sismici sono di modesta entità.

5- Gli edifici a sbalzo in legno



La soluzione strutturale adottata per questa casa in legno X-LAM a sbalzo è quella

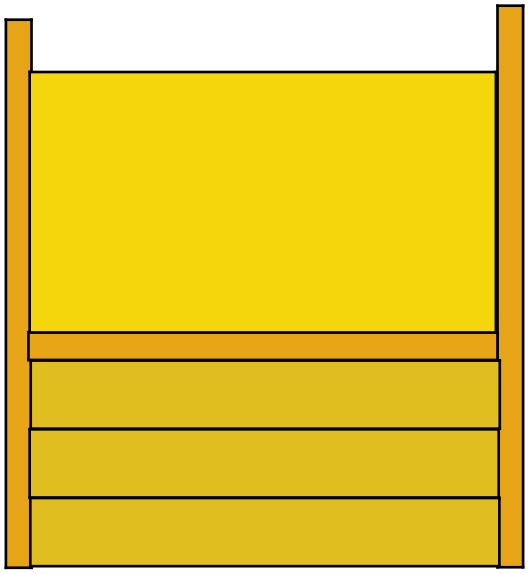
di pannelli orizzontali in legno ancorati all'interno della struttura , solaio appeso alle due pareti laterali solidarizzato ad esse tramite viti ; per un pannello X-Lam avente uno spessore di 15 cm e altezza H=100 cm la inerzia

$I=1250000\ cm^4$

*il momento resistente Mrd = 2*fmd*I/H =90000 daN*m*

*per legno lamellare fmd = 260*0,9/1,30= 180*

il pannello da solo è in grado di sopportare un elevato momento flettente.
E' importante affinché la soluzione progettuale sia affidabile strutturalmente che i pannelli laterali proseguano all'interno, in questa maniera si possono realizzare anche degli ampi terrazzi in legno senza problemi di vibrazione e di deformazione.
Pensiamo ad un terrazzo avente luce 3 m realizzato con pannelli orizzontali così come indicato in figura.



Analisi dei carichi
pannello di bordo 90 daN/ml
*pannello solaio 90*2,5=225 daN/ml*
massetto 60x2,5 = 150 daN/ml
pavimento 60x2,5= 150 daN/ml
sovraccarico accidentale 400x2,5=1000 daN/ml

Carico sulla trave di bordo

*Q= 1,5*1615 ≈2500 daN/ml F = 375 daN*

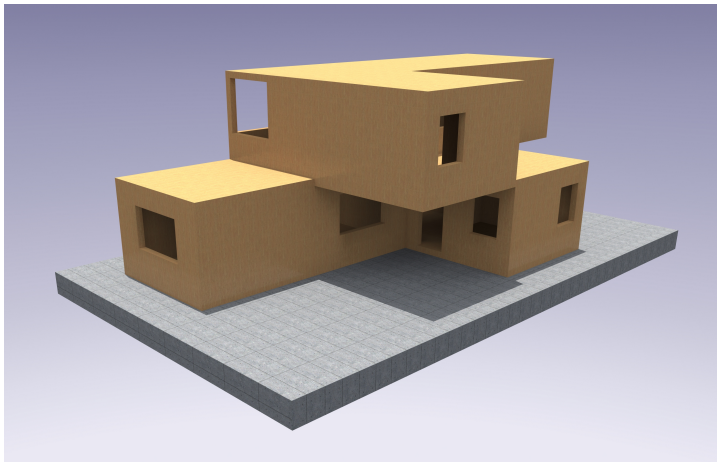
*M = 12375 daN*m V = 7875 daN*

La freccia $\delta = Q*L^4/(8*E*I) + F*L^3/(3EI) = 0{,}19$ *cm*

i pannelli di bordo dello sbalzo sono poco sollecitati .
La freccia nella mezzeria del pannello di solaio di estremità

$\delta = 0{,}19 + 5*Q*L^4/(384*E*I) = 2{,}10$ *cm* $\approx 1/250\ L$

La frequenza fondamentale di vibrazione va valutata tramite un analisi dinamica verticale che tenga conto sia delle pareti laterali che dei pannelli di solaio orizzontali da eseguire per mezzo di un software FEM.



Questo edificio è un blocco modulare in legno monolitico realizzato con il sistema Kerto LVL , in cui le pareti laterali sono irrigidite da montanti verticali che ci tutelano nei confronti della instabilità flessotorsionale , il cui comportamento è scatolare ad elevata rigidezza; i pannelli laterali in legno sono disposti in direzione orizzontale ed ancorati all'interno .

6- Gli edifici a sbalzo in acciaio (pannelli Bcore)

I pannelli in acciaio ***Bcore*** *sono modulari , hanno una larghezza di circa 2 m , sono ad elevata resistenza e rigidezza vengono assemblati tramite saldature;per realizzare parti a sbalzo il pannello deve essere continuo ed ancorato all'interno per cui deve avere una larghezza pari all'altezza di interpiano. Esistono esempi di architetture brutali realizzate con il sistema Bcore*



Se utilizziamo i moduli verticali aventi dimensione 2,00x3,00 m assumono importanza i collegamenti le giunzioni tra i pannelli per cui se si riesce a ripristinare la continuità ovvero a garantire la medesima rigidezza tra due pannelli consecutivi non si hanno problemi di resistenza e deformabilità per le parti a sbalzo.

7- Il sisma verticale

Le norme tecniche per le costruzioni 2018 impongono di considerare l'azione sismica verticale

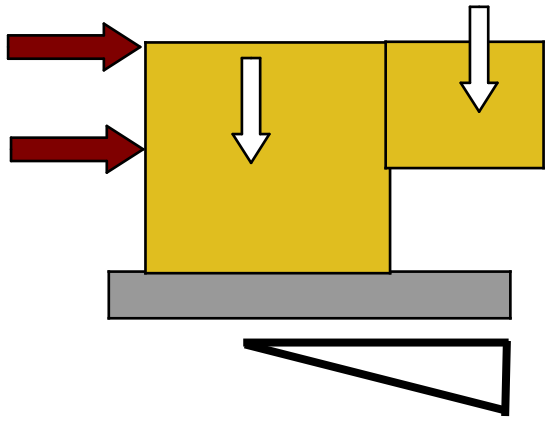
"La componente verticale deve essere considerata, in aggiunta a quanto indicato al § 3.2.3.1, anche in presenza di elementi pressoché orizzontali con luce superiore a 20 m, elementi precompressi (con l'esclusione dei solai di luce inferiore a 8 m), elementi a mensola di luce superiore a 4 m, strutture di tipo spingente, pilastri in falso, edifici con piani sospesi, ponti, e costruzioni con isolamento nei casi specificati in §7.10.5.3.2."

In ogni caso il fattore di struttura da utilizzare per l'azione sismica verticale q= 1,5 mentre per i ponti q= 1

L'analisi dinamica verticale per strutture a sbalzo va sempre eseguita poiché ci consente di individuare il periodo fondamentale di oscillazione e quindi la frequenza necessaria per la verifica allo stato limite di oscillazione e quindi vedere se è possibile utilizzare lo sbalzo ovvero se non vi sono fastidiose vibrazioni che non ne consentono l'uso corretto.

8- La verifica a ribaltamento : Blocco rigido

La verifica a ribaltamento di blocco rigido è una verifica geotecnica di stabilità globale che va eseguita tenendo conto anche delle reazioni del terreno, considerando la fondazione e la sovrastruttura infinitamente rigida , sollecitata dal carico verticale peso proprio e dalle azioni orizzontali quali vento o sisma nelle due direzioni.



La verifica è tridimensionale consiste nel valutare le condizioni di equilibrio determinando le coordinate del centro di pressione

$e_X = M_Y/P$; $e_{Yi} = M_X/P$;

vedere se è interno al nocciolo centrale di inerzia e quindi se il terreno è interamente reagente
$e_X \leq bx$; $e_Y \leq by$;

se la sezione è parzializzata ovvero la parte reagente nella ipotesi di elasticità lineare

$u_X = bx/2-e_X$; $u_Y = by/2-e_Y$;

e quindi sezione reagente $3* u_X$; $3* u_Y$;

oppure se il centro delle pressioni è esterno all'area di fondazione e quindi il nostro edificio ribalta.
Vengono determinate le tensioni sul terreno che devono essere minori del carico limite e valutati gli spostamenti rigidi della nostra casa tenendo presente che le reazioni del terreno modellato alla Winkler $\sigma= K*W(x,y)$ *dove*

K costante di sottofondo W(x,y) spostamento verticale

9-Conclusioni

Progettare degli edifici a sbalzo in zona sismica è possibile senza che venga violata la normativa italiana garantendo degli adeguati livelli di sicurezza strutturale , in modo da ottenere edifici gradevoli con architetture minimali , case che si integrano nella natura e rappresentano dei punti di riferimento dell'ambiente urbano e naturale che diventano per la loro architettura luoghi da visitare al pari di un monumento o una chiesa situato in un centro storico. La progettazione strutturale al pari di quella architettonica è molto importante deve essere curata nei suoi dettagli poiché la mancata stabilità del nostro edificio pregiudica quella intrinseca bellezza architettonica propria delle case a sbalzo.

Bibliografia
NTC 2018 , Circolare NTC 2018

Interazione dinamica terreno struttura per torri

1- Introduzione

2- Modellazione del terreno e rigidezza

3- Analisi dinamica di una torre e serbatoio

4- Stabilità dell'equilibrio di una torre

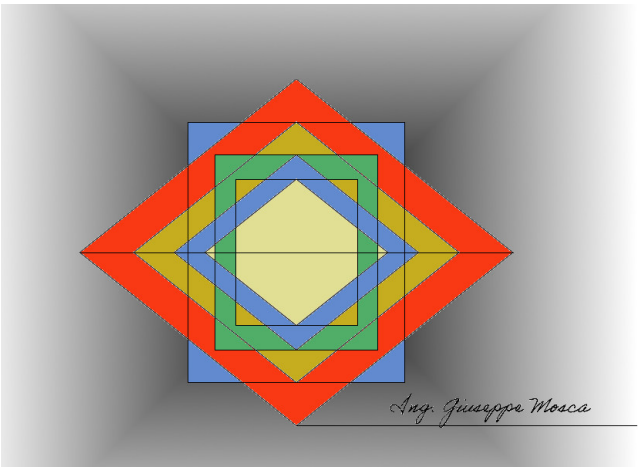
5- Interventi di consolidamento statico per torri

6- Design strutturale

7- La Modellazione FEM

8- La Torre di Pisa

9- Conclusioni





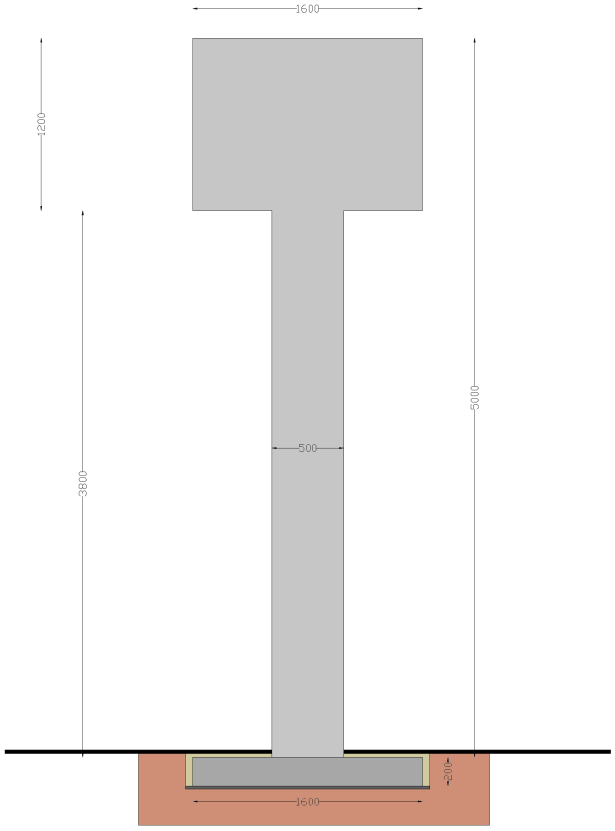
N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

Le torri in cemento armato o muratura quali fari che prospettano sul mare , serbatoi d'acqua sopraelevati in cemento armato , o ancora la stessa torre di Pisa che ha da molti anni una inclinazione sull'asse verticale , presentano problemi di stabilità dell'equilibrio ovvero per carico verticale e conseguente effetto P-Δ , per forze orizzontali quali vento e azioni sismiche possono ribaltare rispetto alla base , non in conseguenza della scarsa resistenza del materiale costituente , ma per effetto del terreno della sua deformabilità e rotazione. Prima di eseguire una verifica di stabilità dell'equilibrio va verificata la capacità di resistenza del terreno per carico limite vanno valutati i cedimenti di fondazione ,e poi si esegue una analisi che tenga conto della interazione dinamica terreno struttura che può essere eseguita modellando il terreno agli elementi finiti attraverso un software FEM , o ancora eliminando la condizione di incastro alla base per torre con schema statico a mensola modellando il terreno alla Winkler sia per fondazione elastica che rigida , tenendo anche conto delle azioni mutue tra le molle ovvero le strisce di terreno , o utilizzando i dati forniti dalla bibliografia per la definizione della rigidezza tagliante e rotazionale alla base. Il calcolo di una torre come può esser un serbatoio non si limita alla sola verifica di stabilità dell'equilibrio ma bisogna eseguire un calcolo che tenga conto delle azioni sismiche e quindi una analisi statica o dinamica lineare che tenga conto anche dell'acqua presente nel serbatoio della sua spinta sulle pareti e del suo contributo alla azione sismica in funzione della sua oscillazione dinamica che molto spesso è in opposizione di fase ovvero la forza sismica associata alla massa d'acqua . Le verifiche strutturali da eseguire sono a pressoflessione e taglio , considerando due schemi limite quello definito dal software FEM che verifica il singolo elemento plate-shell e quello di sezione a corona circolare derivante dalla schematizzazione a mensola con inerzia molto elevata per la quale si calcolano le armature metalliche o si determina la sezione reagente per muratura compressa. Per strutture a torre esistenti si pone il problema del consolidamento delle torri che può avvenire attraverso un esoscheletro in acciaio che migliora la resistenza alle azioni sismiche , con un ampliamento della fondazione stabilizzando la torre anche nei confronti del ribaltamento. I serbatoi sopraelevati in cemento armato essendo strutture di elevata altezza molto spesso raggiungono i 40-50 m arrecano oltre che del danno ambientale se ubicati nel territorio comunale impatto urbano per cui l'intervento di consolidamento deve mirare la riqualificazione che può avvenire utilizzando del vetro; sarebbe di effetto un miglioramento sismico , per la torre di Pisa con un esoscheletro in acciaio nel quale vengono inseriti pannelli in vetro , migliorando la sua resistenza alla azioni orizzontali tutelandola nei confronti di un ribaltamento provocato da terremoti che negli ultimi anni hanno interessato anche la Toscana , migliorando notevolmente con un tocco di modernità la qualità artistica dello stesso bene culturale , che nel corso degli anni è stato oggetto di studi che hanno avuto come obiettivo il ripristino della verticalità della torre facendo ricorso alla teoria del carico limite o il suggerimento degli stessi cittadini di Pisa tramite le attività commerciali presenti nella zona adiacente la torre quale un busto per ripristinare la verticalità della torre come per gli esseri umani che hanno la schiena curva.

2- Modellazione del terreno e rigidezza

Consideriamo il serbatoio di acqua riportato in figura con struttura in cemento armato a corona circolare avente una altezza di 50 m , diametro alla base 5 m, ed in sommità per una altezza di 12 m un diametro di 16 m, fondazione circolare a platea altezza 2 m e diametro 16 m ; ci occuperemo in questo paragrafo esclusivamente dei problemi legati alla geotecnica o meglio alla tecnica delle fondazioni eseguendo una verifica a carico limite, determinando i cedimenti di fondazione e modellando il terreno ricavando le relative rigidezze taglianti e rotazionali.



La verifica a carico limite è immediata attraverso la formula generale

$$Q_{Lim} = s_q * i_q * b_q * g_q * \psi_q * Nq * q_O + s_c * i_c * b_c * g_c * \psi_c * Nc * C + s_\gamma * i_\gamma * b_\gamma * g_\gamma * \psi_\gamma * N\gamma * B * \gamma / 2$$

per la quale rimandiamo agli appunti sulle travi di fondazione con l'unica variante che la forma non è rettangolare ma circolare per cui variano di coefficienti di forma

Forma della fondazione	s_q	s_c	s_γ
Rettangolo L> B	*1+(B/L)*tgφ*	*1+(B/L)*Nq/Nc*	*1-0,4*B/L*
quadrata o cerchio B= L	*1+tgφ*	*1+Nq/Nc*	*0,6*

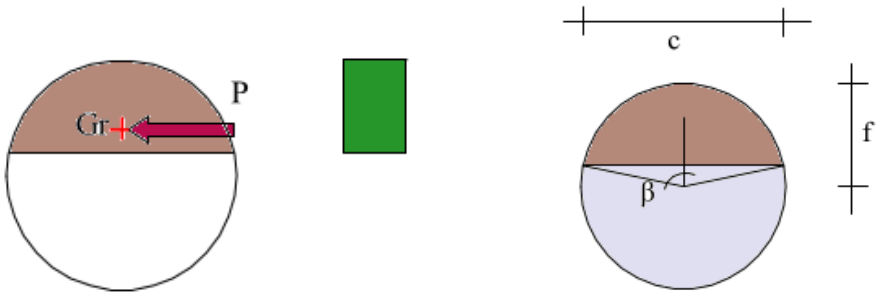
Si ricavano le tensioni sul terreno derivanti dalle azioni che sollecitano il serbatoio quali peso proprio , carichi permanenti (acqua) e azioni sismiche orizzontali con sollecitazione di pressoflessione anche per sezione parzializzata

$\sigma = P/A \pm M/W$ *terreno interamente reagente*

$A = \pi * R^2$; $W = I/R$; $I = \pi * R^4/4$

per sezione parzializzata poiché il terreno non reagisce a trazione , bisogna individuare la sezione reagente è definita dall'angolo β per tensione di compressione costante dove Y_{GR} *coincide con l'eccentricità ;β lo si determina dalla seguente equazione trovando gli zeri della funzione con un software*

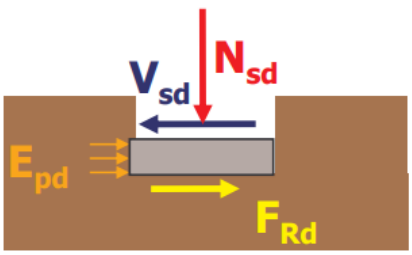
$M/P = (Aseg./\pi r^2) * 4/3 * (r\sin^2\beta)/(2\beta - \sin^2\beta)$;



$A_R = \pi * r^2 - A_{Seg}$; $Y_G = (A_{seg}./\pi r^2) * 4/3 * (r\sin^2\beta)/(2\beta - \sin^2\beta)$

La tensione sul terreno $\sigma = P/A_R$

La verifica a carico limite $\sigma \leq Q_{Lim}$ *per fondazione rigida; Se utilizziamo un software FEM le tensioni sul terreno sono quelle derivanti dal calcolo e dalla modellazione del terreno con fondazione elastica.*
Per la verifica allo scorrimento bisogna tener conto della forma cilindrica della platea.



Per la verifica dei cedimenti di fondazione si utilizzano le formule riportate in bibliografia ad esempio

$\delta = q * B/E_O * (I_1 * I_2)$ *o dei software di calcolo.*

La modellazione del terreno possiamo eseguirla alla Winkler nella ipotesi di fondazione infinitamente rigida e possiamo determinare la rigidezza rotazionale per sezione interamente reagente a partire dalla costante di sottofondo k del terreno

Alcuni valori indicativi dell'angolo di attrito φ		Alcuni valori indicativi della coesione		Alcuni valori indicativi del peso volumico	
Ghiaia media	40°-55°	Sabbia compatta	0,001daN/cmq	Ghiaia asciutta	18-20 KN/m^3
Ghiaia sabbiosa	35°-50°	Argilla molle	0,010daN/cmq	Ghiaia bagnata	19-21 KN/m^3
Sabbia sciolta	28°-34°	Argilla sabbiosa	0,020daN/cmq	Sabbia asciutta	15-18 KN/m^3
Sabbia compatta	35°-46°	Argilla plastica	0,025daN/cmq	Sabbia bagnata	16-19 KN/m^3
Limo	20°-30°	Argilla solida	0,05-0,20 daN/cmq	Argilla sabbiosa	18-22 KN/m^3
Argilla asciutta	40-55°	Argilla tenace	0,20-1,00daN/cmq	Argilla solida	20-21 KN/m^3
Argilla bagnata	20°-25°	Limo	0,010daN/cmq	Limo	15-17KN/m^3

riportati di seguito

NATURA DEL TERRENO	*K (Kg/cm3)*
torba leggera	0.6 ~ 1.2
torba pesante	1.2 ~ 1.8
terra vegetale	1.0 ~ 1.5
depositi recenti	1.0 ~ 2.0
sabbia di mare, fina	1.5 ~ 2.0
sabbia poco coerente	2.0 ~ 4.0
terra molto umida	2.0 ~ 3.5
terra poco umida	3.0 ~ 6.0
terra secca	5.0 ~ 10.0
argilla con sabbia	8.0 ~ 10.0
argilla grassa	10.0 ~ 12.0
sabbia compatta	8.0 ~ 15.0
ghiaia con sabbia	10.0 ~ 25.0
ghiaia compatta	20.0 ~ 30.0

Dalla formula $\sigma = P/A \pm M/W$ *che si compone di un diagramma di tensioni costante* $\sigma = P/A$ *al quale corrisponde una traslazione rigida ed un un diagramma di tensioni a farfalla dalla formula di Navier* $\sigma = M*R/I$ *al quale corrisponde una rotazione rigida otteniamo due rigidezze la prima traslazionale verticale*

$\sigma_R = k * v$, *k costante di sottofondo v spostamento corrispondente*

$K_T = \sum k_i$; k_i ; *rigidezza della singola molla* $K_T = \pi * R^2 * k$

la seconda rotazionale

$v = R * \vartheta$, ϑ *rotazione della fondazione*

$M = \int r_i * \vartheta * k_i * r_i * dA$ $K_R = I * k$ *I momento di inerzia rispetto al centro*

Le due rigidezze $\boldsymbol{K_T = \pi * R^2 * k}$; $\boldsymbol{K_R = I * k}$

Le formulazioni utilizzate per la definizione della rigidezza riportate in bibliografia risultato della interazione dinamica terreno struttura

Rigidezza traslazionale orizzontale $K_X = 8*G*R/(2-\mu) + ...$

Rigidezza rotazionale $K_R = 8*G*R^3/3*(1-\mu) .....$

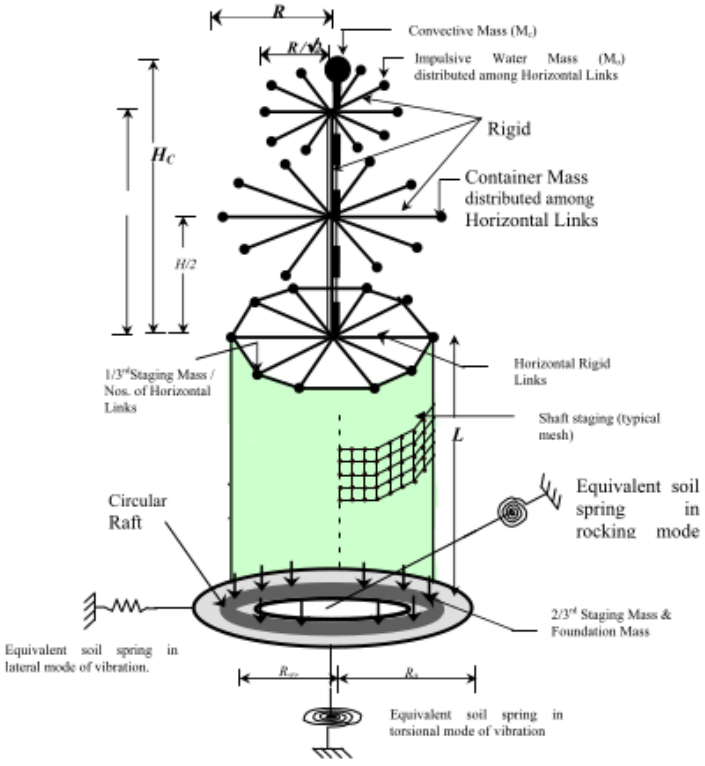
Rigidezza torsionale $K_T = 6*G*R^3 .....$

R raggio della fondazione

G modulo di elasticità tangenziale del terreno nella ipotesi di semispazio elastico

μ modulo di Poisson del terreno

Ricordando le formule della scienza delle costruzioni $G = E/([2*(1-\mu)]$ *è evidente il legame tra modulo di elasticità normale del terreno e modulo di elasticità tangenziale.*



Ulteriori formulazioni per la rigidezza rotazionale e traslazionale dovuta al cedimento di fondazione

$K_T = E*D/(1-\mu^2)$ $K_R = E*D^3/6*(1-\mu^2)$

D rigidezza di piastra , E modulo elastico del terreno

Nella modellazione alla Winkler si può tener conto anche della interazione mutua tra le strisce verticali di terreno ovvero del modulo di elasticità tangenziale G

la reazione del terreno dovuta alla sua elasticità

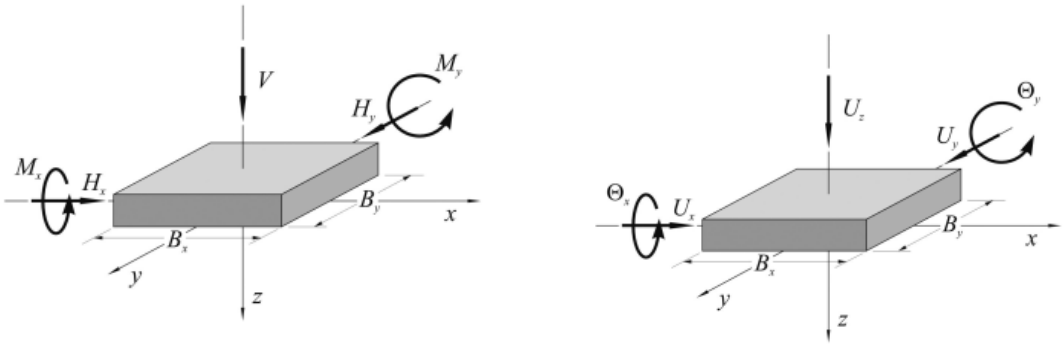
$\sigma = K * W(r) - K' * W^{II}(r)$

K = Es/H costante di sottofondo

*K' = H*Gs/3 costante dovuta alla interazione mutua tra le strisce*

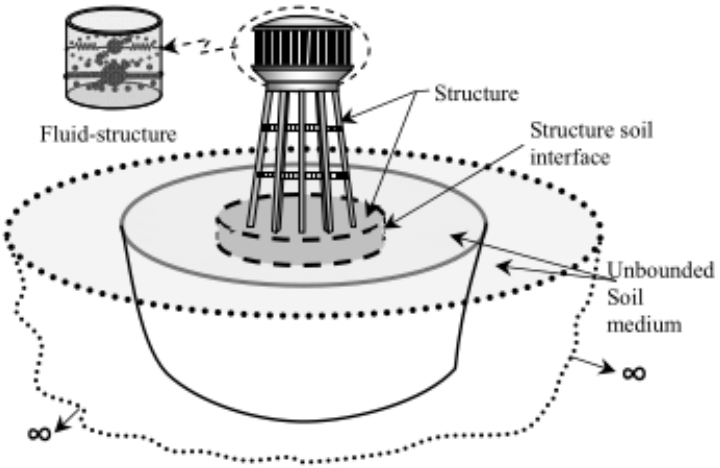
W(r) cedimento del terreno

per fondazione rigida la interazione mutua non esiste , se ne deve tener conto nella ipotesi di fondazione elastica.
Nel calcolo strutturale attraverso un software FEM di può modellare il terreno agli elementi finiti individuando un volume significativo definito da elementini Brick tridimensionali . Per il terreno si ipotizza un comportamento lineare , per cui si fa riferimento al semispazio elastico definendo per il terreno i moduli elastici, il peso specifico ed il diagramma tensioni deformazioni. Ovviamente il volume di terreno deve essere tutto compresso che è poi ciò che succede nella realtà in virtù del peso specifico , poiché il terreno è incapace di resistere a trazione; eseguendo una analisi dinamica si tiene conto della geologia locale ovvero del movimento del suolo in presenza di eventi sismici. Un ulteriore modellazione è quella a macrolemento tramite un elemento ***plate-shell***



anche per strati di terreno omogenei in modo da considerare la variabilità delle caratteristiche meccaniche lungo la profondità del terreno. Il volume di terreno da considerare al di sotto del serbatoio o faro al fine di tener conto sia della rotazione della fondazione elastica che del propagarsi delle onde sismiche nel terreno e quindi delle sue deformazioni è definito dalle NTC come volume significativo intendendo la parte di sottosuolo influenzata, direttamente o indirettamente, dalla costruzione del manufatto e che influenza il manufatto stesso:la responsabilità della definizione del volume significativo spetta al progettista

3- Analisi dinamica di una torre e serbatoio



Lo schema statico del serbatoio è quello di un oscillatore semplice ovvero di una mensola con incastro cedevole alla base nei tre gradi di libertà ; bisogna tener conto del movimento della massa d'acqua all'interno del serbatoio. L'equazione di equilibrio dinamico in assenza di damping, anche in forma matriciale

$m*x''+ K*x = m* s(T)$

in presenza di smorzamento viscoso diventa

$m*x''+c* x'+K*x = m*s(T)$

la massa è quella complessiva la possiamo considerare distribuita lungo l'altezza per il serbatoio o concentrata alla sommità secondo il seguente schema statico:

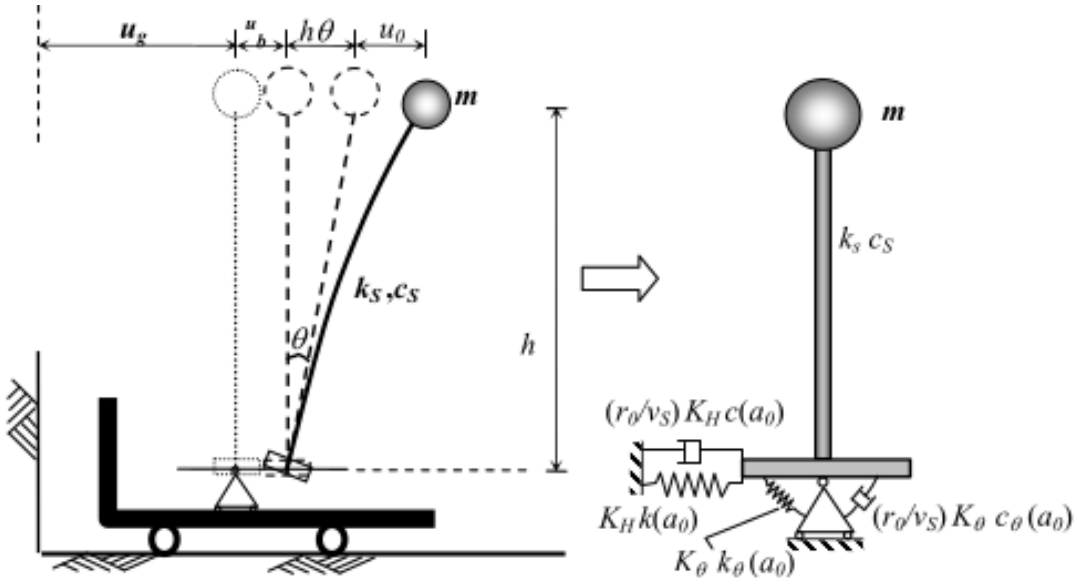


Fig.5. Dynamic model of structure and soil for horizontal and rocking motions

Bisogna definire la rigidezza del terreno , schematizzata come una molla

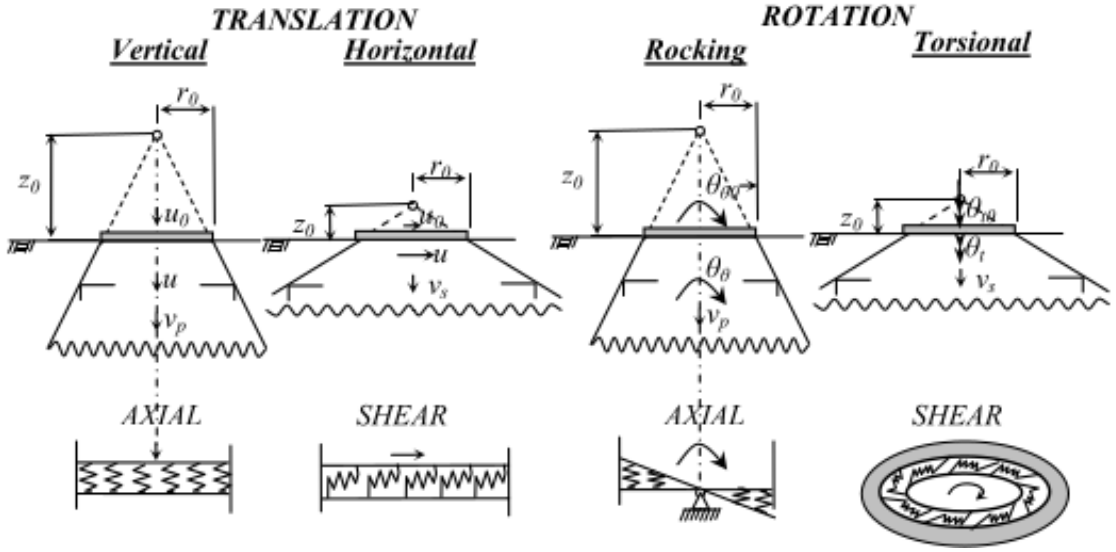
Rigidezza traslazionale verticale $K_V = E*D/(1-\mu^2)$

Rigidezza traslazione orizzontale $K_H = 8*G*R/(2-\mu)$

Rigidezza rotazionale $K_R = 8*G*R^3/3*(1-\mu)$

Rigidezza torsionale $K_T = 6*G*R^3$

secondo le formulazione definite in precedenza



o attraverso le formule riportate nella seguente tabella

Stiffness	Foundation with no embedment	Foundation with Embedment
Vertical (K_v)	$\frac{4Gr_0}{1-\upsilon}$	$\frac{4Gr_0}{1-\upsilon}\left(1+1.3\frac{r_0}{d}\right)\left(1+0.54\frac{e}{r_0}\right)\left(1+\left(0.85-0.28\frac{e}{r_0}\right)\frac{e/d}{2-e/d}\right)$
Horizontal (K_H)	$\frac{8Gr_0}{2-\upsilon}$	$\frac{8Gr_0}{2-\upsilon}\left(1+\frac{1}{2}\frac{r_0}{d}\right)\left(1+\frac{e}{r_0}\right)\left(1+\frac{e}{d}\right)$
Rocking (K_R)	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\upsilon)}$	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\upsilon)}\left(1+\frac{1}{6}\frac{r_0}{d}\right)\left[1+2.3\frac{e}{r_0}+0.58\left(\frac{e}{r_0}\right)^3\right]\left(1+0.7\frac{e}{d}\right)$
Torsional (K_T)	$\frac{16Gr_0^3}{3}$	$\frac{16Gr_0^3}{3}\left(1+\frac{1}{10}\frac{r_0}{d}\right)\left(1+2.67\frac{e}{r_0}\right)$
Coupling		$K_{Hr}=\frac{e}{3}K_H$

Per quanto concerne la rigidezza della mensola è evidente che è funzione della modellazione e quindi concentrazione delle masse ;

$K=3EI/H^3$; o per masse concentrate lungo l'altezza , in numero n

m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 , ... m_n ,

i coefficienti di rigidezza

k_{1N}, k_{2N}, k_{3N}, k_{4N}, k_{5N}, ...k_{II}, ...k_{1N},

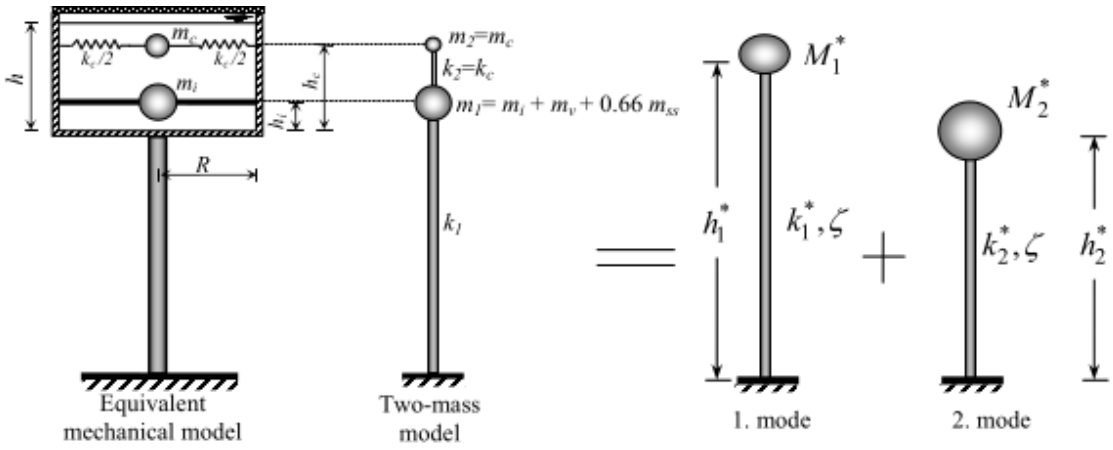
il generico coefficiente $k_{I\,J} = 1/v_{IJ}$

dove v_{IJ} è lo spostamento orizzontale nel nodo i per effetto di una forza unitaria applicata nel nodo j per .

Per quanto concerne l'acqua presente nel serbatoio in presenza di un evento sismico oscilla all'interno del serbatoio ; la massa complessiva $m = m_A + m_P$

m_A massa di acqua = massa convettiva m_C ;
m_P massa pareti = massa impulsiva m_1 ;

la massa pareti è solidale alla struttura del fusto mentre la massa d' acqua oscilla al suo interno.



k_C rigidezza pareti , schematizzabile a mensola , o a piastra vincolata su tre lati;
Le molle sono in serie , la rigidezza complessiva della mensola con incastro cedevole alla base che tiene conto della deformabilità del terreno

$1/K = 1/K_m + 1/K_s + 1/K_A$; $K = (K_m * K_s * K_A)/(K_m + K_s + K_A)$

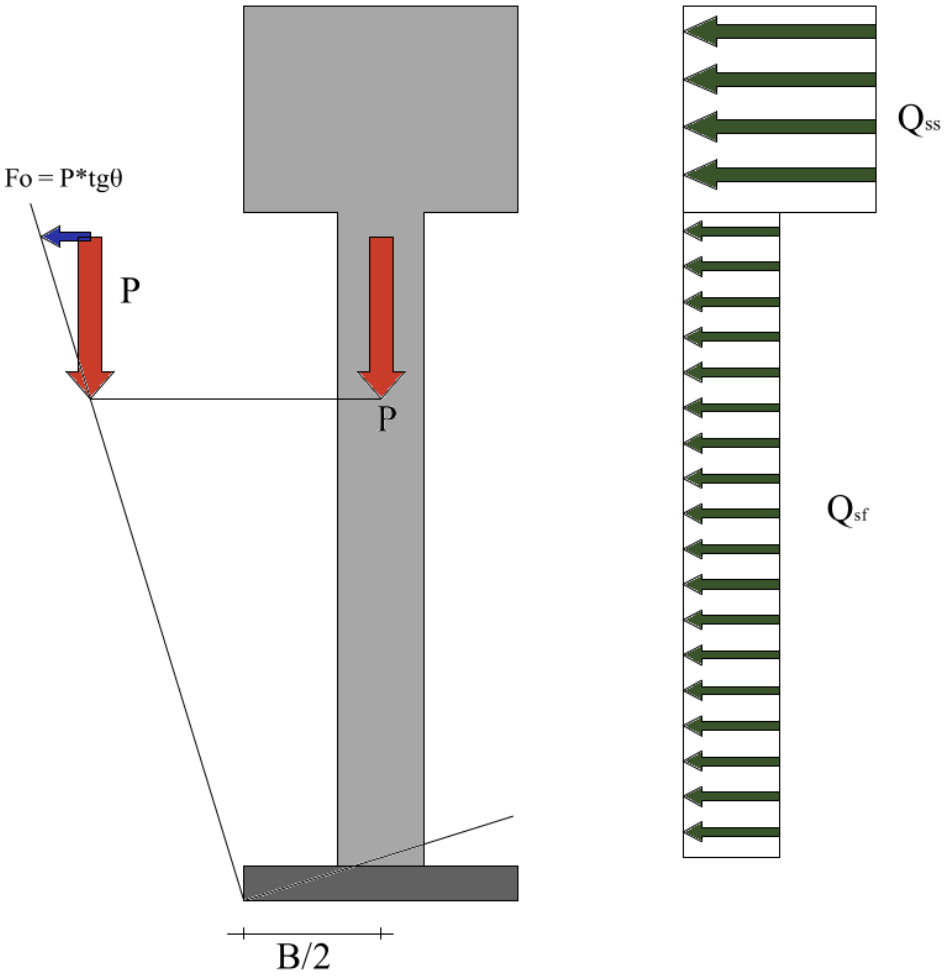
K_m rigidezza mensola ; K_s rigidezza suolo; K_A rigidezza serbatoio acqua;

4- Stabilità dell'equilibrio di una torre

Analizziamo la stabilità di equilibrio della torre con una analisi statica lineare applicando forze sismiche statiche distribuite lungo l'altezza in funzione della massa del serbatoio e dell'acqua in esso presente; la verifica di stabilità dell'equilibrio è molto semplice è a ribaltamento rispetto al centro di rotazione che è il punto estremo della fondazione. Si determinano il momento ribaltante M_R ed il momento stabilizzante M_S

M_R è funzione delle azioni sismiche e delle forze derivanti dall'effetto P-Δ

M_S è funzione del peso P e del braccio ovvero distanza dal centro di rotazione



*M_S = P*B/2 momento stabilizzante*

P peso dovuto alla struttura in c.a, del serbatoio e alla massa di acqua

Si è ipotizzato che il centro di rotazione per fondazione quadrata di lato B = D diametro del cerchio coincida con il bordo esterno

$M_R = Q_{SF} * H_F^2/2 + Q_{SS} * H_S * (H_S/2 + H_F) + P * (tg\theta + \delta)$

Q_{SF} *forza sismica dovuta alla massa* M_F *del fusto*

Q_{SS} *forza sismica dovuta alla massa* M_S *del serbatoio e dell'acqua* M_A

H_F *altezza fusto ;* H_S *altezza serbatoio ;* H_G *altezza baricentro*
δ *spostamento flessionale che possiamo ricavare dalla seguente relazione*

$\delta = Q_{SF} * H_F^4/(8EI_F) + Q_{SF} * H_F^3 * H_S/(6EI_F) + Q_{SS} * H_S^4/(8EI_S) + P * (tg\theta + \delta/h_G) * hg^3/(3EI)$

spostamento dovuto all'effetto P-Δ $P * (tg\theta + \delta/h_G) * hg^3/(3EI)$

$\delta = [Q_{SF} * H_F^4/(8EI_F) + Q_{SF} * H_F^3 * H_S/(6EI_F) + Q_{SS} * H_S^4/(8EI_S) + P * tg\theta * hg^3/(3EI)]/[1 - P * \delta * hg^2/(3EI)]$

Per semplicità le azioni sismiche sono state considerate costanti e non con distribuzione lineare variabile lungo l'altezza triangolare

$Q_{SF} = Sd(T) * M_F$; $Q_{SS} = Sd(T) * (M_A + M_S)$

il carico sismico è a metro lineare per cui si considera una massa distribuita .
Il periodo di vibrazione lo possiamo stimare con la formula $\omega^2 = k/M$,

M massa complessiva ; K rigidezza struttura ; $T = 2 * \pi/\omega$

La rotazione alla base θ *è fornita dalla seguente relazione* $M_R = K_R * \theta$

$K_R = 8 * G * R^3/3 * (1 - \mu)$; $\theta = M_R/K_R$

La verifica per solo blocco rigido senza considerare la deformazione flessionale δ

$M_S \geq M_R$ *, possiamo introdurre un coefficiente di sicurezza* $\eta = 1,3$

$M_S \geq \eta * M_R$

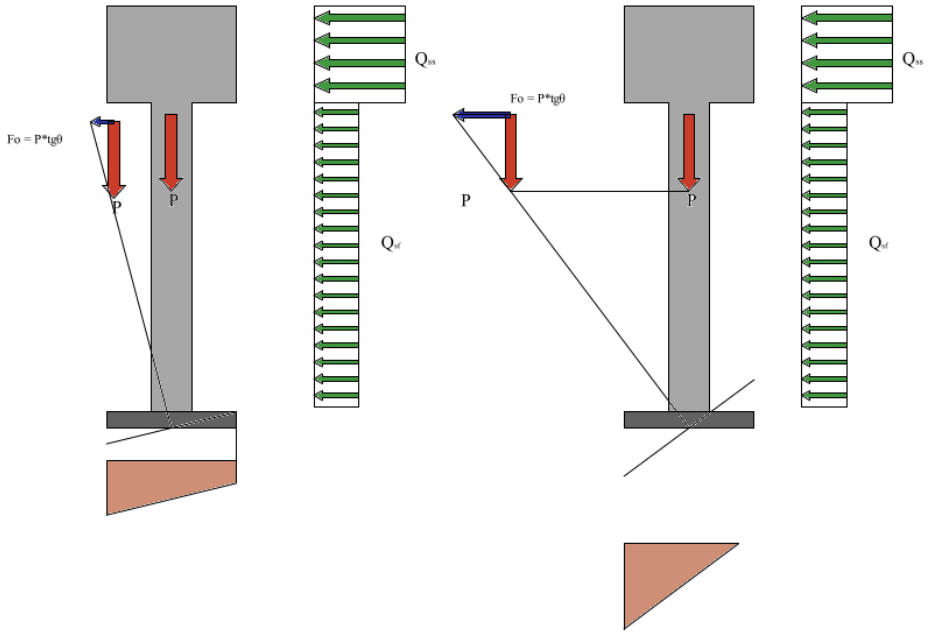
Se consideriamo le reazioni del terreno al di sotto della fondazione attraverso una modellazione alla Winkler , per le equazioni cardinali della statica deve essere

$\sum F_{XI} = 0$ *equilibrio alla traslazione orizzontale ;*

$\sum F_{YI} = 0$ *equilibrio alla traslazione verticale ;*

$\sum M_I = 0$ *equilibrio alla rotazione rispetto al centro di rotazione C ;*

Per sezione interamente reagente , ovvero per area di impronta del terreno compressa e fondazione rigida , e per sezione parzializzata



Nella ipotesi di blocco rigido ***l'equilibrio alla traslazione verticale***

$P + B^* H * k^* V_O = 0$; $V_O = P/(B^2 * k)$ *spostamento traslazionale*

B lato fondazione quadrata

Equilibrio alla traslazione orizzontale

$1/2 * K_p * \gamma * h + P * tg\delta \geq \eta * (Q_{SF} * H_F + Q_{SS} * H_S + P * tg\theta)$

$\eta = 1,2$
h altezza fondazione
γ *peso specifico terreno*
K_p *coefficiente spinta passiva*
P peso totale serbatoio e acqua
$\delta = 2/3 * \varphi$ *angolo di attrito fondazione piano di posa*

Equilibrio alla rotazione *per ricavare la rotazione* θ

$M_R = k * \theta * B/2 * B * 2/3 * B$;

$M_R = Q_{SF} * H_F^2/2 + Q_{SS} * H_S * (H_S/2 + H_F) + P * H_G * tg\theta$

$Q_{SF} * H_F^2/2 + Q_{SS} * H_S * (H_S/2 + H_F) + P * H_G * tg\theta = k * tg\,\theta * B^3/3$

$tg\theta = [Q_{SF} * H_F^2/2 + Q_{SS} * H_S * (H_S/2 + H_F)] / [k * B^3/3 - P * H_G^2]$

Dallo spostamento traslazionale V_O e la rotazione θ possiamo risalire alla reazione alla Winkler del terreno e vedere se la sezione è interamente reagente o parzializzata e se il complesso serbatoio terreno è in equilibrio come blocco rigido.

Se nel terreno vi è trazione si deve individuare la sezione reagente

*b =3*u , nella ipotesi di comportamento elastico lineare*
*b =2*u , nella ipotesi di comportamento plastico*

imponendo l'equilibrio $\sigma = 2/3 * P/(B*u) = k * tg\theta * 3u$

$tg\theta = 2*P/(k*B*u^2)$; $\theta = \arctan[2*P/(k*B*u^2)]$

Vanno introdotti i coefficienti di sicurezza per ribaltamento e slittamento

$V_{RD} \geq \eta * V_{SD}$; $M_S \geq \eta * M_R$; $\eta_V = 1,2$; $\eta_R = 1$

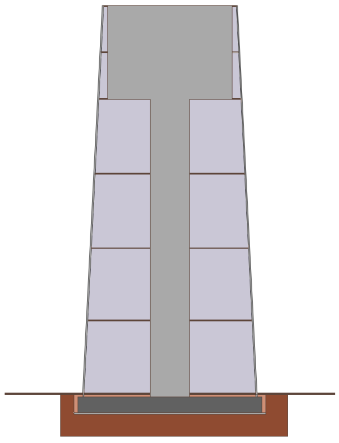
5- Interventi di consolidamento statico per torri

Le torri e i serbatoi hanno una sezione trasversale ad elevata inerzia se il comportamento strutturale si avvicina a quello di una mensola non vi sono problemi dovuti alla pressoflessione o al taglio , la preoccupazione maggiore è quella del ribaltamento e della instabilità verticale dovuta alla rotazione del piano di posa della fondazione. L'intervento di consolidamento deve avere come obiettivo l'incremento del momento stabilizzante , che dipende dal peso P del serbatoio e dalla distanza dell'asse passante per il centro C di rotazione; intervenire sul peso del serbatoio è inopportuno poiché aumenta la massa M e quindi la azione sismica orizzontale con conseguente incremento del momento ribaltante, si deve quindi intervenire sulla fondazione allargandola ovvero aumentando il braccio del momento stabilizzante. Si può anche intervenire sul momento ribaltante poiché si parla di stabilità dell'equilibrio ovvero di forze orizzontali aggiuntive derivanti dalla deformazione della struttura per effetto dello sforzo normale ovvero del peso struttura per cui si può irrigidire la torre e il serbatoio limitando lo spostamento in sommità dovuto alla deformazione elastica per effetto delle azioni sismiche e non alla rotazione rigida del blocco funzione delle caratteristiche del terreno e della fondazione. I serbatoi esistenti sono stati costruiti molti anni fa con antiche normative che prevedevano la suddivisione del territorio sismico italiano in tre zone per le quali si avevano i seguenti valori della accelerazione al suolo:
*Zona I categoria Ag = 0,1*g*
*Zona II categoria Ag = 0,07*g*
*Zona III categoria Ag = 0,04 *g*

*Le attuali **NTC 2018** se facciamo riferimento alla zonazione sismica italiana*

*Zona 1 Ag= 0,35 *g*
*Zona 2 Ag= 0,25 *g*
*Zona 3 Ag= 0,15 *g*
*Zona 4 Ag= 0,05 *g*

è evidente che vi è stata una maggiorazione delle azioni orizzontali anche se utilizziamo il coefficiente di struttura q che diminuisce l'accelerazione ma per modelli statici a mensola q = 1,5 , per cui i serbatoi in cemento armato esistenti necessitano anche di consolidamento statico ,inutile parlare di torri e fari con struttura in muratura Il consolidamento può essere eseguito attraverso ringrossi in calcestruzzo interventi con fibrorinforzati , ma la soluzione migliore è realizzare uno esoscheletro con profili sottili in acciaio che si estende a tutta la altezza del serbatoio e con la sua struttura reticolare contribuisce all'assorbimento delle forze sismiche e limita le deformazioni riducendo l'effetto instabilizzante dei carichi verticali. L'esoscheletro ha un diametro maggiore del serbatoio per cui il consolidamento strutturale deve essere per forza accompagnato da un allargamento della fondazione incrementando la rigidezza senza aumentare le azioni sismiche riducendo gli spostamenti e la deformabilità flessionale del serbatoio dovuta alle azioni orizzontali . Riportiamo la struttura di un serbatoio consolidata tramite un esoscheletro in acciaio



I profilati della struttura reticolare vanno dimensionati e calcolati non solo per aumentare la resistenza del serbatoio alle azioni sismiche e quindi sopportare una percentuale di esse ma per limitare la deformazione ovvero in funzione della deformata del serbatoio e dello spostamento in sommità. Il calcolo della struttura consolidata va eseguito con un software FEM che modella la struttura del serbatoio e l'esoscheletro in acciaio. Nel calcolo va posta attenzione ai collegamenti tra esoscheletro e struttura di cls che vanno calcolati e dimensionati in funzione delle sollecitazioni di sforzo normale , taglio e flessione derivanti dagli spostamenti relativi tra le due strutture che hanno moduli elastici differenti e quindi dalle forze e momenti che vengono trasmessi. Questa tecnica di consolidamento oltre che per torri fari e serbatoi può essere utilizzata anche per pile da ponte.

6- Design strutturale

I serbatoi come le pile da ponte sono realizzati in calcestruzzo in vista essendo strutture di notevole altezza generano nei centri abitati impatto architettonico urbano mentre al di fuori creano danno e impatto ambientale. Si pone quindi la problematica di riqualificazione di queste strutture sia dal punto di vista ambientale che architettonico a livello di design che può avvenire modellando l'esoscheletro a forma di albero , di bicchiere per i serbatoi, di torri di castelli medioevali , utilizzando come materiale il vetro o il policarbonato per la trasparenza ed il riflesso, o ancora il legno con dei pannelli inseriti nei riquadri; L'impatto ambientale può essere minimizzato facendo ricorso al ***Biophilcs design*** *utilizzando della vegetazione da disporre sulla struttura metallica o ancora con riflesso di colore verde per il vetro, utilizzando il legno anche per la stessa struttura dell'esoscheletro o per le torri di castelli al laterizio . Si riportano alcune immagini significative dalle quali trarre spunti per questi interventi che possiamo definire come* ***"Interventi di riqualificazione strutturale architettonica urbana e ambientale di pile da ponte serbatoi e torri"*** *Lo stesso sistema strutturale può essere utilizzato per la costruzione di nuove strutture come i viadotti con il preciso obiettivo di ridurre l'impatto ambientale ed urbano favorendone l'inserimento nei centri abitati e nella natura.*













Per pile da ponte si può progettare un esoscheletro in acciaio ad albero che si estende dalla fondazione fino al pulvino, che migliora la resistenza della pila alle azioni sismiche orizzontali limitando il meccanismo alla base di formazione della cerniera plastica che provoca il ribaltamento delle pile in occasione di un evento sismico. Facendo ricorso al Biophilics design sull'esoscheletro può essere utilizzata della vegetazione che riduce notevolmente l'impatto ambientale di queste strutture in cemento armato; lo stesso esoscheletro durante la fase di costruzione e getto della pila da ponte può avere una sua utilità per la casseforme della pila.





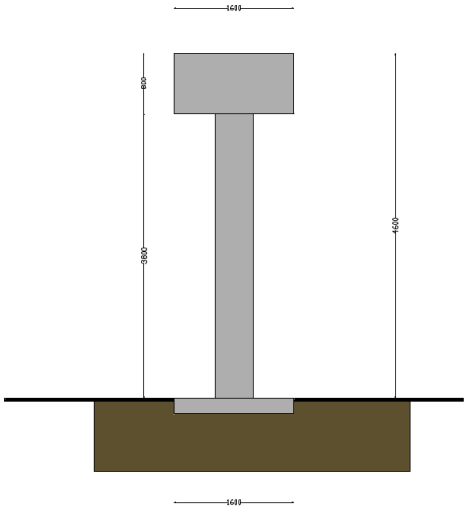
Il serbatoio d'acqua può essere migliorato e adeguato sismicamente anche evitando il ribaltamento alla base con un esoscheletro in acciaio la cui forma segue i contorni di un iperboloide iperbolico per gli ingegneri affezionati alla scienza delle costruzioni, nei cui riquadri viene inserito del vetro o policarbonato; ancora si può realizzare un esoscheletro che nel suo design e forma definisce i contorni di un bicchiere richiamando la funzione principe del serbatoio ovvero di contenitore di acqua. Altre indicazioni di progettazione architettonica sono le strutture a fungo per serbatoio e pile di bassa altezza , ancora si può far riferimento ad esoscheletri che richiamano le antiche torri in muratura italiane . Questa progettazione architettonica ha molteplici funzioni :

-miglioramento della resistenza alla azioni sismiche orizzontali
-limitazione degli spostamenti derivanti dalla deformabilità strutturale.
-prevenzione del meccanismo di formazione della cerniera plastica alla base
-stabilità dell'equilibrio ovvero evitare il ribaltamento per rotazione della fondazione
-mitigazione dell'impatto ambientale
-mitigazione dell'impatto urbano architettonico
-in fase di costruzione può essere utilizzata come sostegno per i casseri.

Le pile dei viadotti come i serbatoi sono strutture in cemento armato in vista che generano notevole impatto ambientale , durante la progettazione vengono eseguiti studi di valutazione dell'impatto sull'ambiente naturale per la preventiva autorizzazione da parte delle strutture preposte.

7- La Modellazione FEM

Il calcolo del nostro serbatoio lo eseguiamo attraverso il software free ***iperspace bim personal edition*** *con due modellazioni per fondazione quadrata di lato pari al diametro della fondazione*

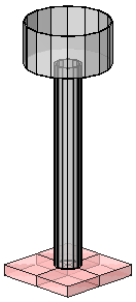


- I) schema*:Winkler*
mensola con sezione a corona circolare costante per 38 m D = 5 m s = 40 cm per i restanti 8 m D = 16 m e s = 25 cm.
La fondazione quadrata di lato B = 16 m altezza 200 cm modellata a platea su suolo alla Winkler

-II) schema: Macroelementi Plate-shell
Modellazione del terreno individuando un volume significativo a forma di parallelepipedo avente base superiore quadrata di lato 48 m e profondità 20 m , utilizzando elementi plate-shell di terreno aventi spessore 2 m e lati 800 x 800 cm. I parametri meccanici da assegnare sono quelli del terreno per quanto concerne il modulo elastico normale e tangenziale il coefficiente di Poisson e il peso specifico; la modellazione è di tipo elastico lineare prestando attenzione ai pannelli che presentano sollecitazione di trazione. La struttura del serbatoio viene sempre modellata come una mensola on platea di fondazione

Caratteristiche terreno
Terreno argilloso sabbioso: Limo
φ= 20°÷30° c' =0,05÷0,20 daN/cmq γ = 1800÷2200 daN/mc
Costante di sottofondo k=8÷10 kg/cmc
Modulo elastico E =18200 daN/cmq K = E/s = 9,1 kg/cmc
Coefficiente di Poisson μ = 0,5
Modulo elasticità tangenziale G = 700 daN/cmq
γ = 1900 daN/mc
Volume di acqua 1608 mc ; peso acqua P = V 1000 = 1608000*

-I modellazione : *Winkler*



Riportiamo i risultati della analisi di stabilità Buckling per la combinazione di carico permanenti e azioni sismiche . L'analisi di buckling determina il moltiplicatore dei carichi verticali per i quali si ha instabilità, effetti del II ordine dove in aste sollecitate a sforzo normale di genere flessione, deformazione che provoca instabilità; Le NTC stabiliscono che il moltiplicatore dei carichi verticali α > 10 , tiene conto della rotazione alla base e e per la combinazione di carico sismica degli spostamenti orizzontali.

(Buckling)

N°	fattore
1	24.934
2	24.934
3	294.528
4	294.528
5	1390.436
6	1390.436
7	47186.578
8	47186.580
9	INF
10	INF

(Buckling)

N°	fattore
1	32.415
2	32.415
3	382.887
4	382.887
5	1807.567
6	1807.567
7	61342.552
8	61342.554
9	INF
10	INF

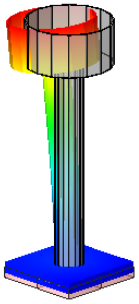
I periodi di vibrazione:

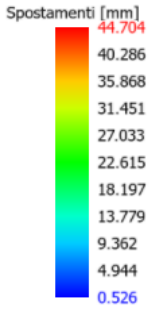
Posizione masse 1

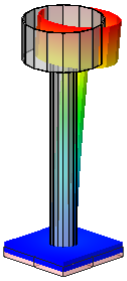
Numero di Frequenze calcolate =50, filtrate=16

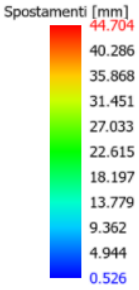
N	T	Coeff. Partecipazione		Masse Modali		Percentuali	
	s			kgm*g			
		Dir=0°	Dir=90°	Dir=0°	Dir=90°	Dir=0°	Dir=90°
1(1)	1.1106	227.251	28.431	506444	7927	33.72	0.53
2(2)	1.1106	28.431	-227.251	7927	506444	0.53	33.72
3(4)	0.0701	-6.503	24.270	415	5776	0.03	0.38
4(5)	0.0701	-24.270	-6.503	5776	415	0.38	0.03
5(15)	0.0085	-67.358	-94.909	44494	88335	2.96	5.88
6(16)	0.0085	94.909	-67.358	88335	44494	5.88	2.96
7(20)	0.0066	-100.933	212.755	99904	443895	6.65	29.56
8(21)	0.0066	-212.755	-100.933	443895	99904	29.56	6.65
9(23)	0.0063	58.927	-1.068	34052	11	2.27	0.00
10(24)	0.0063	-1.068	-58.927	11	34052	0.00	2.27
11(28)	0.0056	-14.052	54.820	1937	29471	0.13	1.96
12(29)	0.0056	-54.820	-14.052	29471	1937	1.96	0.13
13(41)	0.0043	-68.444	88.607	45940	76994	3.06	5.13
14(42)	0.0043	-88.607	-68.444	76994	45940	5.13	3.06
15(45)	0.0042	5.162	15.201	261	2266	0.02	0.15
16(46)	0.0042	-15.201	5.162	2266	261	0.15	0.02
Somma delle Masse Modali [kgm*g]				1388123	1388123		
Masse strutturali libere [kgm*g]				1501890	1501890		
Percentuale				92.43	92.43	92.43	92.43

Le deformate per azioni sismiche direzione X e Y

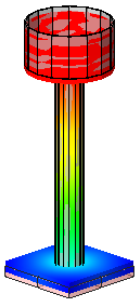


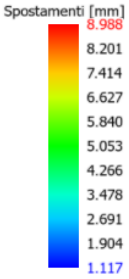






per carichi permanenti





La deformazione della struttura dipende dalla costante di sottofondo per la quale è stato considerato il valore di k = 10000000 kg/cmc= 10 kg/mc
Variando il valore della costante di sottofondo le deformazioni e i moltiplicatori critici variano sensibilmente. Nella progettazione dei reticoli di fondazione per edfici in cemento armato veniva utilizzato un criterio di fascia definendo due valori estremi della costante di sottofondo k = 3 kg/mc; k = 30 kg/mc, si hanno le seguenti deformate , dove al terreno più rigido corrispondono deformazioni spostamenti e moltiplicatori più bassi.

(Buckling)

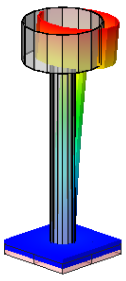
N°	fattore
1	22.710
2	22.710
3	279.455
4	279.455
5	1312.192
6	1312.192
7	47187.150
8	47187.152
9	INF
10	INF

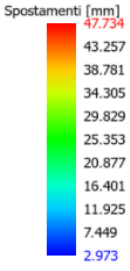
(Buckling)

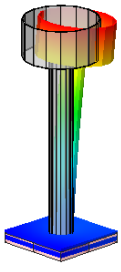
N°	fattore
1	25.687
2	25.687
3	301.169
4	301.169
5	1456.226
6	1456.226
7	47185.510
8	47185.512
9	INF
10	INF

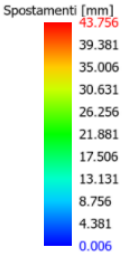
k = 3kg/mc

k = 30kg/mc

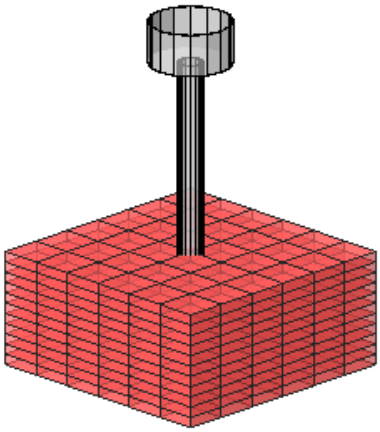








-II schema: *Elementi Plate-shell*



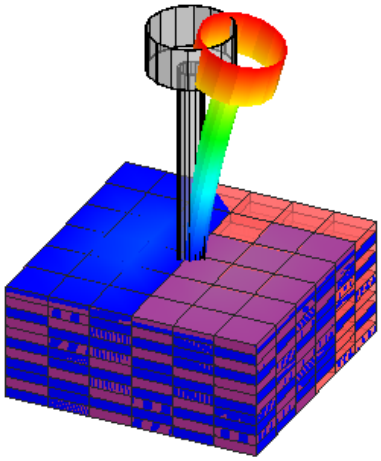
Si è scelto un volume significativo di terreno 48x48x20 m , modellato con macroelementi 8x8 aventi un modulo elastico di 18200 daN/cmq , in modo che la costante di sottofondo k = E/s = 18200/2000= 9,1 daN/cmc coincida con il valore utilizzato nella precedente modellazione. I moltiplicatori risultanti dalla analisi di buckling per soli carichi permanenti e per azioni sismiche

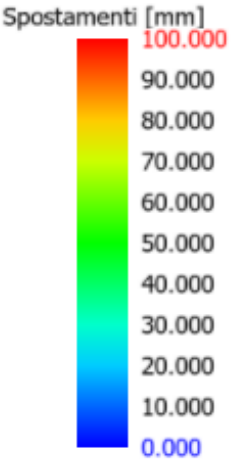
(Buckling)

N°	fattore
1	17.093
2	17.391
3	215.880
4	218.286
5	808.119
6	819.134
7	46694.043
8	46694.174
9	3849995.709
10	3849995.716

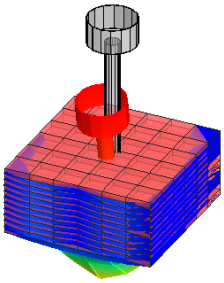
(Buckling)

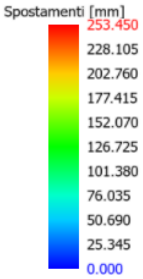
N°	fattore
1	24.833
2	25.268
3	311.822
4	315.298
5	1163.747
6	1179.554
7	61325.002
8	61325.211
9	5005025.231
10	5005025.240

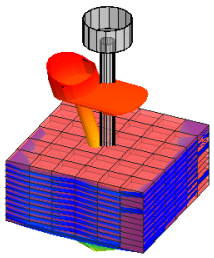


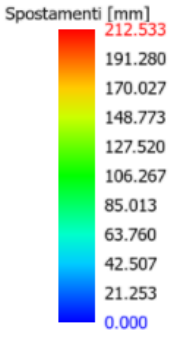


Le deformate relative ai carichi permanenti e alle azioni sismiche risultanti dal calcolo









Lo spostamento max è alla testa del serbatoio nen nodo a quota 46 m dal piano di fondazione e pari a 22 cm ; i primi 20 periodi di vibrazione

Posizione masse 1

Numero di Frequenze calcolate =400, filtrate=69

N	T	Coeff. Partecipazione		Masse Modali		Percentuali	
	s			kgm*g			
		Dir=0°	Dir=90°	Dir=0°	Dir=90°	Dir=0°	Dir=90°
1(1)	2.4765	-0.000	464.258	0	2113684	0.00	3.06
2(2)	2.4518	-464.158	-0.000	2112774	0	3.06	0.00
3(165)	0.1129	-0.000	-793.247	0	6170751	0.00	8.95
4(166)	0.1109	-0.000	-953.805	0	8921548	0.00	12.93
5(167)	0.1109	-0.000	-242.935	0	578762	0.00	0.84
6(168)	0.1109	0.000	231.996	0	527814	0.00	0.77
7(169)	0.1109	0.000	-129.795	0	165209	0.00	0.24
8(170)	0.1109	0.000	-730.530	0	5233553	0.00	7.59
9(171)	0.1109	-0.000	1234.550	0	14946442	0.00	21.67
10(172)	0.1109	-0.000	-185.080	0	335924	0.00	0.49
11(173)	0.1109	-0.000	1274.985	0	15941556	0.00	23.11
12(174)	0.1109	-0.000	-363.134	0	1293164	0.00	1.87
13(206)	0.0969	-826.992	-0.000	6706918	0	9.72	0.00
14(209)	0.0969	-468.749	-0.000	2154775	0	3.12	0.00
15(210)	0.0969	637.026	0.000	3979563	0	5.77	0.00
16(211)	0.0969	828.120	-0.000	6725225	0	9.75	0.00
17(212)	0.0969	-800.324	0.000	6281340	0	9.11	0.00
18(214)	0.0969	-231.991	-0.000	527793	0	0.77	0.00
19(215)	0.0968	-692.603	0.000	4704234	0	6.82	0.00
20(226)	0.0944	-87.864	0.000	75708	0	0.11	0.00

Somma delle Masse Modali [kgm*g]	62341174	64410648		
Masse strutturali libere [kgm*g]	68975620	68975620		
Percentuale	90.38	93.38	90.38	93.38

Per il terreno si può scegliere un volume significativo più grande con maggiore profondità per avere una corretta modellazione della interazione dinamica terreno struttura .I macrolementi lungo i bordi sono stati vincolati completamente con incastro nei nodi mentre i nodi interni al volume sono liberi; questa modellazione può essere utilizzata per il calcolo dei cedimenti verticali , dal calcolo si vede che lo spostamento verticale del nodo in sommità conseguente alla deformazione del pilastro e alla deformazione del terreno è circa 24 cm per carichi permanenti in presenza del volume di acqua il cui peso è P =1600000 daN. Per azioni sismiche la deformazione orizzontale è pari a 5 mm coincidente con la precedente modellazione.

8- La Torre di Pisa

La torre di Pisa è uno dei monumenti italiani più emblematici al pari del colosseo della città di Venezia o della torre Eiffel in Francia caratteristiche è la sua inclinazione sulla verticale esistente da molti anni forse dalla sua costruzione che risale al 1173 ed è patrimonio dell'Unesco dal 1987 .

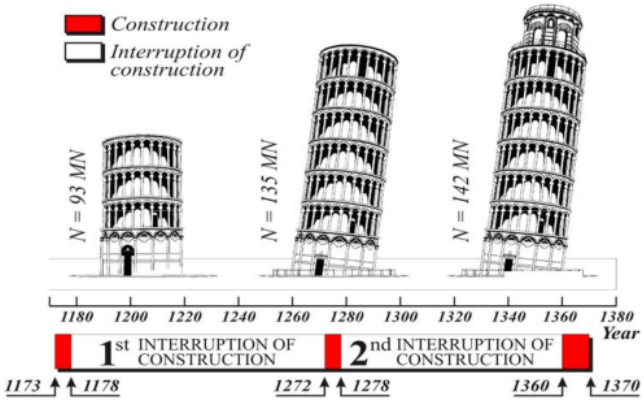


Il peso proprio della torre verticale eccentrico rispetto al baricentro dell'area di impronta della torre genera un momento flettente instabilizzante , ma la torre da anni è sempre in quella posizione ed il ribaltamento non è mai avvenuto. Il territorio di Pisa è caratterizzato dai seguenti parametri di pericolosità sismica definiti dalle NTC 2018

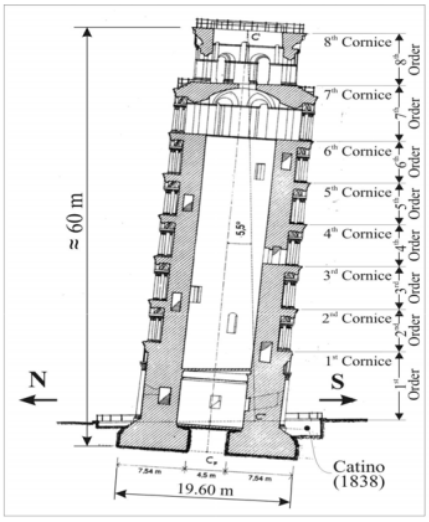
Parametri di pericolosità sismica

	ag (g/10)	F0 (adim)	TC*(sec)
SLO	0.38228526	2.57440892	0.22191984
SLD	0.47413368	2.55103348	0.25000000
SLV	1.18380979	2.39460235	0.28000000
SLC	1.52757010	2.38076005	0.28000000

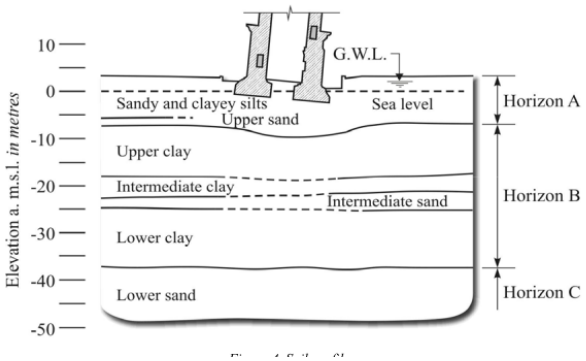
è evidente che un evento tellurico può danneggiare in modo irreparabile il monumento provocandone il ribaltamento. Nel corso degli ultimi 50 anni sono stati eseguiti molti studi ed anche lavori che hanno avuto come obiettivo il ripristino della verticalità del torre al fine di eliminare la eccentricità del carico verticale ed annullare il momento ribaltante.



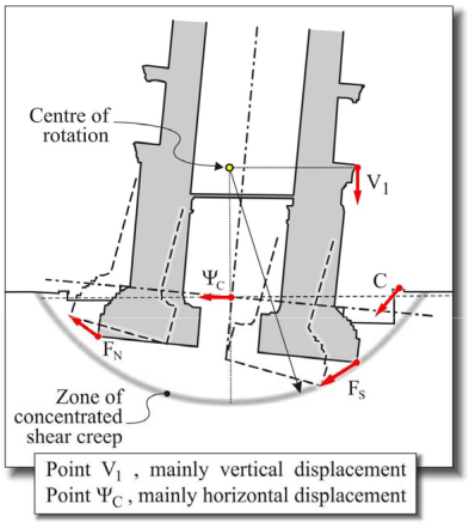
La costruzione è avvenuta in più fasi come dalla figura si vede che la torre è inclinata da circa 653 anni è non ha mai dato segnali di instabilità di lesione è aperta al pubblico oggetto di visite da parte dei turisti.



Weight	142 MN
Height of the centre of gravity	22.6 m
Overturning moment	327MNm
Average foundation pressure:	≈ 500 kPa



*La altezza della torre è H=142 m, , la posizione del baricentro punto di applicazione del peso proprio Y_G = 22,6 m , il momento ribaltante M_R = 32700000 daN*m , mentre la tensione di compressione sul terreno è circa σ= 5daN/cmq; in figura è riportata anche la stratigrafia del terreno al di sotto della torre.*
Nel corso degli anni la inclinazione della torre è aumentata , le prime misure sono state eseguite nel 1911 e si è visto che si è avuta una velocità di spostamento pari a 1,5mm/anno attribuendo tale spostamento allo strato di soffice argilla marina.
La instabilità determina una rotazione della torre con conseguente spostamento , per cui si è rivelata importante al fine di annullare questi spostamenti la realizzazione di un contrappeso per la stabilizzazione temporanea della torre



Kinematically admissible mechanism of ground movement, curvilinear concentrated shear creep zone passing through more plastic layer of horizon A

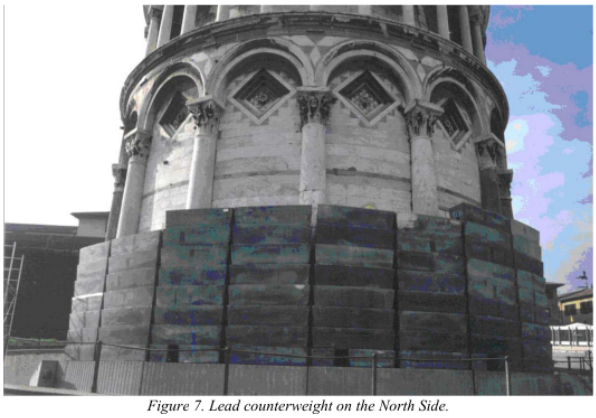


Figure 7. Lead counterweight on the North Side.

Successivamente è stata cercata una soluzione che riducesse la inclinazione della torre almeno di un grado attraverso un sottoscavo ovvero la estrazione controllata del terreno sotto la torre in modo che potesse ruotare in direzione opposta , attraverso una tecnologia di perforazione con trivelle . lavori che vennero eseguiti nel 1998 utilizzando 12 fori rivestiti del diametro di 219 mm . per cui la torre ruotò verso nord di circa 0,25° nel 2001 furono eliminati i lingotti di piombo con funzione di contrappeso.

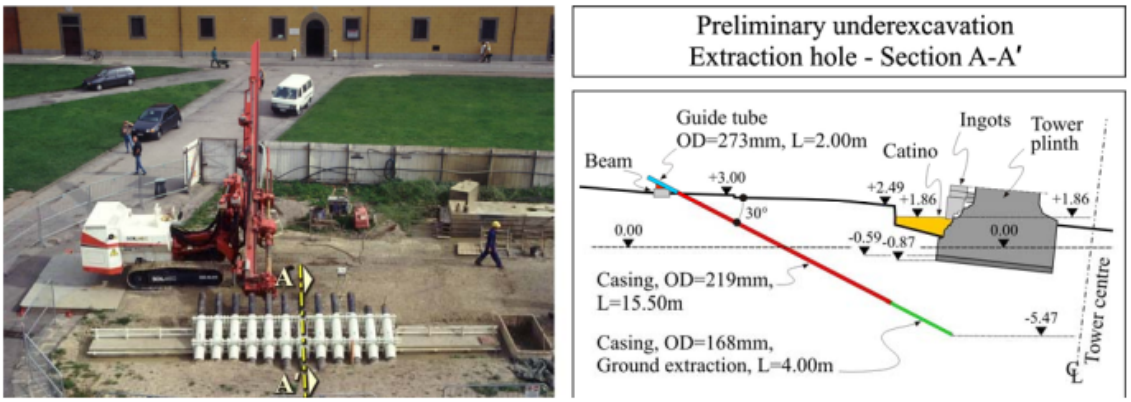


Figure 9. Holes for preliminary underexcavation.

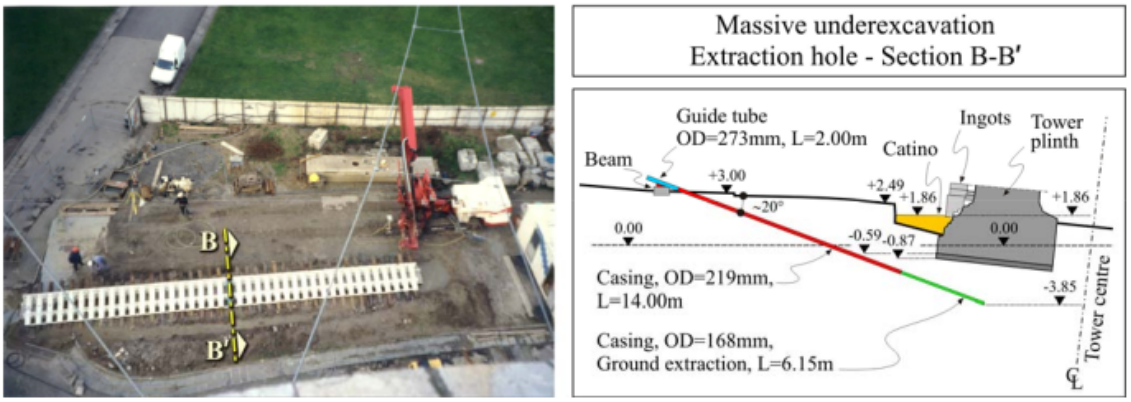


Figure 10. Holes for massive underexcavation.

Le trivelle utilizzate

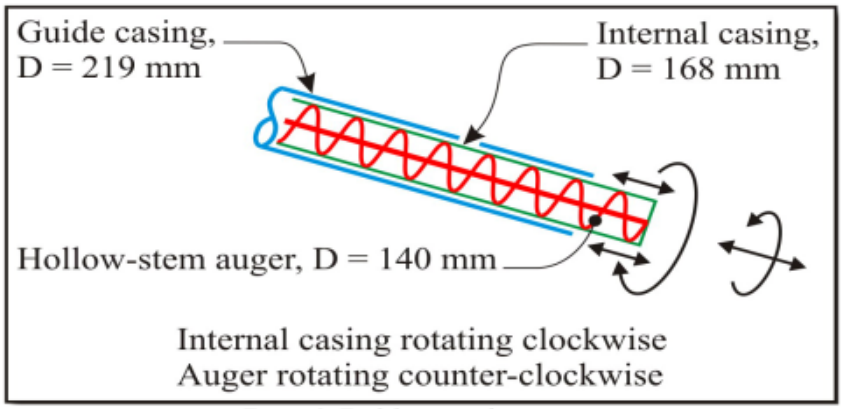


Figure 8. Tool for ground extraction.

Ulteriori lavori di stabilizzazione della fondazione della torre oltre che la riduzione di mezzo grado della sua inclinazione è stato un ampliamento della fondazione tramite un anello in calcestruzzo ad alta resistenza collegato alla struttura in muratura

della torre tramite rinforzi in acciaio inox

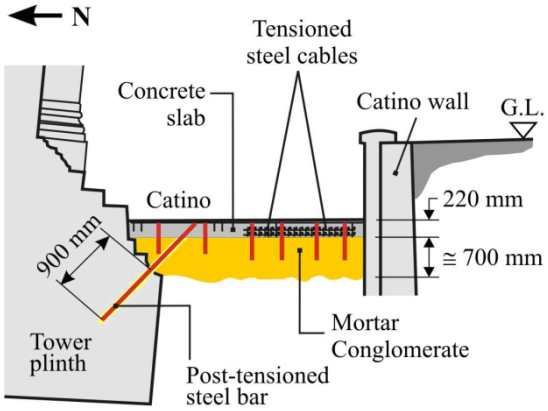


Figure 12. Structural connection of concrete ring to the Tower foundation.

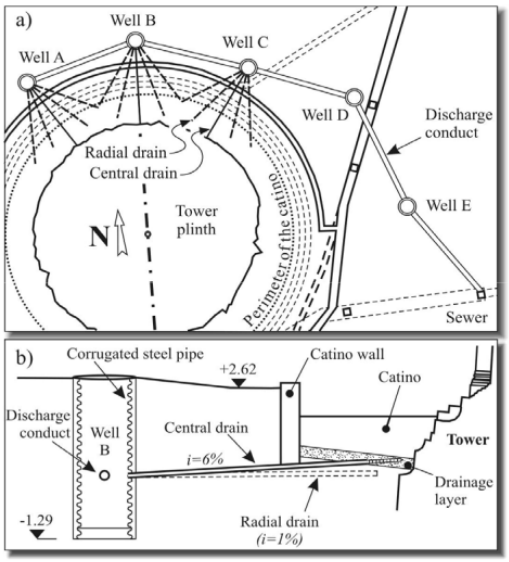


Figure 13. Control of GWL on North Side a) Plan view, b) Cross-section.

I lavori descritti sono stati eseguiti sulla torre di Pisa dal 1998 al 2003 attraverso i quali si è risolta la problematica dovuta al progressivo aumento della inclinazione e sono stati prospetti due possibili scenari :

-Scenario ottimista

Fermata la inclinazione dovuta alla instabilità termina la rotazione continua , si hanno solo alcuni lievi movimenti dovute alle escursioni termiche stagionali alla falda acquifera;

-Scenario pessimista

La torre resta ferma per un periodo stimabile in alcuni decenni poi riprenderà a ruotare con un aumento graduale della velocità di rotazione.

Negli ultimi venti anni la Toscana è stata colpita da eventi sismici anche se di bassa magnitudo non vi sono mai stati gravi danni , un terremoto nella città di Pisa anche se di lieve entità potrebbe danneggiare irrimediabilmente il monumento simbolo della stessa Italia. La Toscana come tutto il territorio italiano è in continua oscillazione anche se i movimenti del terreno sono di lieve entità , l'ultimo evento sismico è quello che ha colpito il comune di Marradi con magnitudo 4,9 in data 18 settembre 2023 distante dal territorio Pisano; un altro sisma è stato quello di Poggibonsi in data 28 giugno 2023 di magnitudo 3.7, si pone comunque la necessità di rendere antisismico il monumento oltre che fermarne la progressiva rotazione. L'intervento di consolidamento della torre deve essere non invasivo ovvero non deve alterare la struttura in muratura della torre compatibile con la bellezza artistica del monumento stesso e deve avere come obiettivo la valorizzazione del bene culturale. Una struttura costruita intorno alla torre realizzata secondo un fine design che ne segua il profilo, utilizzando materiali trasparenti e leggeri quali vetro ,policarbonato , acciaio, legno o materiali pultrusi in composito può soltanto valorizzare il monumento che resta

uno dei simboli della Italia. I vantaggi conseguenti alla costruzione di un involucro trasparente in vetro e acciaio si pensi alla chiesa di Notre Dame in Francia distrutta da un incendio per la quale si ipotizza una ricostruzione utilizzando il vetro, sono molteplici :

1- Eliminazione della instabilità e del ribaltamento dovuto al terreno;
2-Assorbimento di una parte delle azioni sismiche;
3-Incremento di rigidezza con limitazione delle deformazioni e spostamenti ;
4-Valorizzazione in chiave moderna del bene monumentale ;
5-Conservazione del bene culturale patrimonio dell'Unesco per un tempo illimitato.

La trasparenza del vetro con un gioco di colori e riflessi, la illuminazione nelle ore notturne valorizza notevolmente il monumento visibile sempre dall'esterno e punto di riferimento e meta da parte di turisti di ogni luogo della terra. L'intervento prospettato è fattibile sia dal punto di vista economico che di realizzazione , ovviamente necessita di una accurata progettazione architettonica e strutturale che ne salvaguardi la sua integrità culturale.

9- Conclusioni

La stabilità dell'equilibrio di strutture aventi notevole altezza è stata oggetto della mia formazione culturale nel corso di Tecnica delle Fondazioni, ha sempre destato un notevole interesse anche adesso dopo circa 32 anni rappresentano problematiche geotecniche che non sono mai state messe nel dimenticatoio pur non avendo mai avuto occasione di costruire e calcolare torri e serbatoi sopraelevati di notevole altezza . Se poi accanto alla instabilità derivante dalla rigidezza del terreno si considerano le azioni sismiche la sicurezza nei confronti del ribaltamento diventa fondamentale nella progettazione strutturale accanto al design e ai materiali utilizzati poiché sono strutture che generano un notevole impatto ambientale e urbano. La soluzione progettuale con esoscheletro in acciaio con materiali trasparenti il ricorso al ***Biophilcs-design*** *riducono notevolmente l'impatto architettonico e ambientale attribuendo a queste strutture la caratteristica e peculiarità della attrazione ovvero capovolgendo la percezione il sentimento comune per cui la struttura contribuisce al miglioramento dell'ambiente naturale e della qualità urbana.*

Bibliografia
-Tecnica delle fondazioni Prof. Carlo Viggiani
-Leaning Tower of Pisa: Behaviour after Stabilization Operations John B. Burland,Michele B. Jamiolkowski, Carlo Viggiani,
-Dynamic behavior of elevated tanks with soil–structure interaction Sekhar Chandra Dutta Somnath Dutta Rana Royb
-Interazione dinamica terreno struttura Annamaria di Lernia ,Angelo Amorosi, Daniela Boldini
-A Simple Seismic Analysis Procedure for Fluid-Elevated Tank-Foundation/Soil Systems R. Livaoğlu, A. Doğangün

Ancoranti post-installati

1- Introduzione

2- Tipologie di ancoranti e loro impiego.

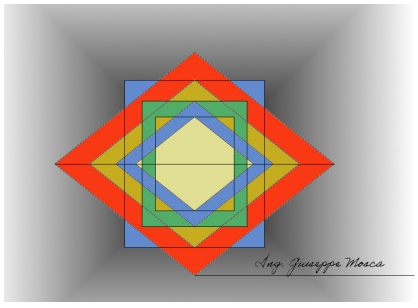
3- Formule di verifica

4- Calcolo degli ancoranti per un parapetto in vetro

5-. Calcolo degli ancoranti per una piastra di fondazione

6- Modalità di posa in opera

7- Conclusioni



Ing. Giuseppe Mosca

Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

Gli ancoranti in acciaio trovano largo impiego nel fissaggio di elementi non strutturali e strutturali ad elementi in calcestruzzo nuovi ed esistenti in zona sismica e non sismica; possono essere utilizzati per piastre di fondazione di strutture in legno o acciaio quali pergolati da istallare all'esterno o sulla copertura dei nostri edifici , per ancoraggio di travi o sbalzi pensiline in acciaio in legno e per il consolidamenti di elementi strutturali in calcestruzzo tramite acciaio . Per gli elementi non strutturali bisogna tener conto nei calcoli di verifica delle azioni sismiche determinate tramite le formule fornite dalle NTC , lo scopo di questi appunti è la dimostrazione teorica delle formula previste dalla normativa europea in funzione della tipologia di rottura , ovvero anche da parte dell'autore di non dare tali formulazione assodate senza una base teorica. Questi ancoranti per le piastre in acciaio fissate su strutture in calcestruzzo rappresentano la valida alternativa ai tirafondi quindi se adeguatamente verificati e calcolati assieme alla piastra di base possono essere utilizzati per strutture in legno ed acciaio costruite su piani o fondazioni di cemento armato già esistenti o realizzate.

2- Tipologie di ancoranti e loro impiego.

Gli ancoranti vengono impiegati per i seguenti elementi non strutturali

Tipologia di elemento non strutturale	***qa***	***Aa***
Parapetti a sbalzo o decorazioni	*1,0*	*3,0*
Insegne e cartelloni pubblicitari	*1,0*	*3,0*
Camini, pali e serbatoi su sostegni che si comportano come mensole libere per più della metà della loro altezza totale	*1,0*	*3,0*
Materiali di stoccaggio pericolosi, tubazioni di fluidi pericolosi	*1,0*	*3,0*
Muri esterni e interni	*2,0*	*1,5*
Tramezzi e facciate	*2,0*	*1,5*
Camini, pali e serbatoi su sostegni che si comportano come mensole libere per meno della metà della loro altezza totale o vincolate alla struttura in corrispondenza o sopra il baricentro	*2,0*	*1,5*
Ascensori	*2,0*	*1,5*
Computer access floors, apparecchiature elettriche e di comunicazione	*2,0*	*3,0*
Nastri trasportatori	*2,0*	*3,0*
Elementi di ancoraggio per mobili e librerie sostenuti da pavimenti	*2,0*	*1,5*
Elementi di ancoraggio per controsoffitti e dispositivi di illuminazione	*2,0*	*1,5*
Tubazioni ad alta pressione, tubazioni antincendio	*2,0*	*3,0*
Tubazioni di fluidi per materiali non pericolosi	*2,0*	*3,0*
Computer, comunicazione e scaffalature di stoccaggio	*2,0*	*3,0*

Dove l'azione sismica orizzontale è definita mediante la formula

$F_A = S_A * W_A * \gamma_A * / q_A$

W_A *peso sismico elemento non strutturale*
γ_A *coefficiente di importanza*
q_A *coefficiente di struttura*

$$S_a \quad \begin{cases} \alpha*S*(1+Z/H)*ap/[(1+(ap-1)*(1-Ta/(a*T_1))_2] \geq \alpha*S & \text{per } Ta<a*T_1 \\ \alpha*S*(1+Z/H)*ap & \text{per } a*T_1<Ta< b*T_1 \\ \alpha*S*(1+Z/H)*ap/[(1+(ap-1)*(1-Ta/(a*T_1))_2] \geq \alpha*S & \text{per } Ta>b*T_1 \end{cases}$$

Ta periodo fondamentale elemento non strutturale
T_1 *periodo fondamentale struttura*

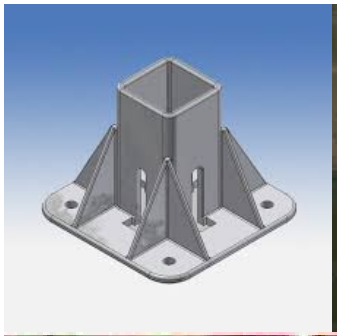
α rapporto tra accelerazione A ed accelerazione di gravità
H altezza della costruzione della fondazione
Z altezza del baricentro dell'elemento non strutturale

ap , a e b sono definiti dalla seguente tabella

Tabella C7.2.II- *Parametri a, b, a_p in accordo con il periodo di vibrazione della costruzione T_1.*

	a	b	a_p
T_1< 0,5 s	0.8	1,4	5,0
0,5 s < T_1 < 1,0 s	0.3	1,2	4,0
T_1 > 1,0 s	0.3	1,0	2,5

Vengono impiegati per elementi strutturali ad esempio





In tal caso vanno determinate le sollecitazione trasmesse dall'elemento collegato al calcestruzzo in funzione delle quali vanno calcolati gli ancoranti.
Esistono differenti tipologie di ancoranti

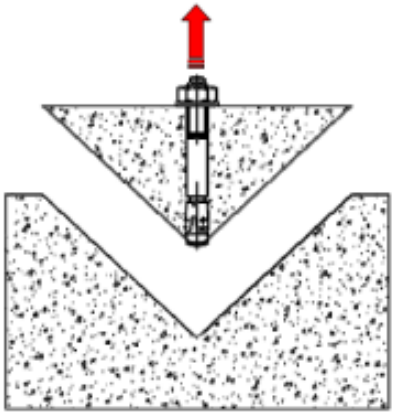


3- Formule di verifica

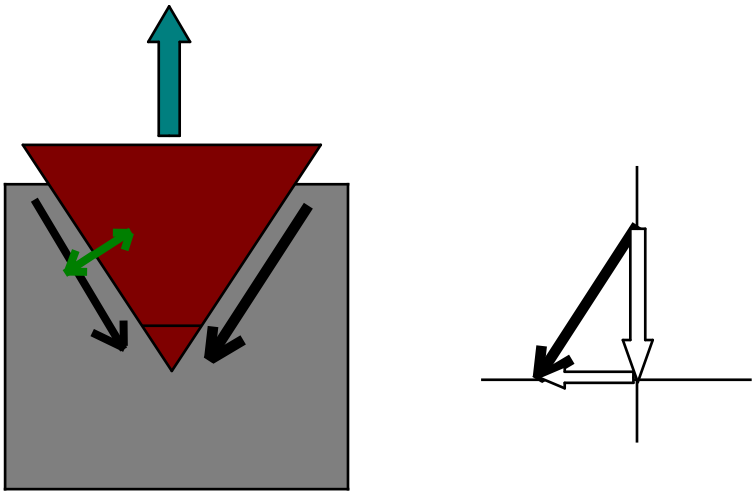
*Il sistema ancorante-materiale di base può avere diversi meccanismi di rottura che dipendono dal tipo di sollecitazione agente (trazione o taglio) tale crisi si può verificare lato acciaio o lato calcestruzz*o.

Rottura per trazione :

1- Rottura conica del calcestruzzo:



La rottura è opposta a quella per punzonamento da compressione , ovvero viene superata la resistenza a trazione del calcestruzzo con lesioni inclinate a 45° ;



le tensioni tangenziali hanno una componente verticale $\tau*\sin\alpha$ che contrasta l'espulsione del cono di cls ed una componente orizzontale $\tau*\cos\alpha$ che favorisce la rottura , dove α è la inclinazione della lesione , che bilancia la forza di trazione nell'ancorante .

$F_A \leq \tau*\sin\alpha * p *h = \pi*\tau*\sin\alpha *h^2 = \pi*(0,7*0,30*fck^{2/3})*\sin\alpha *h^2$

h altezza ancorante
p perimetro medio $\pi*h$
la tensione tangenziale τ è pari in regime di taglio puro alla resistenza a trazione del calcestruzzo

$fctd = fctk/\gamma_C$; la resistenza caratteristica a trazione del cls

$fctk= 1,3*0,30*fck^{2/3}$

la formula di verifica proposta dall'eurocodice 2 è la seguente :

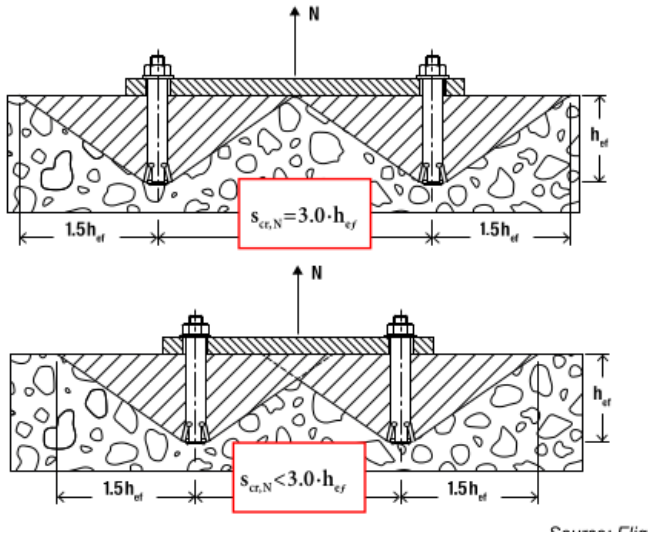
$N_{RKC} = N'_{RKC} * A_{CN}/A'_{CN} * \psi_{SN} * \psi_{ecN} * \psi_{reN} * \psi_{MN}$

$N'_{RKC} = k_1 * hef^{3/2} * \sqrt{fck}$; $k_1 = 7,7$ *cls fessurato ;* $k_1 = 11$ *cls non fessurato ;*

si utilizzano dei coefficienti di interazione per tener conto del meccanismo di rottura di una piastra con più ancoranti
$S_{CN} = 3*h_{eff}$; $C_{CriN} = 1,5*h_{eff}$;

$A'_{CN} = 9*(h_{eff})^2$; $\psi_{SN}=0,7+0,3*C/C_{CriN} \leq 1$; $\psi_{ecN}= 1/(1-2*e_N/S_{CriN}) \leq 1$

$\psi_{reN} = 0,5+h_{eff}/200 \leq 1$ $\psi_{MN} = 1$ *dipende dalle distanze dai bordi*



Volendo eseguire un confronto tra le due formule per ancorante singolo

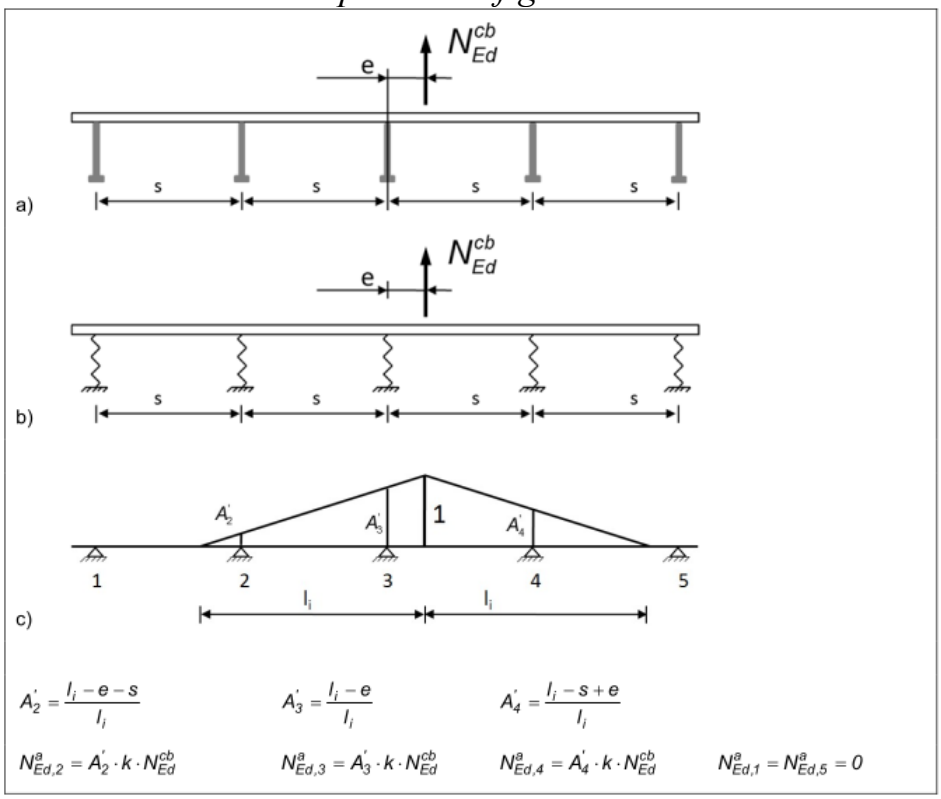
$F_A = \pi*(1,3*0,30*fck^{2/3})*\sin\alpha *(h_{eff})^2 = 25332\ N$

La formula seguente è empirica ovvero ha un fondamento sperimentale ma non teorico

$F_A = k_1*hef^{3/2} * \sqrt{fck} = 24596\ N$

per fck 40 N/mmq $h_{eff} = 50mm$; $k_1 = 11$;

Lo sforzo normale in ogni ancorante lo si calcola nella ipotesi di piastra rigida su molle elastiche come riportato in figura



Dalle equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione intorno al baricentro delle rigidezze che coincide con il baricentro geometrico essendo gli ancoranti uguali

$\Sigma N_i = N_{ED}$; $\Sigma N_i * (n*s) = e * N_{ED}$

lo spostamento di ogni punto della piastra si compone di una traslazione rigida v e di una rotazione φ ; x = v + φ(ns) , lo sforzo normale è dato dal prodotto della rigidezza per lo spostamento* $N_i = k*x$ *, sovrapponendo gli effetti ovvero associando alla prima equazione la traslazione v ed alla seconda la sola rotazione φ*

$v = N_{ED}/(nk)$ *nel nostro caso n = 5*

$\varphi = e*N_{ED}/[k*(4*s^2 + s^2+4*s^2 + s^2)]$

lo sforzo normale

$N_i = N_{ED}\,[1/5 + e*s/[*(10s^2)]] = N_{ED}\,/5*(1 \pm e/(2s)]$

per una piastra con due ancoranti ad interasse S_{CriN}

$N_i = N_{ED}\,/2*(1 - 2*e/s)$

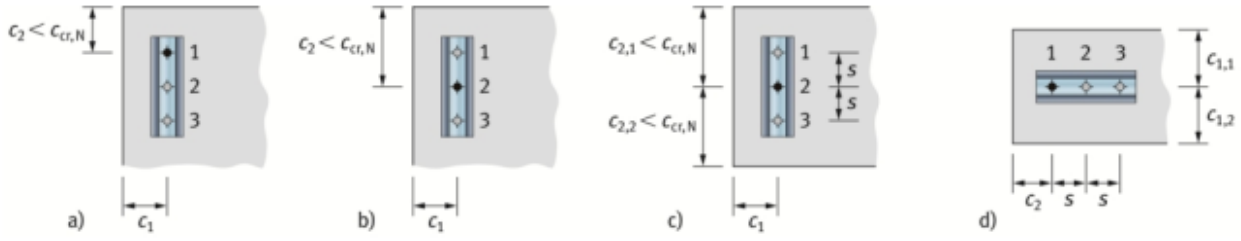
il coefficiente $\psi_{ecN} = 1/(1-2*e_N/S_{CriN})$

Il coefficiente di interazione tiene conto degli effetti conseguenti alla densità del rinforzo ovvero all'interasse tra gli ancoranti quando $h_{eff} < 10$ *cm*

$\psi_{reN} = 0{,}5+h_{eff}/200 \leq 1$

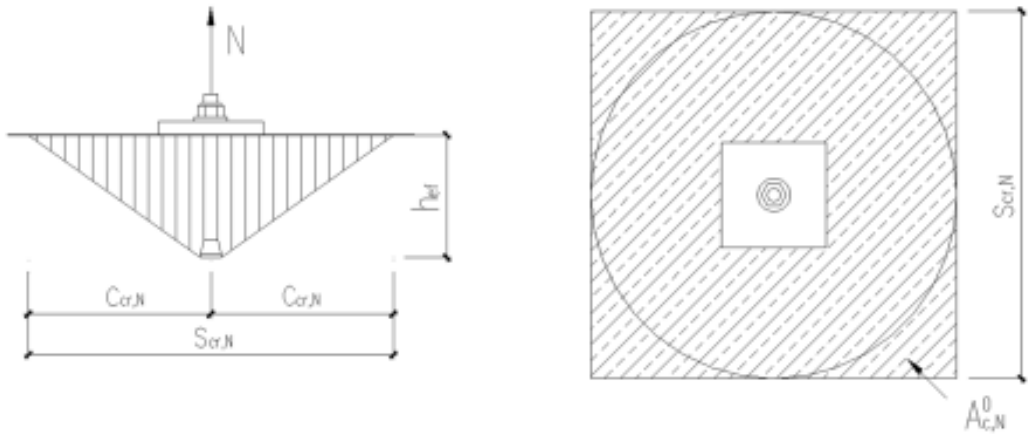
il fattore ψ_{reN} *può essere assunto pari ad 1 quando*
-tra i rinforzi è presente uno spazio maggiore di 15 cm
-rinforzo con spazio ≥ 10 cm diametro ancorante 1 cm

Per le distanze dai bordi

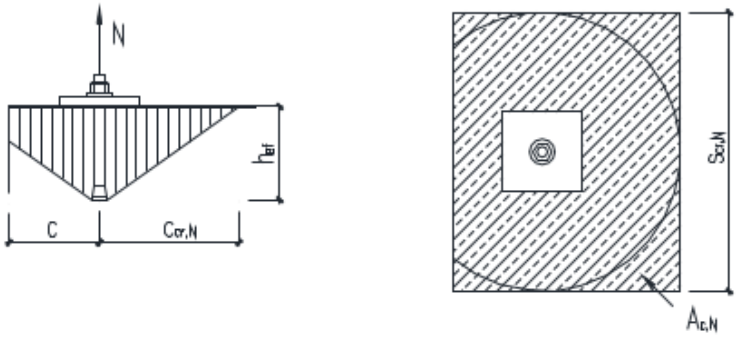


$\psi_{MN} = 1$ *quando* $c < 1{,}5*h_{eff}$;

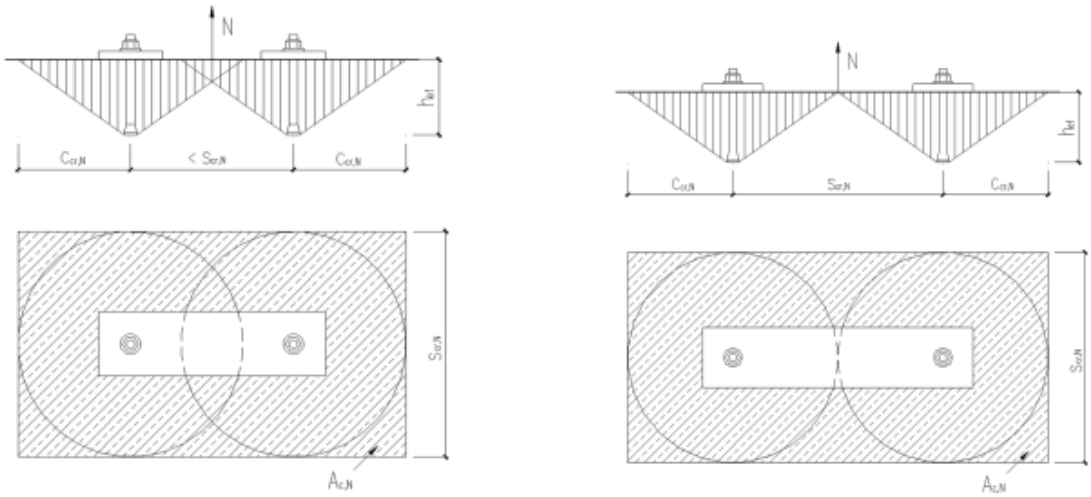
Per quando concerne le aree A_{CN} ed $A'_{CN,}$
la prima è l'area del cerchio di diametro s depurata dell'area dell'ancorante mentre la seconda l'area del quadrato di lato s , come riportato in figura



L'effetto della distanza tra gli ancoranti ,



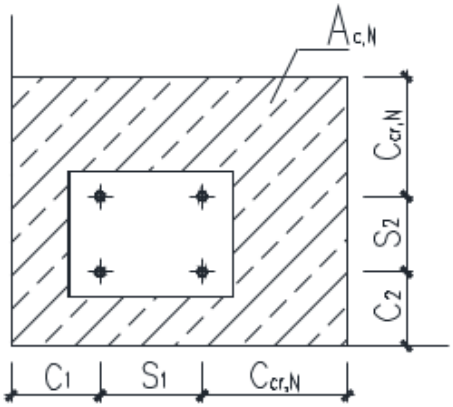
L'area $A_{CN} = S_{CriN} *(C+ C_{CriN})$ con $C_{CriN} =0,5*S_{CriN}$



L'area $A_{CN} = S_{CriN} *(s+ S_{CriN})$ mentre se i coni di rottura sono interferenti è sempre

$A_{CN} =S_{CriN} *(s+ S_{CriN})$

per una piastra rettangolare con 4 ancoranti



con $c_1, c_2 < C_{CriN}$ *e* $s_1, s_2 < S_{CriN}$

$A_{CN} = (c_1 + s_1 + C_{CriN}) * (c_2 + s_2 + C_{CriN})$

Inoltre se la distanza dal bordo di un tirante d'ancoraggio è più piccola di C_{CriN} *si deve considerare un coefficiente di distanza dal bordo C che deve soddisfare la relazione*

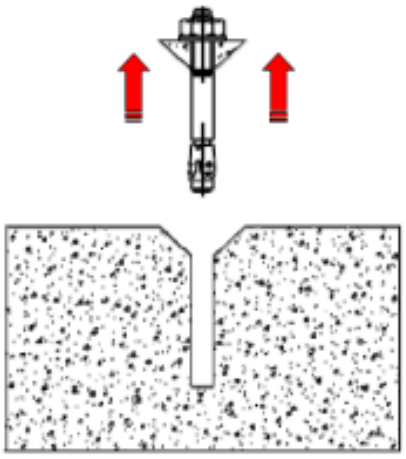
$\psi_{SN} = 0,7 + 0,3 * C/C_{CriN} \leq 1$

Le formule proposte da ETAG TR029 sono analoghe non vi è il coefficiente ψ_{MN}
e per ; $k_1 = 7,2$ *cls fessurato ;* $k_1 = 10,1$ *cls non fessurato*

$N_{RKC} = N'_{RKC} * A_{CN}/A'_{CN} * \psi_{SN} * \psi_{ecN} * \psi_{reN} * \psi_{MN}$

$N'_{RKC} = k_1 * hef^{3/2} * \sqrt{fck}$ *resistenza a compressione cubica mentre nell'eurocodice 2 si utilizza la resistenza a compressione cilindrica .*

2- Rottura per sfilamento lato cls :
dipende dalle tensioni tangenziali di aderenza sull'ancorante quindi dalla sua superficie laterale



$F_A \leq \tau^* \pi^* D^* h_{eff}$; D diametro dell'ancorante , h_{eff} altezza efficace ancorante

τ tensione tangenziale di aderenza acciaio calcestruzzo dalle NTC 2018

$f_{bd} = f_{bk} / \gamma_C$; $f_{bk} = 2{,}25^* \eta_1 ^* \eta_2 ^* f_{ckt}$ tensione tangenziale di aderenza

η_1=1 in condizioni di buona aderenza

η_1= 0,7 in condizioni di non buona aderenza

η_2 =1 per barre di diametro D <32mm

η_2 =(132-D)/100 per D > 32 mmm

anche in questo caso per rottura combinata di più ancoranti l'EC2

$N_{RKp} = N'_{RKp} ^* A_{PN}/A'_{PN} ^* \psi_{SN,p} ^* \psi_{GN,p} ^* \psi_{ecNp} ^* \psi_{reNp}$

$N'_{RKp} = \psi_{Sus} ^* \tau^* \pi^* D^* h_{eff}$

ψ_{Sus}=1 se $\alpha_{Sus} \leq \psi'_{Sus}$; ψ_{Sus}=1-α_{Sus} +ψ'_{Sus} se $\alpha_{Sus} > \psi'_{Sus}$

ψ'_{Sus} = 0,6 ; α_{Sus} = 1 rapporto tra l'azione a lungo termine e quella allo SLU

$S_{crNp} = 7{,}3^* D^* \sqrt{(\psi_{Su} = ^* \tau_{RK})} \leq 3^* h_{eff}$ $C_{CriN} = 1{,}5^* S_{crNp}$;

$A'_{PN} = (S_{crNp})^2$; A_{PN} area attuale

$\psi_{s,Np}$=0,7+0,3*C/C_{CriN} ≤1 ; ψ_{ecNp}= 1/(1-2*e_N/S_{CriN}) ≤1

$\psi_{reNp} = 0{,}5+h_{eff}/200 \leq 1$; $\psi_{G,Np} = \psi'_{G,Np} - \sqrt{(S/S_{crNp})} ^* (\psi'_{G,Np} - 1) \leq 1$;

$\psi'_{G,Np} = \sqrt{n} - (\sqrt{n}-1)^* [\tau_{RK}/\tau_{RKC}]^{3/2}$; $\tau_{RKC} = K_3 / (\pi^* d) ^* \sqrt{(h_{eff} ^* f_{Ck})}$

K_3 = 7,7 fessurato K_3 = 11 cls non fessurato

le formule ETAG differiscono per

$S_{crNp} = 20^* D^* \sqrt{(\tau_{RK}/7{,}5)} \leq 3^* h_{eff}$

$\psi'_{G,Np} = \sqrt{n} - (\sqrt{n}-1)^* [d^* \tau_{RK}/(k^* \sqrt{h_{eff}} ^* f_{CK})]^{3/2} \geq 1$

la resistenza a compressione del cls è quella cubica

k = 2,3 cls fessurato ; k = 3,2 non fessurato

n numero di ancoraggi nel gruppo

τ_{RK} *resistenza caratteristica di adesione*

3- Rottura per splitting lato cls

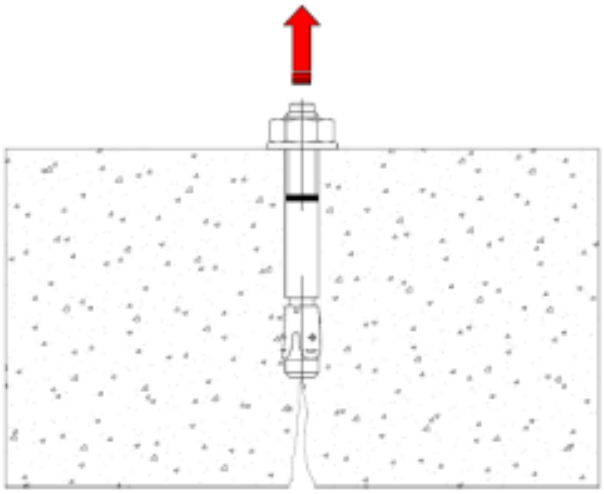


figura 7 – Rottura per splitting

Se lo spessore del cls che circonda l'ancorante non è sufficiente ad assorbire le pressioni radiali , le tensioni di trazione a parità di pressioni radiali aumentano e possono provocare immediatamente la crisi della giunzione poiché le fessure attraversano tutta la sezione resistente dando luogo alla separazione del calcestruzzo dalla barra di armatura . La forza max che è in grado di sopportare l'ancorante è sempre quella empirica

$$N'_{RKp} = k_1 * hef^{3/2} * \sqrt{fck}$$

$$N_{RKp} = N'_{RKp} * A_{PN}/A'_{PN} * \psi_{SN} * \psi_{hSp} * \psi_{ecN} * \psi_{reN}$$

rispetto alle formule precedenti l'unico coefficiente differente èψ_{hSp} che sia nell'eurocodice 2 che nelle TR029 /Annex C (norme francesi) assume il seguente valore

$\psi_{hSp} = (h/h_{min})^{0,66667}$ *con differenti limitazioni*

$\psi_{hSp} \leq max\ [1;\ ((h_{eff}+1,5c_1)/h_{min})^{0,66667}]$ *EC2*

$1 \leq \psi_{hSp} \leq (2h_{eff}/h_{min})^{0,66667}$ *TR029/ANNEXC*

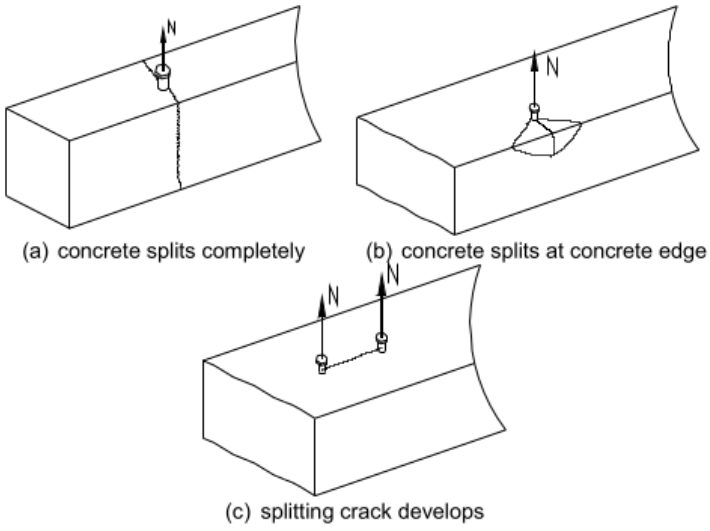
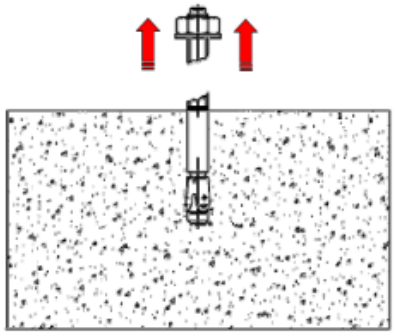


Figure 4.7 Splitting failure modes

3- Rottura dell'ancorante di acciaio

La rottura avviene per trazione nell'ancorante che si spezza è chiaramente funzione in una piastra di acciaio degli sforzi normali nei singoli ancoranti.



la forza di trazione che l'ancorante è in grado di sopportare

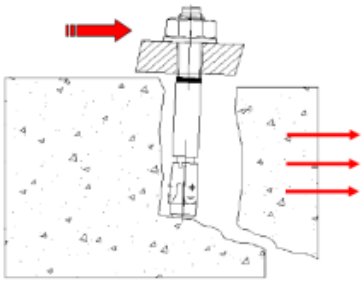
$F_A = K_6 * f_{UK} * \pi * D^2/4$ *, in una piastra di ancoraggio è opportuno determinare lo sforzo di trazione in ogni ancorante .*

$K_6 = 0{,}6$ *per* $f_{UK} * \leq 500$ *N/mmq*

$K_6 = 0{,}5$ *se* $500 \leq f_{UK} * \leq 1000$ *N/mmq*

Rottura per taglio :

1- Rottura del bordo di calcestruzzo



Si verifica quando il tassello è vicino al bordo di calcestruzzo
La formula utilizzata per il calcolo della max forza di taglio che il tassello è in grado di sopportare è una formula empirica (sperimentale), ma in analogia a quanto fatto per il cono di calcestruzzo si può determinare una formulazione teorica

$V_A = K_1 * d^{\alpha} * (h_{eff})^{\beta} * \sqrt{fck} * (c_1)^{3/2}$

$K_1 = 1,7$ *per cls fessurato*
$K_2 = 2,4$ *per cls non fessurato*

d diametro ancorante

$\alpha = 0,1 * (h_{eff}/c_1)^{0,5}$; $\beta = 0,1 * (d/c_1)^{0,2}$;

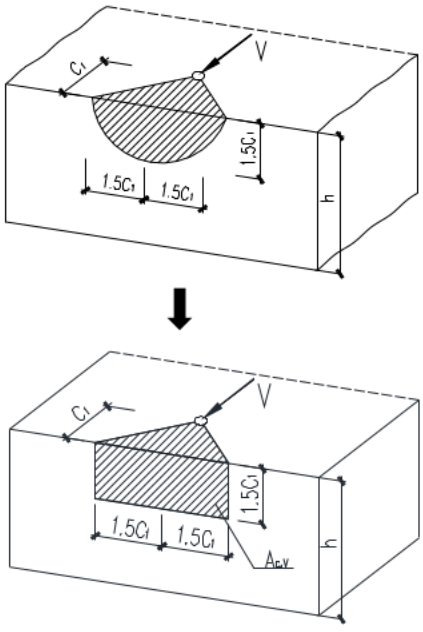


Figure 4.8 Concrete edge failure mode

Si può determinare la risultante delle tensioni tangenziali sul perimetro medio baricentrico del semicono ovvero semi-cilindro di diametro $1,5 * c_1$ *e sul perimetro medio baricentrico del semiprisma*

$V_A = \tau * \sin\alpha * 3/4 * \pi * c_1^2$ $\quad tg\alpha = c_1/(1{,}5*c_1) = 2/3 \quad \alpha = 33°{,}69$

$V_A = \tau * \sin\alpha * 3/2 * c_1^2$ $\quad \sin\alpha = 0{,}554$

la tensione tangenziale sempre in regime di taglio puro corrisponde alla resistenza caratteristica di rottura a trazione del cls

$fctk = 1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}$

$V_A = [1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}]*\sin\alpha * 3/4*\pi * c_1^2$; $V_A = [1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}]*\sin\alpha * 3/2 * c_1^2$
Volendo eseguire un confronto tra le due formule

$V_A = K_1 * d^{\alpha} * (h_{eff})^{\beta} * \sqrt{fck} * (c_1)^{3/2} = 6010\ N$

$V_A = [1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}]*0{,}554*3/2 * c_1^2 = 6064\ N$

$V_A = [1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}]*0{,}554*3/4*\pi * c_1^2 = 9525\ N$

$d = 5\ mm$; $h_{eff} = 50mm$; $fck = 40$; $c_1 = 40\ mm$; $K_1 = 2{,}4$

$\alpha = 0{,}1*(h_{eff}/c_1)^{0,5} = 0{,}1118$ $\quad \beta = 0{,}1*(d/c_1)^{0,2} = 0{,}06597$

se si considera un semicono di rottura con lesioni a 45° , la superficie laterale del semicilindro medio $\pi/2 * c_1^2$

$V_A = [1{,}3*0{,}30*fck^{2/3}]*0{,}554*\pi/2 * c_1^2 = 6350\ N$

in accordo con la formula sperimentale $V_A = K_1 * d^{\alpha} * (h_{eff})^{\beta} * \sqrt{fck} * (c_1)^{3/2} = 6010\ N$

L'eurocodice 2 per la verifica di una piastra propone la formula seguente :

$V_{RKc} = V'_{RKc} * A_{CV}/A'_{CV} * \psi_{SV} * \psi_{hV} * \psi_{ecV} * \psi_V$

dove $V'_{RKc} = K_1 * d^{\alpha} * (h_{eff})^{\beta} * \sqrt{fck} * (c_1)^{3/2}$

$K_1 = 1{,}7$ *per cls fessurato*
$K_2 = 2{,}4$ *per cls non fessurato*

d diametro nominale ancorante

$\alpha = 0{,}1*(L_{eff}/c_1)^{0,5}$; $\quad \beta = 0{,}1*(d_{nom}/c_1)^{0,2}$;

$L_{eff} = h_{eff}$ *quando il diametro è uniforme per* $d_{nom} \leq 24mm$ $L_{eff} \leq 12 d_{nom}$

per $d_{nom} > 24mm$ $\quad L_{eff} < max\ (8d_{nom};\ 300mm)$

La distanza c dal bordo deve soddisfare le seguenti limitazioni

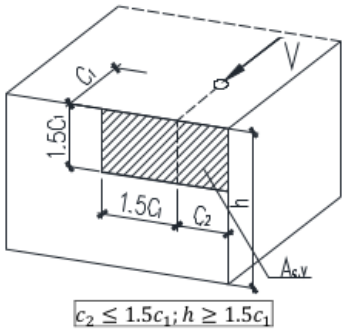
$c > 10*h_{eff}$; $c > 60* d_{nom}$;

L'area $A'_{CV} = 4,5*(c_1)^2$ *come dalla figura precedente*

$A'_{CV} = [(1,5*c_1+1,5*c_1)*1,5*c_1] = 4,5*(c_1)^2$

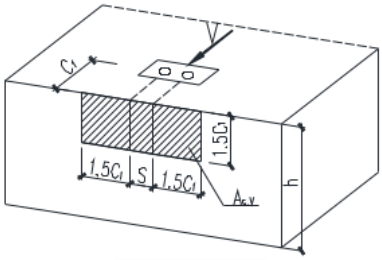
ψ_{SV} *coefficiente di distanza dal bordo*
ψ_{hV} *coefficiente di spessore*
ψ_{ecV} *coefficiente di eccentricità*
$\psi_{\alpha V}$ *coefficiente di inclinazione forza*
ψ_V *coefficiente di rinforzo*

Valutiamo l'effetto di due distanze dal bordo :



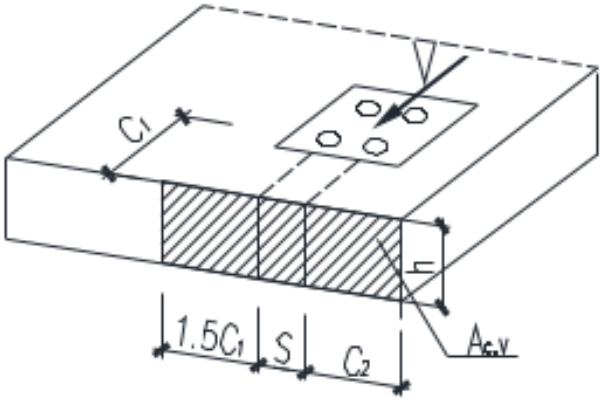
$c_2 \leq 1.5c_1; h \geq 1.5c_1$

(a) Concrete edge break-out area affected by edge distance



$s \leq 3c_1; h \geq 1.5c_1$

(b) Concrete edge break-out area affected by bolt spacing



$c_2 \leq 1.5c_1; s \leq 3c_1; h < 1.5c_1$

(c) Concrete edge break-out area affected by edge distance, bolt spacing and concrete thickness

$A'_{CV} = (1,5*c_1+*c_2)*1,5*c_1$
$A'_{CV} = [(1,5*c_1+1,5*c_1+s)*1,5*c_1$
$A'_{CV} = (1,5*c_1+c_2+s)*h$

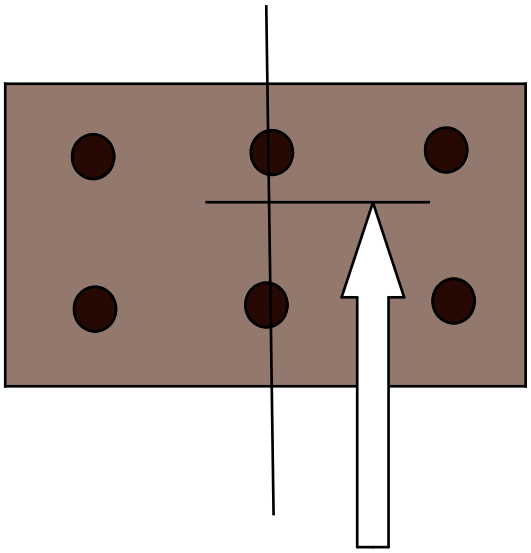
con riferimento alla terza figura se la distanza dal bordo $c_2 < 1{,}5*c_1$ *ovvero minore dell'altezza della lastra di calcestruzzo si considera il coefficiente*

$$\psi_{SV} = 0{,}7 + 0{,}3*c_2/1{,}5*c_1 \leq 1$$

Il coefficiente tiene conto che la resistenza e lo spessore non sono direttamente proporzionali ovvero che la diminuzione della resistenza non è conseguenza diretta della diminuzione dello spessore.
per $h \leq 1{,}5*c_1$;

$$\psi_{HV} = (1{,}5*c_1/h)^{0{,}5} \geq 1$$

L'effetto della eccentricità della forza di taglio



Vi è un momento $M = V*e$, *il centro di rotazione è il baricentro della piastra che ha due spostamenti rigidi una traslazione ed una rotazione rigida*

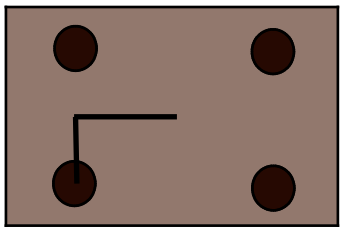
$$V_i = V/n \; ; \quad M = V*e = \sum k*\varphi*p^2 \; ; \quad \varphi = M/\sum k*p^2$$

lo sforzo di taglio in ciascun tassello

$$V_i = V/n \pm V*e \; *k*p/\sum k*p^2 = V/n*(1 + e/p)$$

le rigidezze a taglio k sono tutte uguali

p rappresenta la distanza misurata in diagonale dal baricentro della piastra ; se la piastra è ancorata con 4 tasselli ad interasse $3c_1$

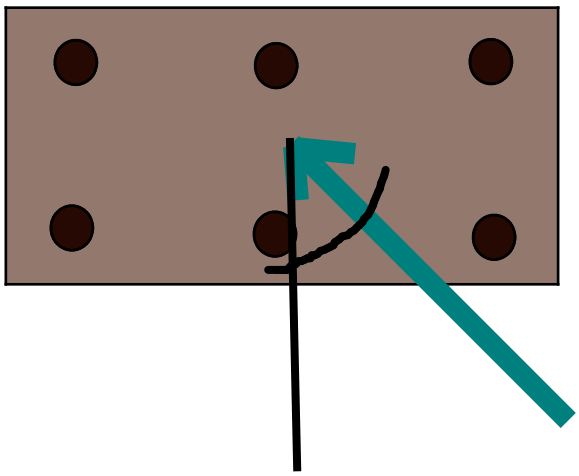


Il momento del singolo tassello $M_i=V_{ix}*(1,5*c_1)+V_{iy}*(1,5*c_1)$ *somma dei momenti relativi alle due componenti in direzione X ed Y*
$p= 3/2*c_1$

$\psi_{ecV} =1/[1+2*e/(3*c_1)] \leq 1$

Se la forza è inclinata il coefficiente di inclinazione forza EC2

$\psi_{\alpha V} = [1/((\cos\alpha_V)^2+0,5(\sin\alpha_V)^2]^{1/2} \geq 1$;



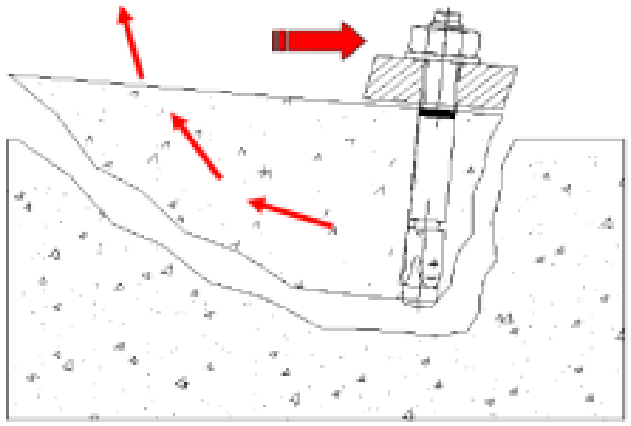
$\psi_{\alpha V} = [1/((\cos\alpha_V)^2+2/5*(\sin\alpha_V)^2]^{1/2} \geq 1$; *TR029/ANNEXE 29*

il coefficiente di rinforzo
ψ_V *=1 per cls fessurati e non fessurati senza armatura nel bordo*
ψ_V *=1,2 per cls fessurati ed armatura di rinforzo nel bordo* $\phi >= 12$ *mm*
ψ_V *=1,4 per cls fessurati ed armatura di rinforzo e staffe nel bordo ad interasse* $< = 100$ *mm*

secondo l'eurocodice 2 il coefficiente di rinforzo
ψ_V =1 per cls fessurati e non fessurati senza armatura nel bordo
ψ_V =1,4 per cls fessurati ed armatura di rinforzo e staffe nel bordo ad interasse a≤100 mm ed a ≤ c_1

2- Rottura per Pry-out

Si verifica quando l'ancorante ha una limitata profondità di posa ; in caso di ancoranti fissati su una piastra la rottura avviene come unico blocco di cls che si distacca



le formule proposte da EC2

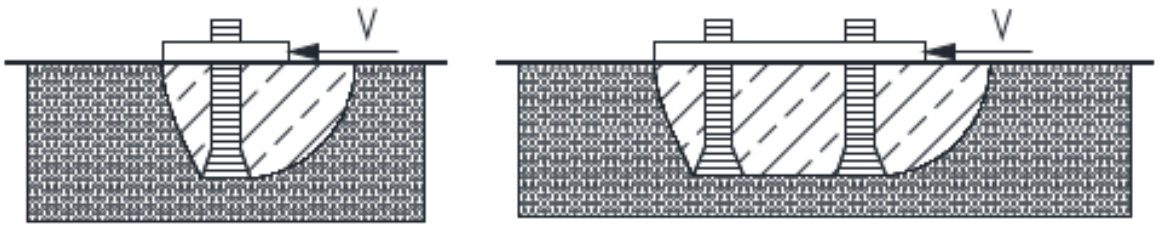
$V_{RKcp} = K_8 * min(N_{RKc} ; N_{RKp})$

Le formule francesi TR029/ANNNEXE 29 propongono il valore minimo tra

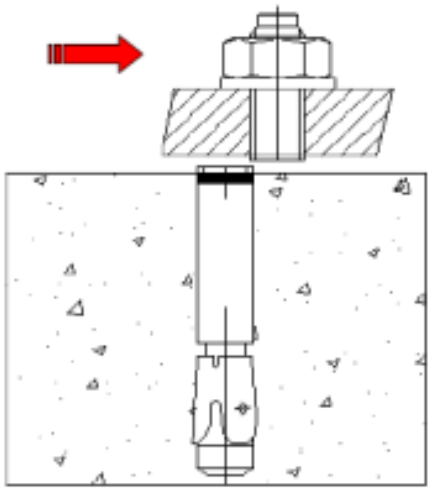
$V_{RKcp} = K*N_{RKc}$

$V_{RKcp} = K* N_{RKp}$

K = 1 per h_{eff} < 60 mm ; K = 2 per h_{eff} ≥ 60 mm ;



3- Rottura lato acciaio *: si verifica per ancoranti molto lontani dai bordi*



La rottura è per tranciamento dell'ancorante

$V = f_{UK}/\sqrt{3} * \pi * D^2/4$

D diametro del tassello

$f_{UK}/\sqrt{3}$ *tensione tangenziale di rottura che in un criterio di resistenza* $\sigma_{eq} = \sqrt{(3*\tau^2)}$

- Verifica dell'ancorante

La verifica combinata di un ancorante a trazione e taglio

$N_{ED}/ N_{RD} + V_{ED}/ V_{RD} \leq 1.$

Al solito la resistenza di calcolo $X_{Rd} = X_{Rk}/ \gamma$

i coefficienti parziali per lo stato limite ultimo

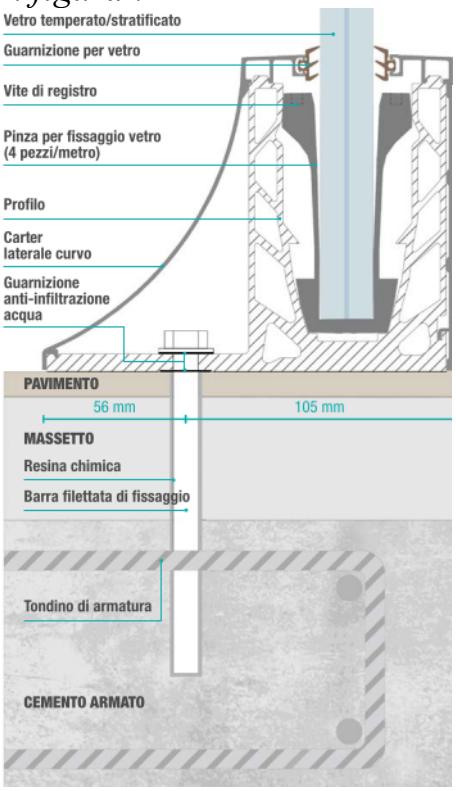
lato calcestruzzo
$\gamma_{MC} = \gamma_C * \gamma_2$

$\gamma_C = 1,5$;
$\gamma_2 = 1$ *per sistemi con alti valori di sicurezza nell'installazione*
$\gamma_2 = 1,2$ *per sistemi con normali valori di sicurezza nell'installazione*
$\gamma_2 = 1,4$ *per sistemi con bassi valori di sicurezza nell'installazione*

lato acciaio
$\gamma_{MS} = 1,4$; *trazione* $\gamma_{MS} = 1,25$; *taglio*

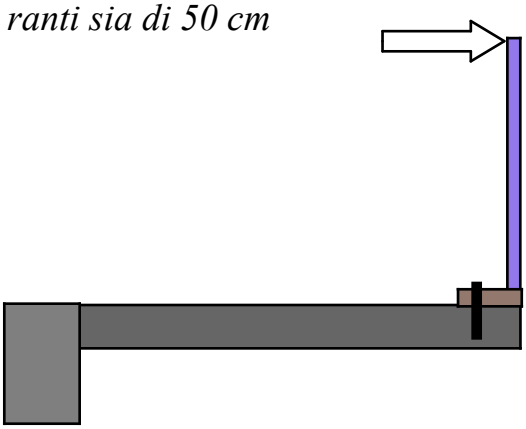
4- Calcolo degli ancoranti per un parapetto in vetro

Si vuole eseguire la verifica degli ancoranti per parapetti in vetro così come riportati in figura :





La ringhiera è alta 120 cm ed ha un ancoraggio alla soletta di calcestruzzo decentrato. Si tratta di calcolare il parapetto e le sollecitazioni che interessano il tassello di acciaio quali sforzo normale N e taglio V ; ipotizziamo che l'interasse tra gli ancoranti sia di 50 cm



Il parapetto è sollecitato dal peso proprio e da un azione orizzontale di circa 200 daN/ml distribuita sul bordo superiore e da eventuale azione del vento; le azioni sismiche verticali ed orizzontali come elemento non strutturale vanno considerate nella globalità dello sbalzo poiché la massa del parapetto è ridotta.

La forza di trazione che sollecita l'ancorante

$N = M/d$; Momento alla base dovuto alle forze orizzontali $M = F*h + q*h^2/2$

d distanza del tassello dal centro di rotazione

La forza di taglio

$V = F + q*h$

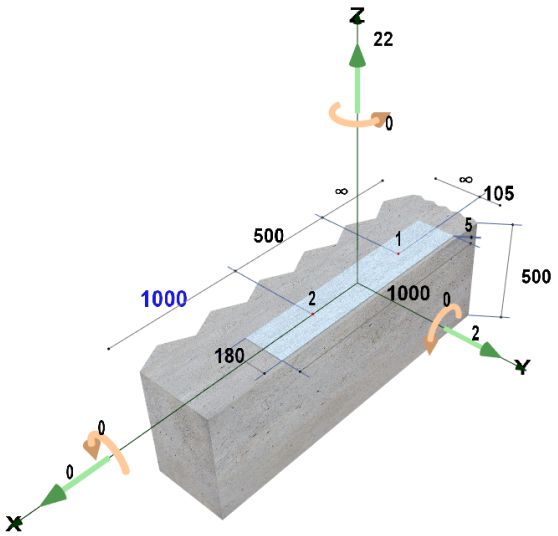
La forza orizzontale sul parapetto e l'altezza del suo punto di applicazione sono definite dalle NTC
H_K = 200 daN , h = 120 cm
Come azione del vento si considera una pressione di 150 daN/mq , le due azioni le consideriamo separatamente :

*M_1 = 240daN*m ; V_1 = 200 daN ; M_2 = 108 daN*m ; V_1 = 180 daN ;*

le sollecitazioni più gravose per il nostro parapetto sono quelle della forza orizzontale derivante da persone che si appoggiano o vengono spinte sulla balaustra.

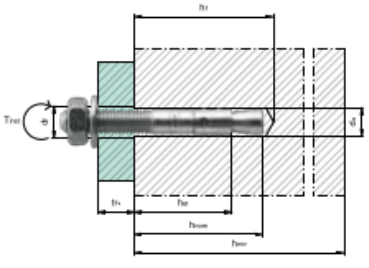
Il tassello è sollecitato da
N_Z =M /0,105 = 22850N V_X = 2000 N V_Y =0

la verifica dell'ancorante la eseguiamo attraverso un software di calcolo riportando i risultati



Si utilizza un ancorante meccanico del tipo NWS-CE M12 h_{eff}= 65 mm del quale riportiamo la scheda tecnica.

LEGEND		
	h_{min} [mm]	Spessore minimo del supporto > Minimum thickness of base material > Épaisseur minimal du matière base > Mindestbauteildicke
	d_0 [mm]	Diametro foro > Hole diameter > Diamètre du trou > Bohrlochdurchmesser
	h_1 [mm]	Profondità del foro > Hole depth > Profondeur du trou > Bohrlochtiefe
	h_{nom} [mm]	Profondità di inserimento > Embedment depth > Profondeur d'enfoncé > Setztiefe
	h_{ef} [mm]	Profondità effettiva ancoraggio > Effective anchorage depth > Profondeur efficace d'ancrage > Effektive Verankerungstiefe
	s_{cr} [mm]	Interasse caratteristico > Characteristic spacing > Entraxe caracteristique > Charakteristische Achsabstand
	c_{cr} [mm]	Distanza dal bordo caratteristica > Characteristic edge distance > Distance du bord caracteristique > Charakteristische Randabstand
	s_{min} [mm]	Interasse minimo > Minimum allowable spacing > Entraxe minimale > Minimaler Achsabstand
	c_{min} [mm]	Distanza minima dal bordo > Minimum allowable edge distance > Distance du bord minimale > Minimaler Randabstand
	d_f [mm]	Diametro foro spessore fissabile > Diameter of clearance hole in the fixture > Diamètre du trou de épaisseur fixable > Durchgangsloch im Anbauteil
	S_w [mm]	Chiave > Key > Clef > Schlüsselweite
	T_{inst} [Nm]	Coppia di serraggio > Installation torque > Couple de serrage > Drehmoment beim Verankern



CODICE CODE	ARTICOLO ITEM	SPESSORE MIN SUPPORTO MIN THICKNESS BASE MATERIAL	DIAM. FORO HOLE DIAM.	PROFONDITÀ DEL FORO HOLE DEPTH	PROFONDITÀ DI INSERIMENTO EMBEDMENT DEPTH	PROFONDITÀ EFFETTIVA ANCORAGGIO EFFECTIVE ANCHORAGE DEPTH	INTERASSE CARATTERISTICO CHARACTERISTIC SPACING	DISTANZA DAL BORDO CARATTERISTICA CHARACTERISTIC EDGE DISTANCE	INTERASSE MIN ALLOWABLE SPACING	DISTANZA MIN DAL BORDO MIN ALLOWABLE EDGE DISTANCE	DIAM. FORO SPESSORE FISSABILE DIAM. CLEARENCE HOLE IN THE FIXTURE	CHIAVE KEY	COPPIA DI SERRAGGIO INSTALLATION TORQUE
	NWS-CE	h_{min} [mm]	d_0 [mm]	h_1 [mm]	h_{nom} [mm]	h_{ef} [mm]	S_{cr} [mm]	C_{cr} [mm]	S_{min} [mm]	C_{min} [mm]	d_f [mm]	S_w [mm]	T_{inst} [Nm]
709224	NWS-CE 12-90	100**	12	70**	62**	50**	150**	75**	70	70	14	19	60
709225	NWS-CE 12-100	100**	12	70**	62**	50**	150**	75**	70	70	14	19	60
709226	NWS-CE 12-110	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709227	NWS-CE 12-120	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709228	NWS-CE 12-140	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709229	NWS-CE 12-160	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709230	NWS-CE 12-180	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709231	NWS-CE 12-220	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709232	NWS-CE 12-250	130-100**	12	85-70**	77-62**	65-50**	195-150**	98-75**	70	70	14	19	60
709233	NWS-CE 14-120	150	14	100	91	75	225	113	80	80	16	22	90
709234	NWS-CE 14-145	150	14	100	91	75	225	113	80	80	16	22	90
709235	NWS-CE 14-170	150	14	100	91	75	225	113	80	80	16	22	90
709236	NWS-CE 14-220	150	14	100	91	75	225	113	80	80	16	22	90
709237	NWS-CE 14-250	150	14	100	91	75	225	113	80	80	16	22	90
709238	NWS-CE 16-125	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709239	NWS-CE 16-145	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709240	NWS-CE 16-175	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709241	NWS-CE 16-220	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709242	NWS-CE 16-250	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709243	NWS-CE 16-280	168-130**	16	110-90**	104-85**	84-65**	252-195**	126-98**	90	90	18	24	120
709244	NWS-CE 20-170	206-150**	20	135-107**	125-97**	103-75**	309-225**	155-113**	135	135	22	30	240
709245	NWS-CE 20-220	206-150**	20	135-107**	125-97**	103-75**	309-225**	155-113**	135	135	22	30	240
709246	NWS-CE 20-270	206-150**	20	135-107**	125-97**	103-75**	309-225**	155-113**	135	135	22	30	240



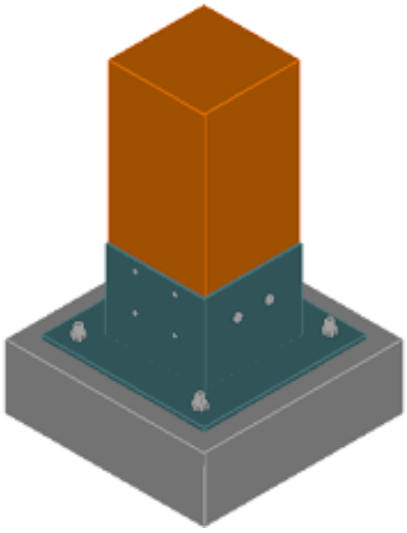
NWS-CE

STEEL ZINC PLATED

ETA-CE Option 7

5-. Calcolo degli ancoranti per una piastra di fondazione

Eseguiamo il calcolo degli ancoranti di una piastra di fondazione per una struttura in legno da realizzare su una struttura di cls esistente

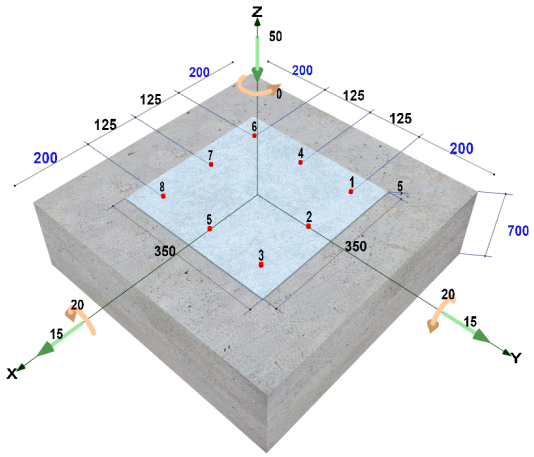


*Il pilastro è quadrato ha dimensioni 20x20 cm , la piastra metallica ha dimensioni 35x35 cm spessore 5 mm , mentre il basamento di cls è 65x65*70 cm; vi sono 4 ancoranti , le sollecitazioni trasmesse dal pilastro alla fondazione*

N_Z = 5000 daN ; V_X = 1500 daN ; V_Y = 1500 daN ;

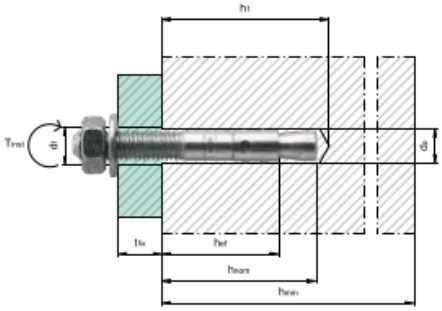
*M_X = 2000 daN*m ; M_Y = 2000 daN*m ;*

Si dispongono 8 ancoranti



La verifica fornisce ancoranti NWS CE1 M24 h_{eff} = 115 mm

LEGEND		
	d [mm]	Diametro filettatura > Thread diameter > Diamètre du filetage > Gewindedurchmesser
	d_{nom} [mm]	Diametro esterno ancorante > Outside diameter of anchor Diamètre externe d'ancrage > Außendurchmesser des dübels
	L [mm]	Lunghezza totale ancorante > Total length of anchor Longueur élément d'ancrage > Dübellänge
	dxL [mm x mm]	Filettatura diametro x lunghezza > Thread diameter x length Diamètre du filetage x longueur > Gewinde x Dübellänge
	t_{fix} [mm]	Spessore fissabile (max) > Fixture thickness (max) Épaisseur fixable (max) > Max. Anbauteildicke



NWS-CE1

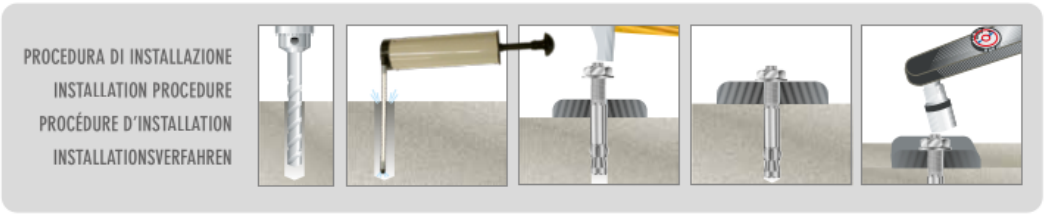


CE Option 1

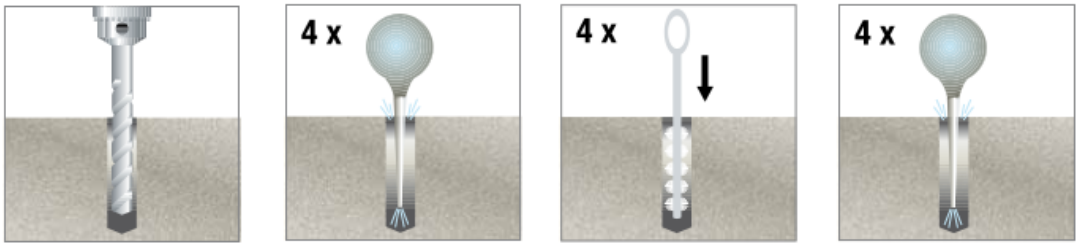
CODICE CODE	ARTICOLO ITEM	DIAMETRO FILETTATURA THREAD DIAMETER	DIAMETRO ESTERNO ANCORANTE OUTSIDE DIAMETER OF ANCHOR	LUNGHEZZA TOTALE ANCORANTE TOTAL LENGTH OF ANCHOR	FILETTATURA DIAMETRO X LUNGHEZZA THREAD DIAMETER X LENGTH	SPESSORE FISSABILE (MAX) FIXTURE THICKNESS (MAX)	
CE	NWS-CE1	d [mm]	d_{nom} [mm]	L [mm]	dxL [mm x mm]	t_{fix} [mm]	Nr.
710524	NWS-CE1 12-190/285	M12	12	285	M12 × 80	190	20
710525	NWS-CE1 16-15-35/135	M16	16	135	M16 × 56	C1 C2 15-35**	20
710526	NWS-CE1 16-25-45/145	M16	16	145	M16 × 66	C1 C2 25-45**	20
710527	NWS-CE1 16-50-70/170	M16	16	170	M16 × 91	C1 C2 50-70**	20
710528	NWS-CE1 16-80-100/200	M16	16	200	M16 × 121	C1 C2 80-100**	10
710529	NWS-CE1 16-100/220	M16	16	220	M16 × 80	100	10
710530	NWS-CE1 16-140/260	M16	16	260	M16 × 80	140	10
710531	NWS-CE1 16-180/300	M16	16	300	M16 × 80	180	10
710532	NWS-CE1 20-30/165	M20	20	165	M20 × 50	C1 C2 30	10
710533	NWS-CE1 20-60/195	M20	20	195	M20 × 70	C1 C2 60	10
710534	NWS-CE1 20-100/235	M20	20	235	M20 × 80	100	5
710535	NWS-CE1 20-130/265	M20	20	265	M20 × 80	130	5
710536	NWS-CE1 20-150/285	M20	20	285	M20 × 80	150	5
710537	NWS-CE1 24-30/190	M24	24	190	M24 × 55	30	10
710538	NWS-CE1 24-60/220	M24	24	220	M24 × 85	60	5
710539	NWS-CE1 24-75/235	M24	24	235	M24 × 100	75	5
710540	NWS-CE1 24-100/260	M24	24	260	M24 × 125	100	5
710541	NWS-CE1 27-30/210	M27	27	210	M27 × 62	30	5
710542	NWS-CE1 27-60/240	M27	27	240	M27 × 92	60	5
710543	NWS-CE1 27-100/280	M27	27	280	M27 × 132	100	5

6- Modalità di posa in opera

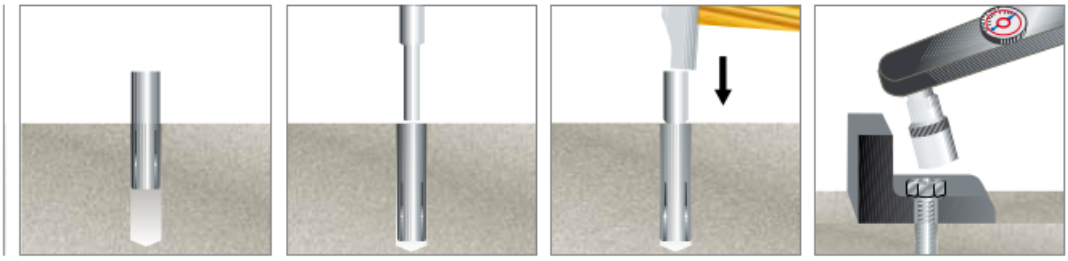
Merita un cenno la procedura di installazione poiché l'efficacia dell'ancoraggio dipende da una corretta posa in opera



- Eseguire il foro controllandone la perpendicolarità ; soffiare il foro con apposita pompa soffiante , eseguire la pulizia del foro con apposito scovolino, soffiare nuovamente il foro fino a quando non fuoriesca più polvere o materiale residuo.



-Fissaggio ancorante con filettatura interna ed espansione a percussione



-posizionare l'ancorante nel foro
- inserire il punzone
-martellare il punzone fino a fondo corsa
-posizionare l'oggetto da fissare sopra il foro inserire il bullone e serrare

- Fissaggio ancorante filettatura interna

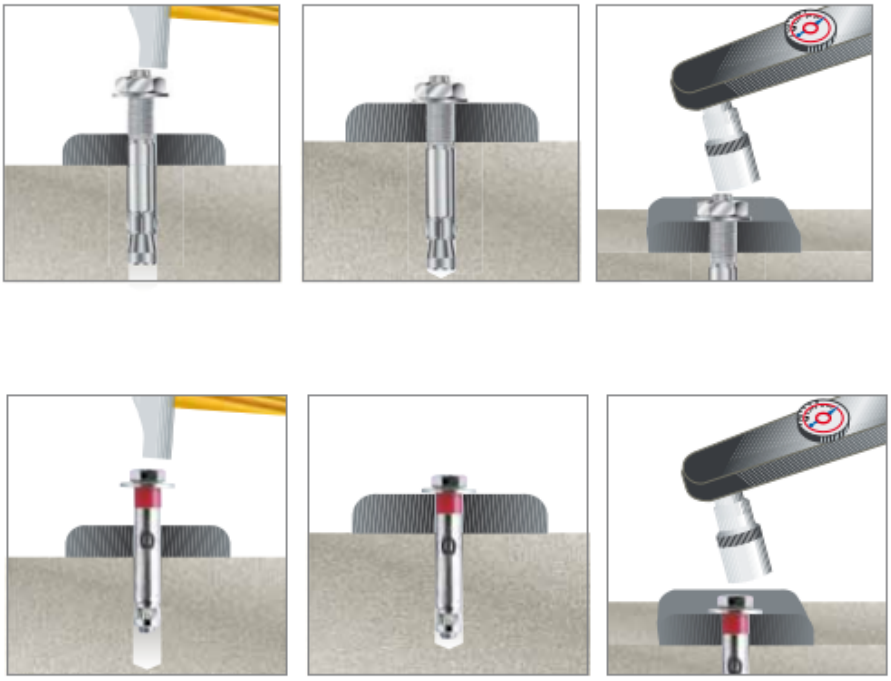
-posizionare l'ancorante nel foro
-posizionare l'oggetto da fissare sopra il foro ed inserire inl bullone
-serrare con chiave dinamometrica



-Fissaggio ancorante con filettatura esterna o camicia di espansione

- inserire l'ancorante attraverso l'oggetto da fissare nel foro

- fissare con chiave dinamometrica



7- Conclusioni

Gli ancoranti da installare su strutture in calcestruzzo esistenti per il fissaggio di elementi non strutturali oppure per l'ancoraggio di elementi strutturali sono estremamente utili e rappresentano una soluzione efficace al collegamento tra i diversi elementi anche in zona sismica. Le attuali norme italiane in materia di ancoranti sono abbastanza carenti per cui si fa riferimento all'eurocodice 2 parte a 4 alle norme francesi o ancora alle norme europee EOTA . Le formule di verifica empiriche molto complesse anche tenendo conto delle differenti modalità di rottura trovano una loro giustificazione teorica ed è stato questo l'obiettivo di questi appunti, oltre al miglioramento della preparazione dell'autore.

Bibliografia

- Ancoranti post installati per gli elementi non strutturali in zona sismica su strutture in calcestruzzo Ordine degli ingegneri di Roma

-Design of anchor channel EOTA

-Guide on design of post-istalled anchor bolt system in Hong Kong Politecnico Hong Kong

-Software Bossong fix

Le strutture in vetro

1- Introduzione

2- Tipologie di vetro e parametri meccanici

3- Verifica di una trave e di un pilastro in vetro

4- Verifica e calcolo di una piastra- lastra in vetro

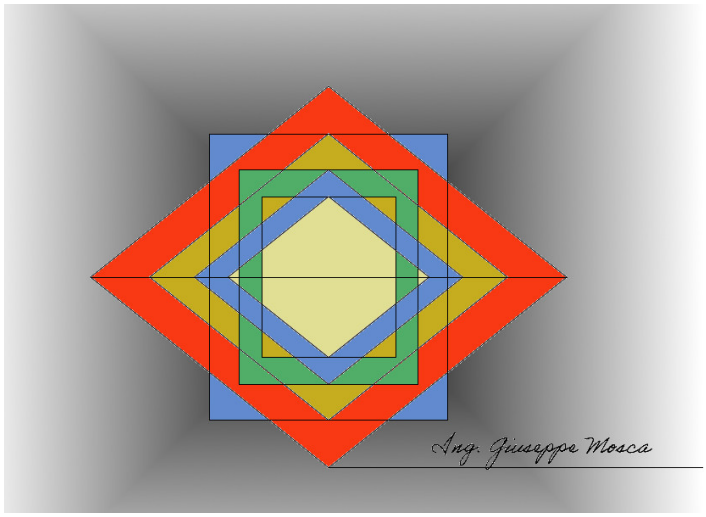
5- Il calcolo del parapetto in vetro

6- Le vetrate

7- Le volte reticolari

8- La trasmittanza termica delle strutture in vetro

9- Conclusioni



Ing. Giuseppe Mosca

N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

Il vetro strutturale è un materiale innovativo che ha trovato un largo impiego nel settore delle costruzioni negli ultimi anni in forma di elementi piani di copertura , di pareti vetrate , parapetti quindi con funzione di tamponamento o di orizzontamento. Il vetro è un materiale fragile per eccellenza quindi va posta particolare attenzione alle costruzioni in zona sismica realizzate con elementi vetrati , un approccio strutturale consapevole consente di ottenere livelli di affidabilità e sicurezza simili alle costruzioni che utilizzano materiali più tradizionali quali calcestruzzo ed acciaio. In questi appunti si vogliono fornire dei metodi di verifica basilari per la verifica di elementi monodimensionali e bidimensionali in vetro strutturali quali volte reticolari in acciaio o legno in cui l'elemento piano contribuisce alla trasmissione degli sforzi di trazione e compressione e nella modellazione FEM può essere inserito come un elemento plate- shell sollecitato oltre che da sforzi membranali anche da flessione e taglio derivanti da un carico da neve ; oppure una parete di tamponamento in zona sismica realizzata interamente in vetro strutturale che presenta evidenti problemi di fragilità con i relativi accorgimenti tecnici da utilizzare. Al vetro come ad ogni altro materiale da costruzione si applicano i metodi tradizionali della scienza delle costruzioni , la teoria della trave e della piastra o lastra con la formulazione di instabilità poiché gli elementi in vetro hanno dimensioni ridotte quindi possono instabilizzarsi per carico di punta. In Italia il vetro strutturale è normato dalle ***"Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Costruzioni con Elementi Strutturali di Vetro " CNR -DT 210/2013*** *inoltre vi sono delle Linee guida europee per la progettazione strutturale di componenti in vetro ,* ***"Guidance for European Structural Design of Glass Components"*** *per cui in questi appunti per quanto concerne i metodi di verifica faremo riferimento a queste norme.*



2- Tipologie di vetro e parametri meccanici

Il vetro è un materiale omogeneo ed isotropo il cui comportamento è elastico lineare sia a trazione che a compressione , con deformazione in fase plastica praticamente nulla e quindi con rottura di tipo fragile. La resistenza a compressione è molto più grande di quella a trazione per vetro sodocalcico è circa 1000 N/mmq; la resistenza a trazione è pressoché indipendente dalla composizione chimica del vetro , pertanto la resistenza meccanica a trazione del vetro va valutata da un modello di meccanica della frattura. Si riportano di seguito le proprietà fisiche del vetro ed i diagrammi tensione deformazione

Tabella 2.1. Principali proprietà fisiche del vetro sodo-calcico e borosilicato.

Proprietà	Simbolo	Unità di misura	Valore
Densità	ρ	[kg/m^3]	2250 ÷ 2750
Modulo di Young	E	[MPa]	63000 ÷ 77000
Coefficiente di Poisson	ν	[-]	0.20 ÷ 024
Coefficiente di dilatazione termica	α	[μm/(m K)]	3.1 ÷ 6 (1) 9 (2)
Calore specifico	C_p	[J/(kg K)]	720 (1) 800(2)
Coefficiente di conducibilità termica	λ	[W/(m K)]	0.9 ÷ 1
Tenacità – valore critico del fattore di intensificazione degli sforzi (in modo I)	K_{IC}	[MPa m$^{1/2}$]	0.75
Temperatura di transizione		[°C]	530
Massima temperatura di servizio		[°C]	280
(1) vetro borosilicato (2) vetro silicato sodo-calcico			

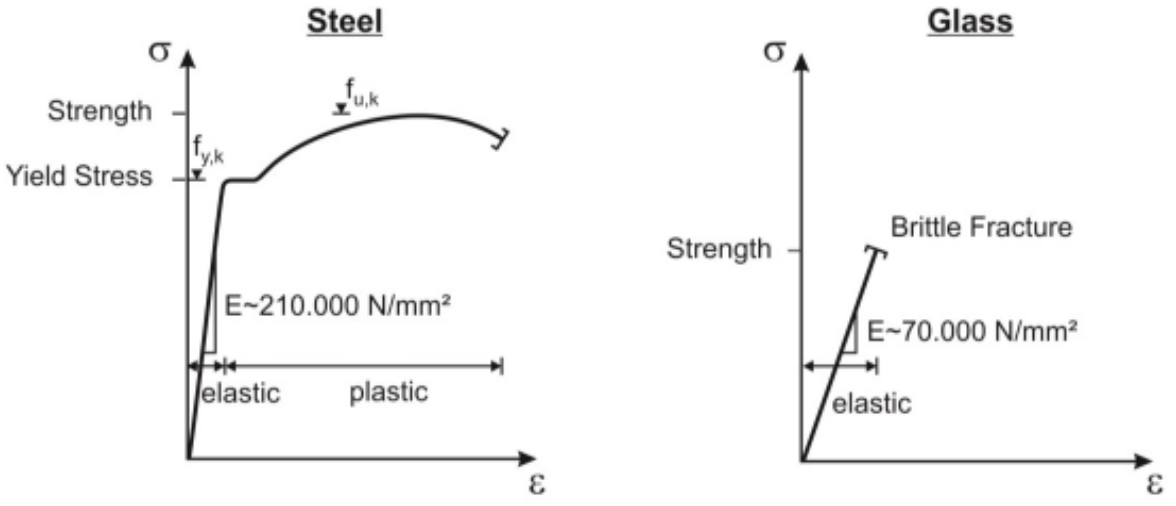
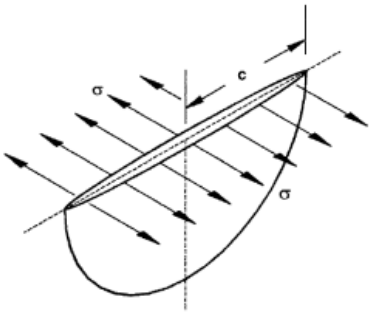


Figure 2-1 Stress-strain relation of glass and steel

Dal confronto tra l'acciaio ed il vetro si vede cha la deformazione elastica nel vetro è maggiore di quella dell'acciaio mentre la deformazione plastica è praticamente nulla ovvero ha un comportamento estremamente fragile.
Analizziamo le differenti tipologie di vetro intendo per materiale vetro , il vetro piano silicato sodo-calcico riportando le tipologie più importanti

- ***Vetro monolitico***
- *Elemento strutturale composto da un unica lastra di vetro*
- ***Vetro Float***
  Vetro silicato sodo-calcico piano, trasparente, chiaro o colorato a facce parallele e lustre ottenuto per colata continua e flottazione su un bagno di metallo,come definito dalle norme europee
- ***Vetro tirato***
  Vetro silicato sodo-calcico piano, trasparente, chiaro o colorato ottenuto per tiraggio continuo, inizialmente verticale, di spessore regolare e con le due superfici lustre a fuoco, come definito dalle norme europee
- ***Vetro Camera***
  Elemento costituito da due o più lastre di vetro, separate da uno o più distanziatori, ermetica-mente sigillate lungo il perimetri, meccanicamente stabile e duraturo.
- ***Vetro Presollecitato***
  Vetro che ha subito un trattamento (termico o chimico) tale da indurre lungo lo spessore del materiale un campo di tensioni (trazione nello spessore e compressione sulla superficie) che permettono di inibire la propagazione delle fessure superficiali, aumentando così la resistenza meccanica e alle sollecitazioni termiche della lastra. Una volta presollecitati i vetri non possono essere tagliati, forati o subire lavorazioni lungo i bordi a causa dello stato di trazione presente nello spessore. I vetri presollecitati possono esse ottenuti da vetri float, tirati, stampati e rivestiti (solo processo di indurimento e tempera termica) come definiti dalle rispettive norme di prodotto.
- ***Vetro Stampato armato***
  Vetro silicato sodo-calcico piano, traslucido, chiaro o colorato, ottenuto per colata continua e laminatura, che ha una rete di acciaio saldata a tutte le intersezioni incorporata nel vetro durante il processo di fabbricazione.

Studiamo adesso i meccanismi che regolano ***la resistenza a trazione del vetro***
la resistenza a trazione si misura sul vetro ricotto in modo che si possa prescindere da autotensioni utilizzando il modello classico della meccanica della frattura nella ipotesi di elasticità lineare dove il parametro di riferimento è il coefficiente di intensificazione degli sforzi K. La cricca ***Penni-shaped*** *può essere ritenuta semiellittica ricavando il fattore di intensificazione degli sforzi K dal problema elastico di un semispazio infinito essendo le dimensioni delle cricche preesistenti minori dello spessore della lastra di vetro.*



La rottura del vetro è causata dalla propagazione della frattura nel modo I, per la cricca semiellittica superficiale il fattore di intensificazione degli sforzi

$K_I = Y * \sigma_G * \sqrt{(c * \pi)}$ (1)

c è la lunghezza del più piccolo dei semiassi dell'ellisse ;
σ_G è la tensione di trazione agente in direzione normale al piano di giacitura della cricca ;
Y è un coefficiente che tiene conto della forma geometrica del fronte di cricca

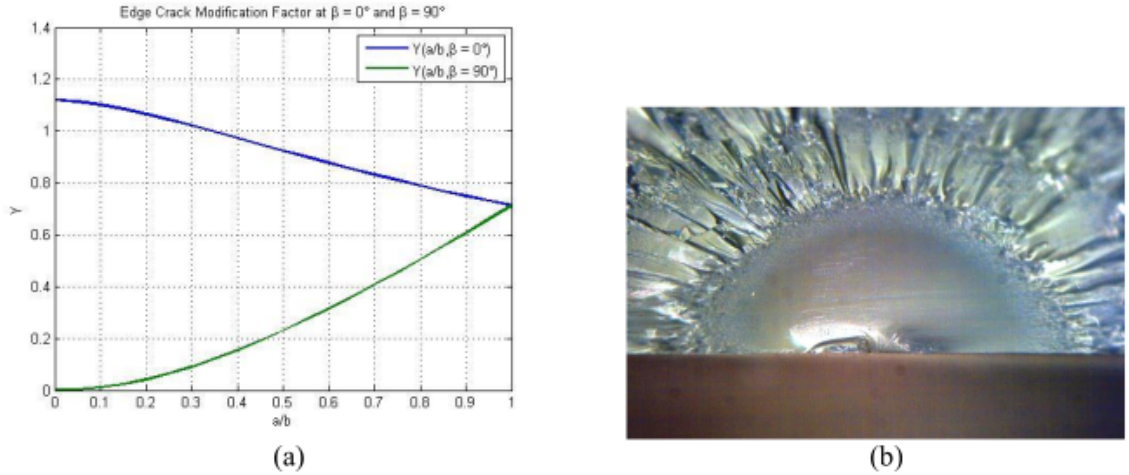


Figura 2.2. (a) Fattore di modificazione Y della cricca semiellittica, nella direzione dell'asse minore (β = 0°) e dell'asse maggiore (β = 90°), in funzione del rapporto *a/b* tra le dimensioni della cricca nelle due direzioni; (b) Specchio di frattura di una lastra rotta tramite prova di flessione su 4 punti.

Si può utilizzare un fattore di modificazione $Y = 2{,}24/\pi$

Dalla (1) si può ricavare la dimensione della cricca c

$c = [K_{IO}/(Y * \sigma_G * \sqrt{\pi})]^2$

$K_{IO} = 0{,}25 \div 0{,}30$ *N/mmq*$\sqrt{m}$ *per vetro silicato sodo-calcico*

Per vetri presollecitati il fattore di intensificazione degli sforzi dipende anche dalle autotensioni presenti nella lastra ed è definito dalla seguente formula :

$K_I = Y * \sigma_G * \sqrt{(c * \pi)} + K_{IR}$

ovvero vi è un termine aggiuntivo K_{IR} di incerta definizione .

Si introduce anche per il vetro come per il legno un coefficiente K_{mod} per tener conto della fatica statica il quale riduce opportunamente la resistenza a trazione del vetro

$\sigma_L = K_{mod} * f_G$ per un carico che agisce per una durata $t = t_L$; ed una dimensione della cricca $c = c_L$
I valori di K_{mod} sono riportati nella seguente tabella in funzione della tipologia di carico, per frattura elastica lineare LEFM e quelli proposti dalla norma prEN

Tabella 2.2. Fattore k_{mod} ricavato dalla teoria LEFM per f_g = 45 MPa, v_0 = 0.0025 m/s e n = 16, per vari valori t_L della durata del carico. Confronto con i valori riportati nella prEN16612-2013.

Durata t_L	k_{mod} LEFM	k_{mod} prEN16612	**Esempio**
3÷5 s	0.91-0.88	1.00	vento (raffica)
30 s	0.78	0.89	transito temporaneo
10÷15 min	0.65÷0.64	0.74÷0.72	vento (cumulato)
11 ore	0.50	0.57	variazioni temperatura giornaliere
1 settimana	0.42	0.48	neve (1 settimana)
3 mesi	0.36	0.41	neve (3 mesi)
6 mesi	0.35	0.39	variazioni temperatura stagionale
50 anni	0.26	0.29	Peso proprio

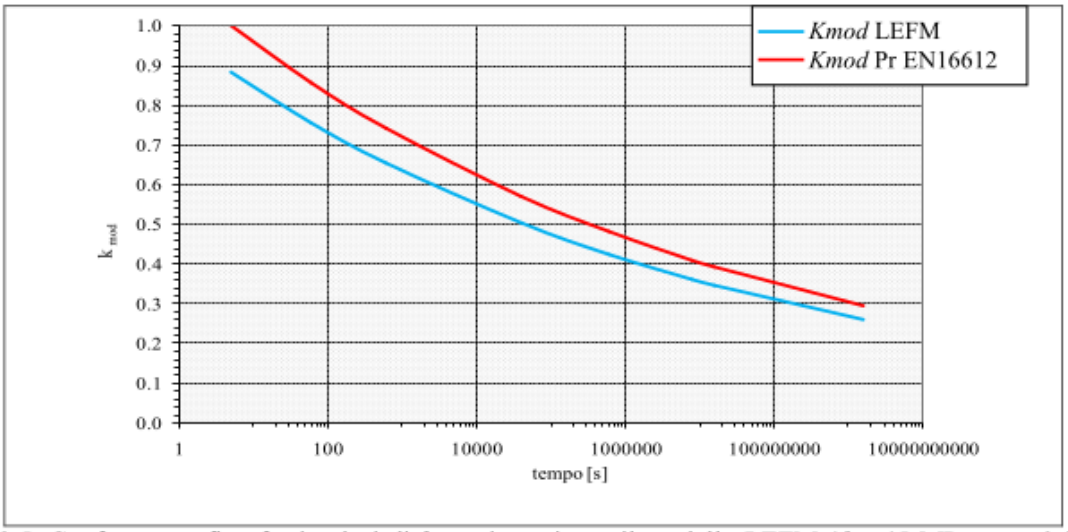


Figura 2.5. Confronto grafico fra i valori di k_{mod}, ricavati con il modello LEFM (f_g = 45 MPa, v_0 = 0.0025 m/s, n = 16), con i valori riportati nella prEN 16612 (edizione 2013).

Per le verifiche strutturali ciò che a noi interessa sono i valori caratteristici della resistenza a trazione del vetro definiti dalle norme UNI e riportati nella seguente tabella

Tabella 2.4. Valori minimi della resistenza caratteristica a trazione per flessione delle lastre di vetro ricotto ($f_{g;k}$) e delle lastre di vetro presollecitato($f_{b;k}$) prescritti dalle norme di prodotto.

Prodotti	Ricotto	Indurito termicamente	Temperato termicamente	Indurito chimicamente
lastre di vetro *float*	45 MPa	70 MPa	120 MPa	150 MPa
lastre di vetro stampato	-	55 MPa	90 MPa	150 MPa
lastre di vetro smaltato	-	45 MPa	75 MPa	-

1 Mpa = 1N/mmq = 10 daN/cmq

Il progetto deve garantire requisiti di resistenza di esercizio si durabilità

-Gerarchia strutturale

Gli elementi strutturali vengono classificati sulla base delle possibili conseguenze, in termini di perdite sia materiali che umane, derivanti dal loro collasso. Nel caso specifico si deve considerare la possibilità di rottura del vetro, anche in seguito ad eventi fortuiti, quali ad esempio urti accidentali, atti vandalici o presenza di microdifetti. Riguardo a quest'ultimo aspetto, particolarmente insidiosa, ad esempio, è la presenza di inclusioni di solfuro di nichel che possono provocare la rottura spontanea del vetro temperato anche molto tempo dopo la sua installazione. Le strutture di vetro vengono classificate sulla base della classe di conseguenze per la loro crisi eventuale verranno classificate in elementi di prima, seconda e terza classe.

-Robustezza strutturale

La robustezza strutturale è la capacità di un elemento, o di una parte strutturale, di evitare danni sproporzionati come conseguenza di una causa che abbia provocato un danno limitato. Ad esempio, la robustezza indica la capacità di evitare il crollo nel caso in cui la struttura subisca danni locali dovuti ad azioni accidentali (urti, atti vandalici) o rotture spontanee (difetti nel materiale, come inclusioni da solfuro di Nichel o gradienti termici). Il soddisfacimento di questo requisito consente di realizzare strutture in grado di mettere in campo tutte le proprie riserve di resistenza fino al collasso, attraverso l'attivazione di molteplici percorsi alternativi di trasferimento dei carichi. Allo stesso tempo si allontana il pericolo di collasso generalizzato a seguito di rotture localizzate della struttura (collasso progressivo).

-Ridondanza strutturale

La ridondanza strutturale rappresenta la capacità della struttura di ridistribuire al suo interno lo stato di sforzo, in modo tale che il collasso di una sua parte non provochi il collasso dell'intera struttura. In una struttura ridondante i carichi possono essere sostenuti:

- *dallo stesso meccanismo resistente di partenza, ma di resistenza diminuita a seguito del danneggiamento subito (ad esempio nel caso in cui si riduce la sezione resistente);*
- *attraverso meccanismi resistenti alternativi (ad esempio, quando si ha la rottura di una pinna in una vetrata continua).*

-Ridondanza di sezione

Rappresenta la capacità della sezione di un elemento strutturale di mantenere una capacità resistente residua a seguito della rottura di una sua parte ovvero, in modo equivalente, la proprietà per cui la rottura di una parte della sezione non ne provoca la rottura totale. E' importante osservare che nelle strutture di vetro, al contrario di quanto avviene ad esempio in una sezione di calcestruzzo armato o di acciaio, un basso tasso di lavoro del materiale non conferisce ridondanza alla sezione. Questo perché da un lato la tenacità del materiale è scarsa e quindi, una volta innescate, le

fratture propagano in modo quasi istantaneo; dall'altro, le rotture possono innescarsi spontanee anche in presenza di bassi livelli tensionali (ad esempio per la presenza di microdifetti), oppure possono essere dovute ad eventi fortuiti (urti accidentali, atti vandalici). Per questo motivo, un elemento monolitico di vetro nel quale venga aumentato le spessore rispetto a quello minimo di progetto non può essere considerato strutturalmente ridondante. Invece, un esempio tipico di ridondanza di sezione si può avere nei vetri stratificati, dove si possono prevedere lastre aggiuntive rispetto a quelle strettamente necessarie per far fronte alle azioni di progetto. In caso di rottura accidentale di una lastra, le lastre superstiti possono sopportare, in tutto o in parte, i cari-chi di progetto.

- Ridondanza di sistema
È la capacità della struttura di trasferire i carichi, a seguito della rottura di un elemento o di una parte, secondo meccanismi alternativi rispetto a quello di progetto.

-Durabilità
Per quanto riguarda la durabilità, occorre distinguere fra il comportamento del vetro, che in generale ha eccellenti prestazioni, ed il comportamento dei materiali usati in composizione, di regola a base polimerica, che sono molto sensibili alla temperatura, all'umidità e all'invecchiamento. Per assicurare la durabilità vanno tenuti in debito conto:
· la destinazione d'uso prevista;
· le condizioni ambientali attese;
· la composizione, le caratteristiche e le prestazioni dei prodotti utilizzati nel tempo e nelle diverse condizioni ambientali previste;
· la scelta del tipo di collegamenti;
· la qualità ed il livello di controllo dell'esecuzione,
· particolari misure protettive, ad esempio, nei confronti del fuoco e degli urti;
· la manutenzione programmata durante la vita utile.

Classificazione del vetro
Classe zero *prodotti da costruzione senza funzione strutturale CCO*
Prima classe *Elementi strutturali con classe di conseguenze CC1*
Seconda Classe *Elementi strutturali con classe di conseguenze CC2*
Terza Classe *Elementi strutturali con classe di conseguenze CC3*

Le classi di conseguenze

CC0*: prodotti da costruzione specificatamente non strutturali. A seguito della loro crisi, si prevedono conseguenze molto limitate in termini economici, sociali, ambientali e perdita di vite umane.*
CC1*: elementi strutturali in seguito alla cui crisi si prevedono conseguenze limitate per perdita di vite umane e conseguenze modeste o trascurabili in termini economici, sociali o ambientali. Fanno parte di questa categoria le strutture degli edifici dove le*

persone sono presenti solo occasionalmente e, per estensione, quegli elementi di vetro la cui crisi strutturale comporta scarse conseguenze.

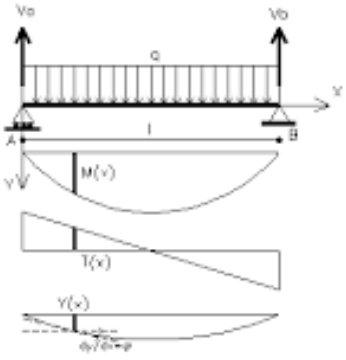
***CC2**: elementi strutturali in seguito alla cui crisi si prevedono conseguenze medie per perdita di vite umane, conseguenze considerevoli in termini economici, sociali o ambientali. Esempi di strutture ricadenti in questa classe sono quelle degli edifici residenziali e per uffici. Per estensione, tutti quegli elementi strutturali la cui crisi comporta conseguenze di livello medio.*

***CC3**: elementi strutturali in seguito alla cui crisi si prevedono conseguenze alte per perdita di vi-te umane, conseguenze importanti in termini economici, sociali o ambientali. Ricadono in questa categoria, ad esempio, le strutture di edifici pubblici, palchi e tribune coperte, dove le conseguenze della crisi possono essere elevate (sale da concerto, centri commerciali con grande affollamento etc.). Per estensione, tutti quegli elementi strutturali di vetro la cui crisi comporta conseguenze di livello elevato.*

3- Verifica e calcolo di una trave e di un pilastro in vetro

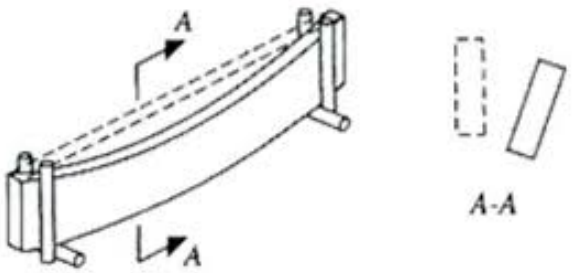
Il calcolo e la verifica di una trave di vetro è immediato discende dalla scienza delle costruzioni dalla teoria del de Saint Venant utilizzando la formula di Navier

$\sigma = M/I*y = M/W \qquad \tau = 1{,}5*V/A$



Le travi in vetro hanno degli spessori ridotti si hanno problemi di instabilità flesso-torsionale , con sbandamento laterale la classica verifica a svergolamento





$\boldsymbol{M_{E,d}}$ *(momento flettente di progetto)* $\leq \boldsymbol{M_{bR,d}}$ *(momento critico resistente)*

$\boldsymbol{M_{bR,d}} = \chi_{L,T} * M_R$

$\chi_{L,T}$ *coefficiente di riduzione per la stabilità flessotorsionale*

$M_R = W * f_{G,d}$; $W = b*h^2/6$; $f_{G,d}$ *resistenza a trazione del vetro*

$\chi_{L,T} = 1/[\Phi + \sqrt{(\Phi - \underline{\lambda}^2)}]$; $\Phi = 0{,}5*[1+\underline{\alpha}*(\underline{\lambda}-\alpha_0) + \underline{\lambda}^2]$

$\underline{\alpha}$*= 0,26 fattore di imperfezione*
α_0*=0,20 coefficiente che delimita il tratto della curva in cui* $\chi_{L,T} = 1$

$\underline{\lambda}$ *snellezza normalizzata dell'elemento*

$\underline{\lambda} = \underline{\lambda}_{LT} = [Wx * f_{G,k,st}/Mcr]^{1/2}$

momento critico $Mcr = C_1 * \pi/L * \sqrt{(E * J_y * G * I_P)}$

E modulo di elasticità normale vetro
G modulo di elasticità tangenziale
J_y *momento di inerzia rispetto asse y piano di inflessione laterale*
I_P *momento di inerzia polare*
C_1 *fattore dipendente dalla distribuzione del momento*

Tabella 6.8. Coefficiente C_1 in funzione della distribuzione del momento flettente.

Distribuzione del momento flettente	$\boldsymbol{C_1}$
Costante	1.00
Bi-lineare (nullo a metà luce)	2.70
Parabolico (nullo ad entrambe le estremità e massimo al centro)	1.13
Triangolare (nullo ad entrambe le estremità e massimo al centro)	1.36

$f_{G,k,st} = K_{mod} * K_{ed} * K_{sf} * \lambda_{GA} * \lambda_{GL} * f_{G,K} + K_v * K'_{ed} * (f_{bK} - f_{g,K})$

f_{bK} *valore caratteristico della resistenza a trazione del vetro a seguito di un trattamento di rafforzamento*
$f_{g,K}$ *valore caratteristico resistenza a trazione di un vetro ricotto*

La resistenza a trazione del vetro $f_{G,d}$ *è definita dalla seguente formula*

$f_{G,d} = (K_{mod} * K_{ed} * K_{sf} * \lambda_{GA} * \lambda_{GL} * f_{G,K})/(R_M * \gamma_M) + [K_v * K'_{ed} * (f_{bK} - f_{g,K})]/(R_M v * \gamma_M v)$

γ_M *coefficiente parziale per la resistenza a trazione del vetro ricotto*

Tabella 7.9. Fattori parziali del vetro ricotto e del vetro presollecitato.

	Vetro ricotto*	Vetro presollecitato*
Coefficienti parziali	$\gamma_M = 2.50$	$\gamma_{M;v} = 1.35$
(*) Valori per verifiche allo SLU. Per quanto riguarda lo SLC, per le porzioni di vetro rimaste integre si potrà applicare i coefficienti relativi allo SLU.		

R_M *fattore riduttivo del coefficiente parziale per le verifiche in classe 1 e 2*

Tabella 7.10. Fattori riduttivi R_M dei coefficienti parziali per verifiche in prima o seconda classe.

Classe	Vetro ricotto	Vetro presollecitato
prima	$R_M = 0.7$	$R_{M;v} = 0.9$
seconda	$R_M = 1$	$R_{M;v} = 1$

i coefficienti parziali per le azioni di progetto

Tabella 7.2. Valore del coefficiente parziali dei carichi permanenti portanti e portati.

Classe	γ_{G1}		γ_{G2}	
	Se diminuisce la sicurezza	**Se aumenta la sicurezza**	**Se diminuisce la sicurezza**	**Se aumenta la sicurezza**
1 2	1,3	1	1,5	1

K_{mod} *coefficiente riduttivo che dipende dalla durata del carico visto nel paragrafo precedente*

Tabella 2.4. Valori minimi della resistenza caratteristica a trazione per flessione delle lastre di vetro ricotto ($f_{g;k}$) e delle lastre di vetro presollecitato($f_{b;k}$) prescritti dalle norme di prodotto.

Prodotti	Ricotto	Indurito termicamente	Temperato termicamente	Indurito chimicamente
lastre di vetro *float*	45 MPa	70 MPa	120 MPa	150 MPa
lastre di vetro stampato	-	55 MPa	90 MPa	150 MPa
lastre di vetro smaltato	-	45 MPa	75 MPa	-

K_{ed} *e* K'_{ed} *fattori riduttivi della tensione resistente*

rispettivamente per vetro ricotto e presollecitato, dipendenti dalla finitura del bordo dell'elemento di vetro o foro e dalla distanza d dal bordo del punto ove $f_{G,d}$ *viene calcolata,*

Tabella 7.3. Valori orientativi dei coefficiente k_{ed} e k'_{ed} per verifiche in prossimità del bordo di elementi di vetro e fori, nel caso di elementi con bordo in trazione.

Tipo di vetro	Valori* di k_{ed} e k'_{ed} in corrispondenza di bordo**							
	Tagliato		Sfilettato		Greggio		Lucidato***	
	k_{ed}	k'_{ed}	k_{ed}	k'_{ed}	k_{ed}	k'_{ed}	k_{ed}	k'_{ed}
Ricotto	0.7	0.7	0.7	0.7	0.8	0.8	0.9	0.9
Indurito	da evitare		da evitare		0.8	0.8	0.8	0.8
Temperato termicamente	da evitare		da evitare		0.8	0.8	0.8	0.8
Temperato chimicamente	da evitare		da evitare		0.6	0.7	0.6	0.7
Ricotto stampato	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
(*) Valori da utilizzarsi per verifiche in zone a distanza $d < 5$ s dal bordo o da fori (s = spessore lastra). Per $d > 5\ s$ e per lastre inflesse si assume $k_{ed} = 1$.								
(**) Le lavorazioni ai bordi sono intese ai sensi della UNI EN ISO 12543-5. (***) Nel caso di travi e pinne di vetro dove le trazioni massime sono in corrispondenza delle coste, si raccomanda di utilizzare bordi lucidati a profilo liscio curvo.								

k_{sf} fattore riduttivo della tensione resistente, *dipendente dal profilo superficiale del vetro.*

Tabella 7.4. Valori orientativi dei coefficiente k_{sf} per i vari profili superficiali del vetro.

	k_{sf}	
Vetro	Nessun trattamento (2)	Sabbiato
Vetro float	1	0.6
Vetro tirato	1	0.6
Vetro smaltato (float o tirato) (1)	(1)	(0.6)
Vetro stampato	0.75	0.45
Vetro smaltato stampato (1)	(0.75)	(0.45)
Vetro lustro armato	0.75	0.45
Vetro stampato armato	0.6	0.36
(1) Questi tipi di vetro non sono generalmente disponibili come vetri ricotti, ma è comunque necessario utilizzare il valore di k_{sf} per il calcolo della resistenza del vetro presollecitato (2) Per vetri acidati, è necessario utilizzare i valori di k_{sf} relativi a "Nessun trattamento"		

kv fattore riduttivo dell'incremento di resistenza a trazione del vetro *prodotto mediante un trattamento di presollecitazione (tempera, indurimento), da assumere nullo nel caso di vetro ricotto (assenza di rafforzamento).*

Tabella 7.8. Valori orientativi del fattore riduttivo dell'incremento di resistenza a trazione del vetro conseguente ad un trattamento di presollecitazione.

Trattamento di presollecitazione	k_v
Nessun trattamento	0
Trattamento termico con processo orizzontale	1
Trattamento termico con processo verticale	0.60
Indurimento chimico*	0.95
(*) Il coefficiente indicato potrà essere utilizzato solo nel caso in cui il vetro indurito termicamente sia controllato e qualificato secondo le procedure indicate nella Sezione 9.	

λ_{GA} fattore di scala *che considera l'area sottoposta alla massima tensione sollecitante*

$\lambda_{GA} = [0,24mq/(K*A)]^{1/7}$ $\quad 0,75 \leq \lambda_{GA} \leq 1$

*A area della lastra soggetta a trazione , k è un coefficiente che ne definisce l'area efficace ; se le verifiche vengono effettuate ad una distanza dal bordo d < 5*s con s spessore della lastra* $\lambda_{GA} = 1$

Tabella 7.5. Valori indicativi del coefficiente k per la definizione dell'area efficace in lastre inflesse da carichi ortogonali al piano (relativi al parametro di Weibull $m = 7$).

Condizioni di vincolo	k
Lastra rettangolare vincolata in modo continuo su 4 bordi	0.145
Lastra rettangolare vincolata in modo continuo su 2 bordi	0.054
Lastra rettangolare incastrata in un bordo; carico distribuito uniformemente	0.013
Lastra rettangolare incastrata in un bordo; carico distribuito su una linea parallela al bordo incastrato	0.019
Lastra rettangolare vincolata su 4 punti in prossimità degli angoli; carico uniformemente distribuito	0.071

λ_{GL} fattore di scala per sollecitazioni sul bordo *da applicarsi ad elementi con bordi specificatamente in trazione ; per d > 5s si assume* $\lambda_{GL} = 1$ ***;*** *per d<5s*

$\lambda_{GL} = [0,1667*0,45m/(K_b*L_b)]^{1/5} \leq 1$ *per bordi lucidati*

$\lambda_{GL} = [0,0741*0,45m/(K_b*L_b)]^{1/12.5} \leq 1$ *per bordi molati*

L_b *lunghezza totale del bordo sollecitato a trazione*

K_b dipende dalla distribuzione delle tensioni sul bordo

Tabella 7.6. Coefficienti k_b per il calcolo dell'effetto scala in prossimità del bordo.

Finitura del bordo	Distribuzione delle tensioni lungo il bordo		
	costante	parabolica	triangolare
Bordo greggio	$k_b = 1$	$k_b = 0.2434$	$k_b = 0.0741$
Bordo lucidato	$k_b = 1$	$k_b = 0.3694$	$k_b = 0.1667$

R_{Mv} fattore riduttivo che consente di passare dalla classe 1 alla classe 2.

Tabella 7.10. Fattori riduttivi R_M dei coefficienti parziali per verifiche in prima o seconda classe.

Classe	Vetro ricotto	Vetro presollecitato
prima	$R_M = 0.7$	$R_{M;v} = 0.9$
seconda	$R_M = 1$	$R_{M;v} = 1$

γ_{Mv} *coefficiente parziale riduttivo relativo all'incremento di resistenza a trazione per flessione dato dal trattamento di presollecitazione già visto in precedenza*

f_{bK} valore caratteristico della resistenza a trazione del vetro a seguito di un trattamento di rafforzamento

Tabella 7.7. Resistenza caratteristica a flessione del vetro a seguito di un trattamento di rafforzamento (da eseguirsi nel rispetto delle procedure indicate nel Capitolo 9).

Tipo di vetro	Valori della resistenza caratteristica a flessione $f_{b;k}$ per vetro presollecitato [MPa]		
	Vetro temperato termicamente (UNI EN 12150), vetro temperato termicamente e sottoposto a heat soak test (UNI EN 14179)	Vetro indurito termicamente (UNI EN 1863)	Vetro indurito chimicamente* (UNI EN 12337)
Vetro float o tirato	120	70	150
Vetro stampato	90	55	100
Vetro smaltato (float o tirato)	75	45	/
Vetro smaltato stampato	75	45	/
(*) Data la difficoltà del processo di tempera chimica, risulta di particolare importanza che il materiale venga controllato e qualificato.			

Per quanto concerne la deformata di progetto ovvero le deformazioni ammissibili in fase di esercizio valide non solo per le travi ma anche per le lastre di vetro ; la deformazione deve essere contenuta anche per strutture sollecitate da agenti atmosferici quali neve inoltre la verifica va eseguita oltre che in mezzeria ovvero al centro della lastra anche lungo i bordi per non danneggiare la sigillatura della vetrocamera 1/200d dove d è la distanza tra due appoggi consecutivi o la lunghezza del lato più corto e non deve eccedere i 12mm.

Tabella 7.11 Valori della freccia di progetto per vincolo lineare.

Vetro singolo (monolitico o stratificato)		Vetrata isolante		No. lati vincolati
Centro lastra	Bordo lastra	Centro lastra	Bordo lastra	
1/60 [(1)] di $L_{min;}$ < di 30 mm[(3)]		1/60 [(1)] di $L_{min;}$ < di 30 mm[(3)]	1/200 [(2)] di $L_{min;}$ < di 12 mm[(4)]	4
	1/100 [(2)] di $L_{inf;}$ < di 50 mm[(3)]		1/150 [(2)] di $L_{inf;}$ < di 50 mm[(3)]	3
	1/100 [(2)] di $L_{inf;}$ < di 50 mm[(3)]		1/150 [(2)] di $L_{inf;}$ < di 50 mm[(3)]	2

Se la trave o lastra di vetro è sollecitata da più carico la freccia va calcolata come sovrapposizione degli effetti

$w = \sum w_i$

Tabella 7.12 Valori della freccia di progetto per vincolo puntuale.

Vetro singolo (monolitico o stratificato)	Vetrata isolante	L_{inf} (3)
1/100 (1) dell' interasse dei punti di vincolo L_{inf} e < di 50 mm(2)	1/150 (1) dell' interasse dei punti di vincolo L_{inf} e < di 50 mm(2)	Figura 7.1-a
1/50 della lunghezza a sbalzo L_{inf} e < di 50 mm((2)	1/75 della lunghezza a sbalzo L_{inf} e < di 50 mm(2)	Figura 7.1-b
(1) bordo più deformabile della lastra; (2) da Cahier 3574_V2:2011; (3) L_{inf} è definito con riferimento alla Figura 7.1.		

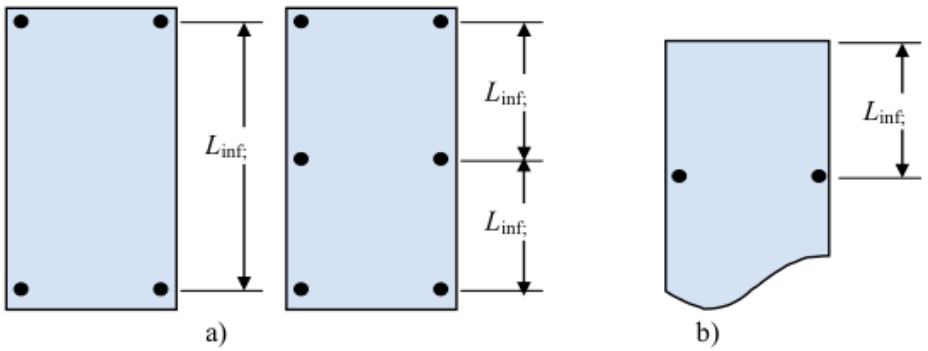


Figura 7.1. Vetrate con vincolo puntuale.

Tabella 7.13 Valori indicativi degli spostamenti massimi consentiti – Casi particolari.

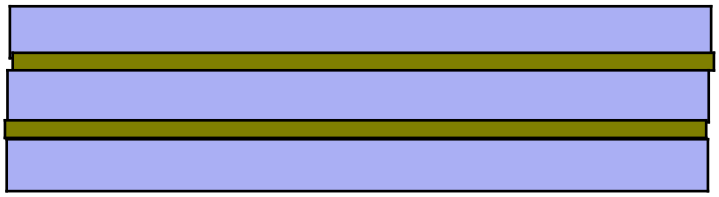
Tipo di vetro	Spostamento massimo su due appoggi consecutivi a distanza *d*	Massimo spostamento assoluto ammesso
Vetro singolo - solaio	*d* /500	5 mm
Vetro singolo – parapetto incastrato al piede(1)	*d* /50	25 mm(2)
(1) In questo caso *d* indica l'altezza del parapetto (2) da BS 6180:2011 §8.5.1		

Abbiamo visto la verifica a flessione e a svergolamento di un vetro monolitico , per ***vetro stratificato*** *volendo eseguire una normale verifica a flessione il momento di inerzia è pari a quello della sezione stratificata ovvero*

$I= I_1 + I_2 = b_1 * h^3/12 + b_2 * h^3/12 = b * h^3/12 \quad con\ b = b_1 + b_2$

non essendoci tensioni tangenziali e scorrimenti relativi;che sono dovuti esclusivamente a dissimmetrie di carico; per la verifica di instabilità flessotorsionale bisogna far riferimento ad uno spessore efficace poiché la inflessione laterale determina scorrimenti relativi e quindi delle tensioni tangenziali tra i due strati vetro e l'intercalare.

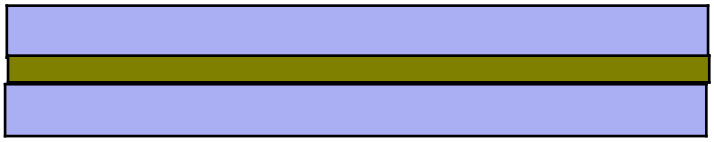
$Mcr = C_1 * \pi/L * \sqrt{(E * J_{eq} * G * I_{t,tot})}$



Se consideriamo tre lastre di vetro vi sono due comportamenti limite

- lastre indipendenti $J=J_1+J_2+J_3$
- lastra monolitica $J=J_1+J_2+J_3+A_1*d_1^2+A_2*d_2^2+A_3*d_3^2$

nella lastra monolitica vi è perfetta aderenza si trascura la rigidezza dell'intercalare . Se abbiamo due strati di spessore h_1 *ed* h_2



La rigidezza flessione diventa $EJ = E*(J_1+J_2) + E*\underline{A}*d^2$

$\underline{A}*d^2 = A_1*d_1^2 + A_2*d_2^2$ $\qquad d= d_1+ d_2 = (h_1 + h_2)/2+ h_{int}$

$\underline{A} = (A_1* A_2)/(A_1+A_2)$

la forza tangenziale trasmessa lungo l'interfaccia per unità di lunghezza

$H= \tau*b$

il vetro stratificato ha un comportamento intermedio tra quello monolitico e quello con lamine indipendenti per cui si introduce un coefficiente Γ *(coefficiente di trasferimento del taglio)*

$EJ = E*(J_1+J_2) + \Gamma*E*\underline{A}*d^2$

$\Gamma = 0$ *strati indipendenti;* $\Gamma = 1$ *comportamento monolitico ;*

Introducendo la quantità $I_S = \underline{d^2}*\underline{A}/b = d^2*(h_1*h_2)/(h_1+h_2) = d_1^2*h_1 + d_2^2*h_2$

$A_1= b*h_1$; $A_2= b*h_2$; $\underline{A} = (A_1* A_2)/(A_1+ A_2)$; $d= (h_1 + h_2)/2+ h_{int}$

il coefficiente di trasferimento del taglio è definito dalla formula

$\Gamma = 1/[1+9,6*E*I_S*h_{int}/(G_{int}*d^2*L^2)] = 1/[1+9,6*E*\underline{A}*h_{int}/(G_{int}*b*L^2)]$

dove

L lunghezza della trave

b larghezza della trave

lo spessore efficace per il calcolo della deflessione è definito dalla formula

$$h_{ef} = [h_1^3 + h_2^3 + 12*\Gamma_b*I_s]^{1/3}$$

$J_{eq} = b*h_{ef}^3/12$;

il valore del coefficiente di trasferimento del taglio in condizioni di instabilità

$\Gamma_b = 1/[1+\pi^2 *\beta*E*I_S*h_{int}/(G_{int}*d^2*\xi^2)]$

h_{int} *spessore intercalare*

G_{int} *modulo di elasticità tangenziale intercalare*

per instabilità $\beta=1$; $\xi= 1$

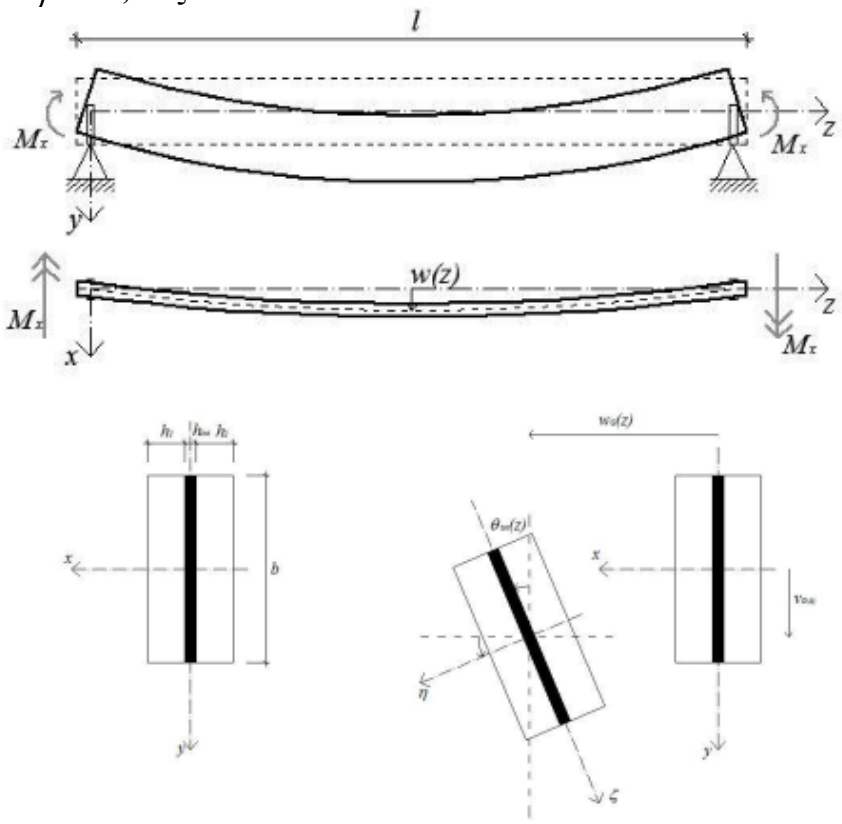


Figura 6.23. Deformazione flesso-torsionale di una trave di vetro stratificato.

$$\boldsymbol{Mcr = C_1 *\pi/L*\sqrt{(E*J_{eq}*G*I_{t,tot})}}$$

$I_{t,tot}$ *momento di inerzia torsionale della sezione* $= J_1 + J_2 + J_{int}$

$J_1 = b*h_1^3/3$; $J_2 = b*h_2^3/3$; $J_{int} = 4*d^2*\underline{A}*\{1-[tgh(\lambda*b/2))/(\lambda*b/2)]\}$

h spessore , b altezza dello strato

$\lambda=[G_{int} *(h_1 +h_2)/(G*h_1*h_2*h_{int})]^{1/2}$ *il pedice int è riferito all'intercalare*

*Per elementi in vetro sollecitati a **compressione o pressoflessione** la verifica di instabilità per vetro monolitico*

*per **compressione semplice*** $N_{Ed} \leq N_{bRd}$ $\quad N_{Ed}/A \leq N_{bRd}/A$

*per **pressoflessione***

$N_{Ed}/(\chi * A * f_{Gd}) + N_{Ed} * e_0/(W * f_{Gd}) * 1/(1 - N_{Ed}/N_{cr}) \leq 1$

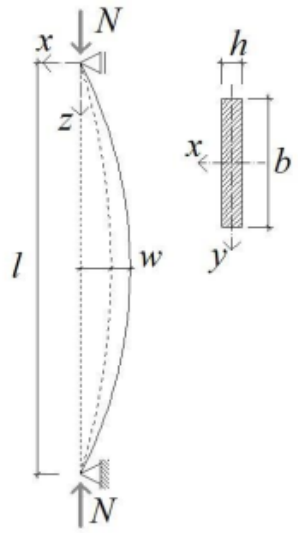
il carico critico $N_{cr} = \pi^2 * EJ/L_0^2$

$N_{bRd} = \chi * A * f_{Gd}$; L_0 *lunghezza libera di inflessione*

A area della sezione trasversale dell'elemento

χ *fattore di riduzione* $\chi_{L,T} = 1/[\Phi + \sqrt{(\Phi - \underline{\lambda}^2)}]$; $\Phi = 0{,}5 * [1 + \underline{\alpha} * (\underline{\lambda} - \alpha_0) + \underline{\lambda}^2]$

$\underline{\alpha} = 0{,}71$; $\alpha_0 = 0{,}6$; $\quad \underline{\lambda} = [A * f_{G,k,st}/N_{cr}]^{1/2}$



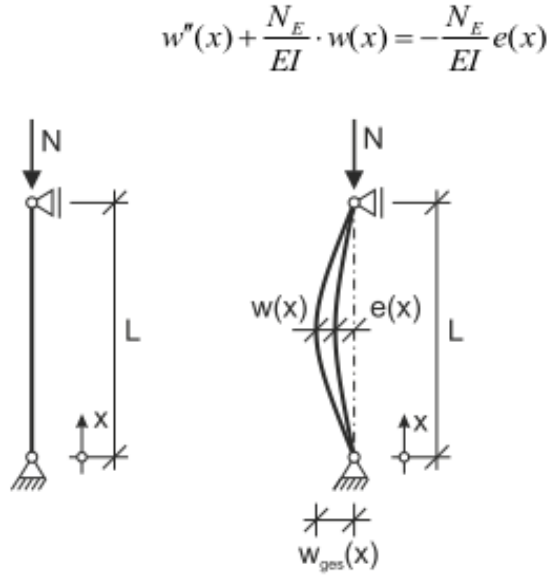


Figura 6.21. Asta di vetro caricata di punta.

se la colonna è in vetro è sollecitata da due momenti flettenti nelle due direzioni

$N_{Ed}/(\chi * A * f_{Gd}) + N_{Ed} * e_{0X}/(W_x * f_{Gd}) * 1/(1 - N_{Ed}/N_{cr}) + N_{Ed} * e_{0Y}/(W_y * f_{Gd}) * 1/(1 - N_{Ed}/N_{cr})$

≤ 1 ;

*per **vetro stratificato** il carico critico è dato da :*

$N_{cr} = \pi^2 * EJ_{eq}/L_0^2$; $J_{eq} = b * h_{eff}^3/12$; $\quad h_{ef} = [h_1^3 + h_2^3 + 12 * \Gamma_b * I_s]^{1/3}$

$\Gamma_b = 1/[1 + \pi^2 * \beta * E * I_S * h_{int}/(G_{int} * d^2 * \xi^2)]$; *per instabilità* $\beta = 1$; $\xi = 1$

per vetrocamera

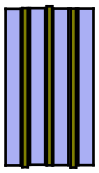
abbiamo a che fare con 2 vetri monolitici a comportamento indipendente ciascuno sollecitato a carico di punta da uno sforzo normale ripartito in funzione delle aree:

$N_i = N*A_i/A$; $A = \sum A_i$;

la verifica di instabilità viene ricondotta a quella di una singola lastra.

Esempio: Trave appoggiata

La trave ha una luce di 4 m è composta da quattro lastre dello spessore di 12 mm intercalate da SCG avente spessore di 0,8 mm , con un altezza di 350 mm ; per la verifica a flessione la trave può essere considerata composta da 4 lastre monolitiche ovvero una sezione omogenea prescindendo dall'intercalare 48x350 mm .
Il modulo di resistenza $W = 4,8*35^2/6 = 980$ *cmc*
Il momento di inerzia $I = 4,8*35^3/12 = 17150$ cm^4
Il peso specifico del vetro $\gamma_V = 2500$ *daN/mc ;*
Il peso specifico dell'intercalare $\gamma_{int} = 1050$ *daN/mc ;*



G peso a metro lineare 42,88 daN/ml ≈ 43 daN/ml

La vita nominale della struttura ovvero la durata del progetto è circa 50 anni , la temperatura di riferimento è circa 50°; La trave fa parte di un solaio di copertura in vetro piano per il quale vi è un carico da neve di circa 260 daN/mq

Carico permanente $G_{SK} = (2500*3*0,012 + 1050*2*0,0008) = 91,68$ *daN/ml*
Le travi sono poste ad interasse di 100 cm , al di spora vi è una lastra di vetro stratificato composta da 3 strati ciascuno dello spessore di 12 mm e 2 intercalari da 0,8 mm

Carico accidentale $Q_K = 260$ *daN/mq*

Per la verifica allo SLU

$Q = 1,3*G + 1,5*(G_{SK} + Q_K)$; $M = Q*L^2/8 = 1168$ *daN*m ;* $\sigma = M/W = 119$ *daN/cmq*

Per la verifica della deflessione allo ***stato limite di esercizio SLE***

Solo carico permanenti

$\delta = 5/384*(0,43+0,92)*400^4 /(E*17150) = 0,37$ *mm*

Considerando anche il carico da neve

$\delta = 5/384*(0,43+0,92+2,6)*400^4 /(E*17150) = 1,09$ *mm* $< 1,60$ *cm*

$E = 700000$ *daN/cmq*

per quanto concerne la resistenza di progetto a trazione f_{gd},

$f_{G,d} = (K_{mod} * K_{ed} * K_{sf} * \lambda_{GA} * \lambda_{GL} * f_{G,K})/(R_M * \gamma_M) + [K_v * K'_{ed} * (f_{bK} - f_{g,K})]/(R_M v * \gamma_M v)$

$K_{mod} = 0,42$ *per neve una settimana ;*

$K_{ed} = 0,8$ *per verifiche in prossimità del bordo della lastra ;*

$K_{sf} = 1$ *coefficiente per il profilo superficiale del vetro senza trattamenti ;*

$f_{G,K} = 450$ *daN/cmq resistenza caratteristica nominale del vetro float ;*

$R_M = 1$ *fattore riduttivo del coefficiente parziale ;*

$\gamma_M = 2,50$ *coefficiente parziale;*

$K'_{ed} = 0,8$ *coefficiente per le verifiche in prossimità del bordo della lastra ;*

$K_v = 1$ *coefficiente per lastre con trattamento termico in orizzontale ;*

$f_{bK} = 700$ *daN/cmq resistenza caratteristica nominale del vetro indurito*

$R_M v = 1$ *fattore riduttivo del coefficiente parziale*

$\gamma_M v = 1,35$ *coefficiente parziale per vetro presollecitato*

λ_{GA} ***fattore di scala*** *che considera l'area sottoposta alla massima tensione sollecitante* $\lambda_{GA} = [0,24mq/(K*A)] = 2,07$ $0,75 \leq \lambda_{GA} \leq 1$ $\lambda_{GA} = 1$

$K = 0,0075$ $A = L*0,048 = 4*0,048 = 0,192$

$\lambda_{GL} = [0,0741*0,45m/(K_b*L_b)]^{1/12.5} \leq 1$ *fattore di scala per le sollecitazioni sul bordo*

$K_b = 0,234$; $L_b = 4$ *m* $\lambda_{GL} = 0,765$

La resistenza di progetto per il carico da neve $f_{G,d}$ *=194 daN/cmq*

La resistenza di progetto per il carico permanente $f_{G,d}$ *=176 daN/cmq*

La deflessione di progetto per carico da neve L/250 = 1,6 cm

La deflessione di progetto per carico permanente

SLU

$\sigma = M/W = 119$ *daN/cmq* < 194 *daN/cmq*

La verifica più gravosa è quella allo stato limite di collasso ***SLC*** *che presuppone la rottura di una lastra di uno strato di vetro riducendo la sezione a 36 mm*

$W = 3,6*35^2/6 = 714$ *cmc ;* $I = 3,6*35^3/12 = 12862$ cm^4

$M = Q*L^2/8 = 1168$ *daN*m ;* $\sigma = M/W = 163$ *daN/cmq* < 194 *daN/cmq*

per la deflessione

$\delta = 5/384*(0,43+0,92)*400^4 /(E*12862) = 0,5$ *mm carico permanente*

$\delta = 5/384*(0,43+0,92+2,6)*400^4 /(E*12862) = 1,45$ *mm* $< 1,60$ *cm*

La trave è sottile va eseguita una verifica alla instabilità flessotorsionale ma facendo parte di un solaio e quindi vi è una lastra di vetro stratificato superiore alla quale è collegata lo sbandamento laterale è impedito , per cui non si hanno problemi di svergolamento.

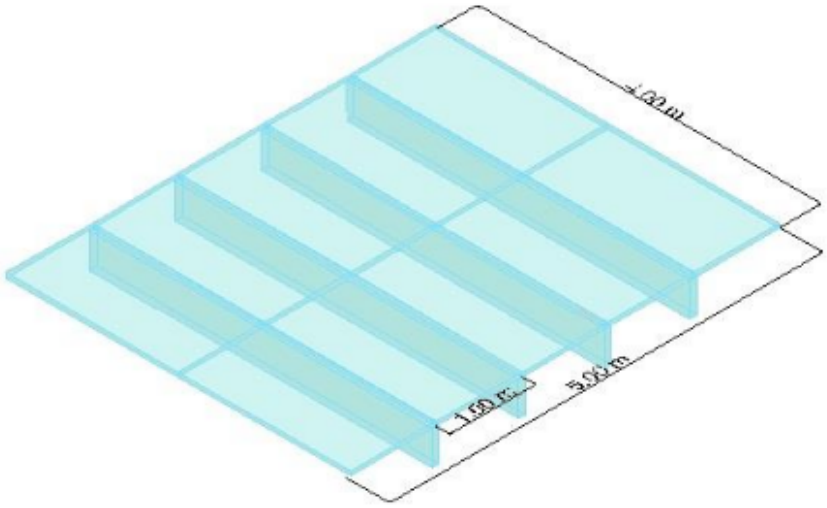
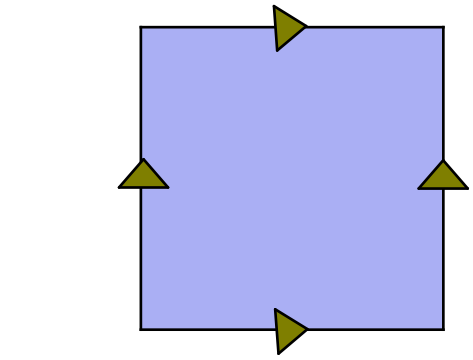
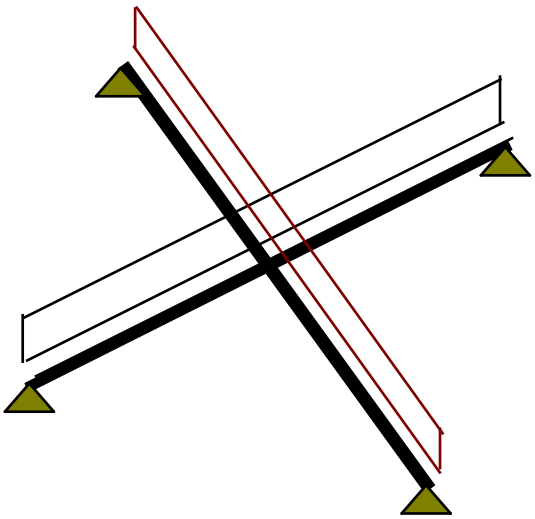


Figura 8.51. Impalcato con travi e solaio di vetro.

4- Verifica e calcolo di una piastra- lastra in vetro

La verifica di una piastra sollecitata da un carico verticale vincolata lungo i bordi per vetro monolitico discende dalla tecnica delle costruzioni





per una piastra quadrata di lato L caricata con un carico Q uniformemente distribuito le max sollecitazioni flettenti e taglianti calcolate con il metodo di Grashof

$M = Q*L^2/16$; $V = Q*L/4$; la deflessione $\delta = 5/384*Q*L^4/(2*D)$

La rigidezza flessionale della piastra $D = E*h^3/[12*(1-v^2)]$

se la piastra è rettangolare di lati L_X ed L_Y

$Q = Q_X + Q_Y$; $D = D_X = D_Y$ $D_X = E*I_X/(1-v^2)$; $D_Y = E*I_Y/(1-v^2)$;

le aliquote del carico Q nelle due direzioni vanno calcolate eguagliando l'abbassamento verticale in mezzeria

$5/384*Q_X*L_X^4/D_X = 5/384*Q_Y*L_Y^4/D_Y$; $Q_X*L_X^4 = Q_Y*L_Y^4$

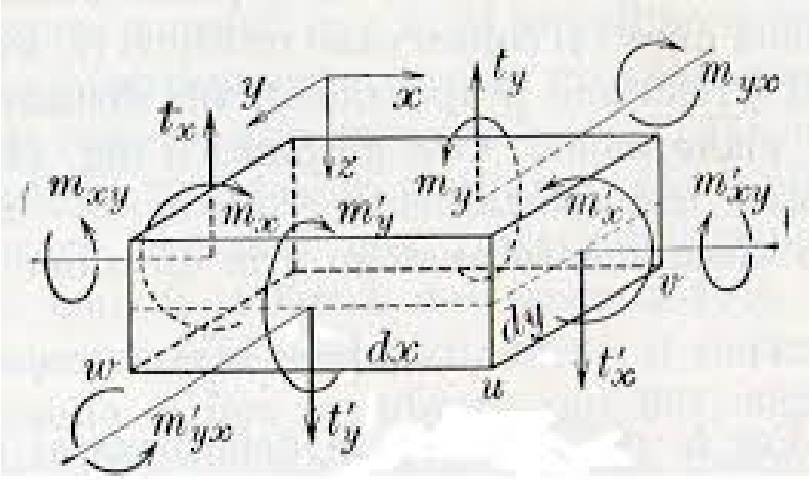
$Q_X = Q_Y * L_Y^4 / L_X^4$; $Q_Y = Q - Q_Y * L_Y^4 / L_X^4$;

$Q_Y = Q * 1/(1+L_Y^4/L_X^4)$; $Q_X = Q * L_Y^4/L_X^4/((1+L_Y^4/L_X^4)$

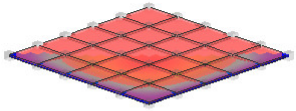
l'equazione della linea elastica di una piastra funzione di X e Y

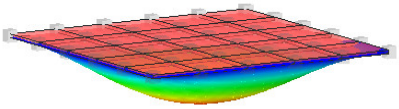
$D*[d^4W/dx^4+2*d^4W/dx^2dy^2+d^4W/dy^4] = Q(x,y)$

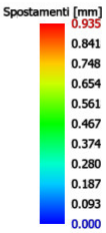
le sollecitazioni nell'elemento piano:

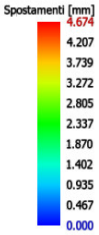


volendo modellare agli elementi finiti una piastra di vetro monolitico avente spessore 3 cm









una piastra di lato 2,5 metri appoggiata ai bordi sollecitata da un sovraccarico di 260 daN/mq ; Le dimensioni dei pannelli di coperture per strutture reticolari vanno adeguatamente ridotte per contenere la deformabilità e le sollecitazioni utilizzando elementi plate 100x100cm ; 150x150cm

*Consideriamo adesso una piastra di **vetro stratificato** con intercalare e determiniamo lo spessore equivalente per travi e piastre; viene definito un momento di inerzia equivalente dato dalla media armonica del momento di inerzia della sezione monolitica di uguale spessore ed il momento di inerzia delle sezioni di vetro indipendenti*



il momento di inerzia della sezione monolitica

$J_{full} = b*h_1^3/12 + b*h_2^3/12 + b*h_3^3/12 + \sum b*h_i*d_i^2$

$J_{Abs} = b*h_1^3/12 + b*h_2^3/12 + b*h_3^3/12$;

il momento di inerzia equivalente J_{eq}

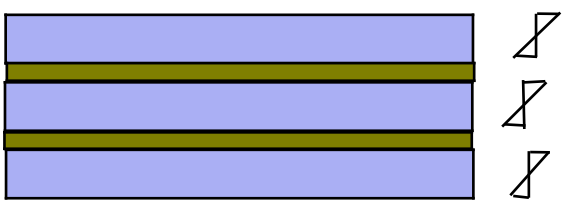
$1/J_{eq} = \eta_{1D}/J_{full} + (1-\eta_{1D})/J_{Abs}$ *)

dove η_{1D} *è un coefficiente adimensionale che dipende dalla geometria della trave , dalle condizioni di carico e di vincolo e dalle caratteristiche meccaniche di vetro e intercalare. Il valore di questo coefficiente varia tra zero e 1 . Lo spessore equivalente*

$J_{eq} = b*h_{eq}^3/12$ *lo possiamo ricavare dalla (*) funzione della radice cubica*

spessore equivalente per il calcolo delle deformazioni
$h_{eq} = \{1/[\eta/(\sum h_i^3 + \sum h_i*d_i^2) + (1-\eta)/\sum h_i^3]\}^{1/3}$
spessore equivalente per il calcolo delle tensioni

$\sigma_{max} = N/A \pm M/I * h_i/2$;
lo spessore efficace per il calcolo delle tensioni nella lastra i-ma lo si ottiene dalla radice quadrata
$h_{i\sigma} = \{1/[2\eta * |d_i| /(\sum h_i^3 + \sum h_i*d_i^2) + h_i/h_w^3]\}^{1/2}$



Metodo EET per multilaminati

il coefficiente di trasporto del taglio per 3 strati

$\eta_{1D3}=1/\{1+E*\Psi*(\sum h_i^3*\sum h_i*d_i^2)/[G_{int}*(\sum h_i^3+12*\sum h_i*d_i^2)*$

$[(d_1^2+d_2^2)/h_{int1}+(d_2^2+d_3^2)/h_{int2}\,]]$

la sommatoria è estesa da 1 a 3 , per un numero n di strati tutti dello stesso spessore h e da intercalari aventi tutti il medesimo spessore

$1/J_{eq} = \eta_{1D}/J_{full} + (1-\eta_{1D})/J_{Abs}$

$J_{full} = N*b/12*[h^3 + h*(h+h_{int})^2*(N-1)*(N+1)]$

$\eta_{1DN}=1/\{1+ E*h_{int}/(12*G_{int})*N*h^3*(N+1)*\Psi/[h^2+(h+h_{int})^2*(N^2-1)]\}$

Il metodo EET per la piastre con rigidezza D *composte da 2 strati con intercalare*

per vetro a strati indipendenti $D_{abs} =E*h_1^3/[12*(1-\upsilon^2)]+ E*h_2/[12*(1-\upsilon^2)]$

per piastra monolitica

$D_{full} =E*h_1^3/[12*(1-\upsilon^2)]+ E*h_2/[12*(1-\upsilon^2)]+ E/(1-\upsilon^2)*d^2*h_1*h_2/(h_1+h_2)$

$1/D_{eq} = \eta_{2D}/D_{full} + (1-\eta_{2D})/D_{Abs}$;
$\eta_{2D} = 1/\{1+h_{int}*E/[G_{int}*(1-\upsilon^2)]*D_{Abs}/D_{full}*h_1*h_2/(h_1+h_2)*\Psi]\}$

Ψ coefficiente adimensionale che dipende dalle condizioni di carico e vincolo riportato in una tabella allegata alle istruzioni CNR DT 210/2013
La rigidezza equivalente va utilizzata nelle modellazioni strutturali per il calcolo delle deformazioni ; per lo stato tensionale nelle piastre si utilizzano formule differenti

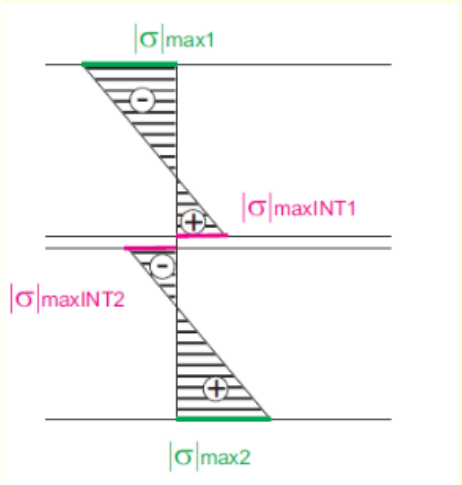


Figura 6.16. Tipico diagramma delle tensioni in un vetro stratificato.

$\sigma_{max} = N/A \pm M/I^* h_i/2$;

lo spessore per il calcolo delle max tensioni di interfaccia

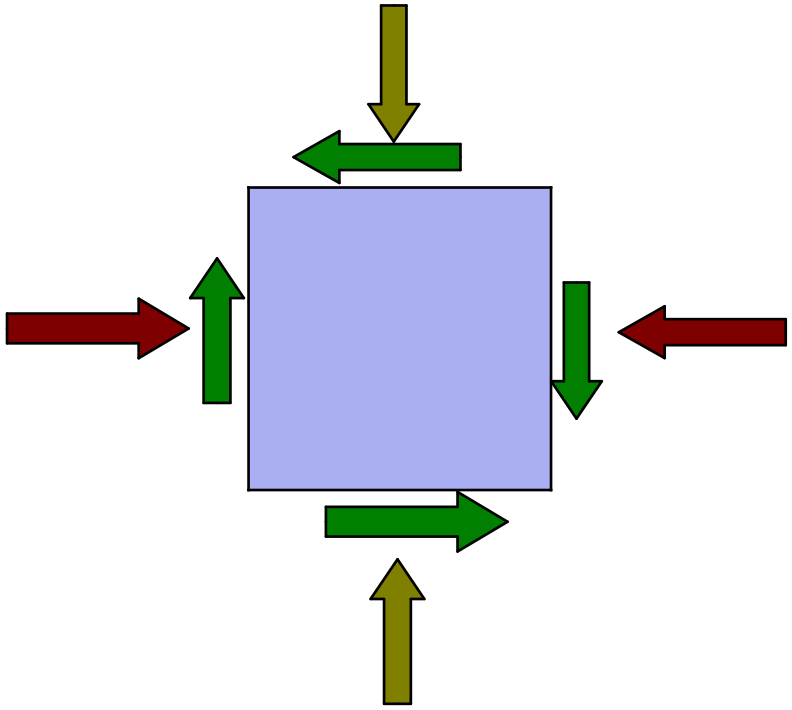
$h_{int1\sigma} = \{1/[2\eta^* h_{s1} /(h_1^3 + h_2^3 + 12^* I_s) - h_1 /h_w^3]\}^{1/2}$

$h_{int2\sigma} = \{1/[2\eta^* h_{s2} /(h_1^3 + h_2^3 + 12^* I_s) - h_2 /h_w^3]\}^{1/2}$

Calcolo di una lastra in vetro

La lastra è sollecitata esclusivamente da azioni membranali quali sforzo normali e tangenziali , se ottenuta dalla sovrapposizione di più strati di vetro la possiamo considerare come un elemento monolitico il cui spessore trascurando gli intercalari

$h_{eq} = \sum h_i$;



Gli sforzi membranali N_{XX} ; N_{YY} ;N_{XY} ; *per uno stato tensionale piano le tensioni principali di trazione e compressione*

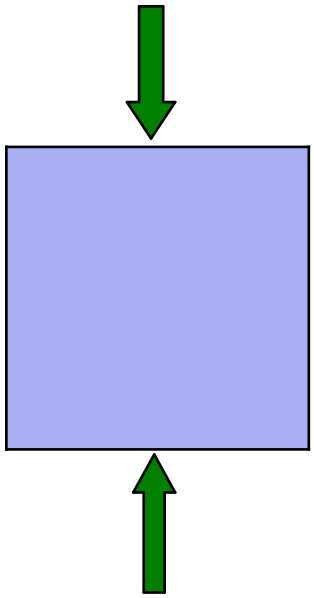
$N_\xi = (N_{XX} + N_{YY})/2 + [(N_{XX}-N_{YY})^2/4 + N_{XY}^2]^{1/2}$

$N_\eta = (N_{XX} + N_{YY})/2 - [(N_{XX}-N_{YY})^2/4 + N_{XY}^2]^{1/2}$

*La verifica a trazione è immediata , suddividendo gli sforzi per l'area A = b*h*
h spessore della lastra monolitica , b lato del pannello quadrato

$\sigma_t \leq f_{Gd}$;

per le lastre in vetro si pone il problema della ***verifica di instabilità.*** *Se consideriamo una lastra di vetro monolitico sollecitata a compressione da uno sforzo normale N*



Nella ipotesi :

- *la configurazione indeformata del pannello sia piana*
- *gli spostamenti nel piano x,y lungo i bordi siano trascurabili*
- *le deformazioni per taglio nel pannello possono essere trascurate*

il carico critico euleriano $Ncr = K\sigma * \pi^2 * D/b^2$

$D = E*h^3/[12*(1-v^2)]$ *rigidezza flessionale per unità di lunghezza*
b altezza del pannello
a larghezza del pannello

$K\sigma=[m*b/a+a/(m*b)]^2$

m numero di semionde in direzione verticale in modo che il carico critico risulti minimo di solito m = 1

la verifica di instabilità richiede che venga rispettata la condizione

$\alpha^* = 0,49$ *ed il fattore di imperfezione* $\alpha_0 = 0,80$;

$N_{ED} \leq N_{bRd}$; *con* $N_{bRd} = \chi * A * f_{gd}$

χ *fattore di riduzione* $\chi_{L,T} = 1/[\Phi + \sqrt{(\Phi - \underline{\lambda}^2)}]$; $\Phi = 0{,}5*[1+\underline{\alpha}*(\underline{\lambda}-\alpha_0) + \underline{\lambda}^2]$

$\underline{\alpha} = 0{,}49$; $\alpha_0 = 0{,}8$; $\underline{\lambda} = [A*f_{G,k,st}/N_{cr}]^{1/2}$

Figura 6.25.

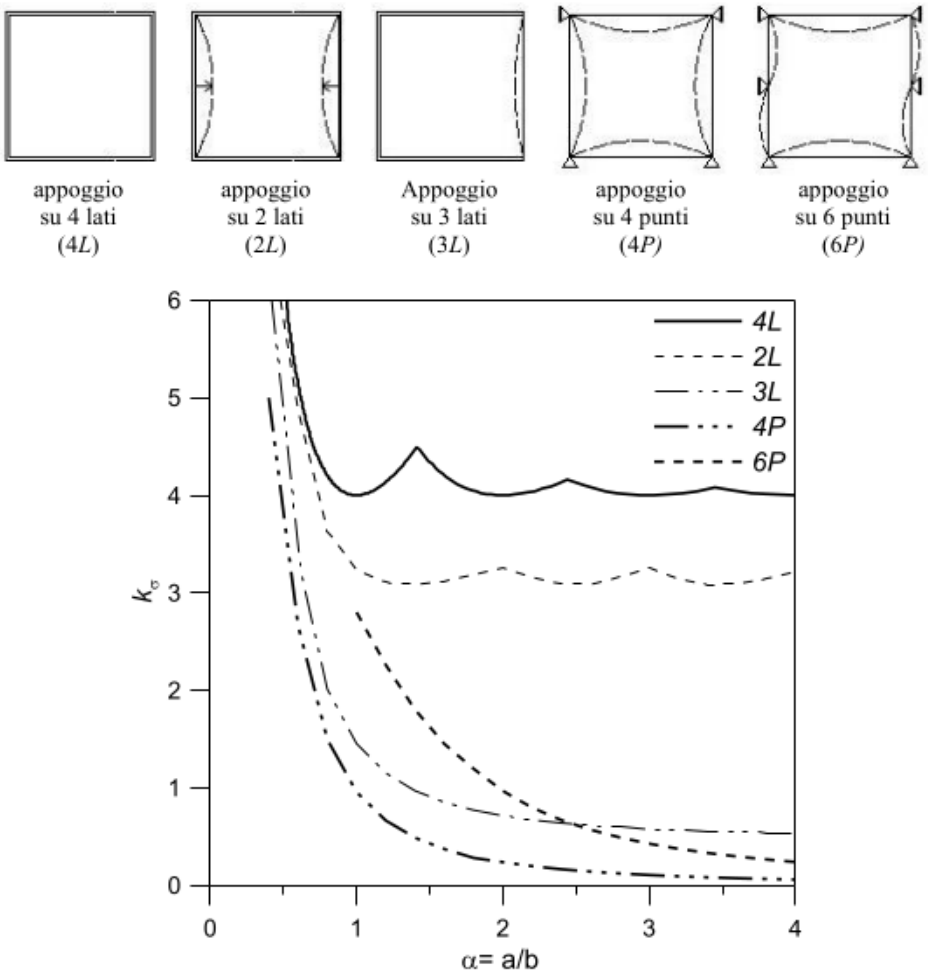


Figura 6.25. Coefficienti k_σ per pannelli compressi nel piano in diverse condizioni di appoggio.

Per vetro stratificato composto da 2 strati di spessore h_1 *ed* h_2

lo spessore efficace per il calcolo della deflessione è definito dalla formula

$$h_{ef} = [h_1^3 + h_2^3 + 12*\Gamma_b*I_s]^{1/3}$$

$D = E*h_{ef}^3/[12*(1-\nu^2)]$

il valore del coefficiente di trasferimento del taglio in condizioni di instabilità

$\Gamma_b = 1/[1+\pi^2 *\beta*E*I_S*h_{int}/(G_{int}*d^2*\xi^2)]$

il parametro β *è definito dalla seguente formula*

$\beta = (1{,}06/\lambda^2 + 1{,}06)$; ξ *valore minimo tra a e b dimensioni del pannello*

$\lambda = a/b > 1$ *fattore di forma del pannello*

la verifica

$N_{ED} \leq N_{bRd}$; *con* $N_{bRd} = \chi * A * f_{gd}$ *con* $A = b*(h_1+h_2)$

la verifica di instabilità per vetro camera *va eseguita su ogni lastra monolitica alla quale compete uno sforzo di compressione* $N_i = N*A_i/\sum A_i$

Se la lastra è sollecitata da sforzi tangenziali si può avere una ***instabilità per taglio***

$N_{XY} = \tau_{XY} * h = V_{ED}$; *deve essere* $V_{ED} \leq V_{BrD}$;*taglio critico nel pannello*

$V_{BrD} = \chi * A * \tau_{gd}$;

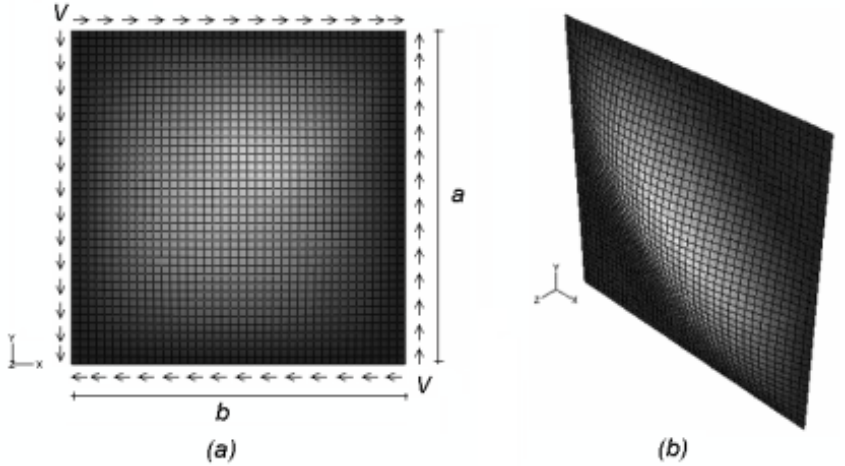


Figura 6.26. Pannello appoggiato lungo i bordi sottoposto a taglio nel piano.

per la verifica di instabilità in regime di taglio puro la resistenza tangenziale a taglio coincide con la resistenza a trazione del vetro

$\tau_{gd} = f_{gd}$; $\chi_{L,T} = 1/[\Phi + \sqrt{(\Phi - \underline{\lambda}^2)}]$; $\Phi = 0{,}5*[1+\underline{\alpha}*(\underline{\lambda}-\alpha_0) + \underline{\lambda}^2]$

$\alpha^* = 0{,}49$; $\alpha_0 = 0{,}50$; $A = b*h$;

$\lambda = \sqrt{[(A*\tau_{gk,st})/V_{cr}]}$; *il taglio critico* $V_{cr} = \pi^2 * D * K_t / b^2$

K_t $\quad 4{,}00 + 5{,}34/(a/b)^2$ *per* $a/b < 1$

$\quad 5{,}34 + 4{,}00/(a/b)^2$ *per* $a/b \geq 1$

per lastra di vetro stratificato composto da due lastre monolitiche di dimensioni a x b e spessori h_1 ed h_2 la ***verifica di instabilità a taglio*** *può essere eseguita in accordo con la teoria dello spessore equivalente*
lo spessore efficace per il calcolo della deflessione è definito dalla formula

$$h_{ef} = [h_1^3 + h_2^3 + 12*\Gamma_b*I_s]^{1/3}$$

$$D= E*h_{ef}^3/[12*(1-\nu^2)]$$

il valore del coefficiente di trasferimento del taglio in condizioni di instabilità

$$\Gamma_b = 1/[1+\pi^2 *\beta*E*I_S*h_{int}/(G_{int}*d^2*\xi^2)]$$

il parametro β è definito dalla seguente formula

$\beta= (5,25/\lambda^2+7,32)$; ξ *valore minimo tra a e b dimensioni del pannello*

$\lambda = a/b > 1$ *fattore di forma del pannello*

il carico critico a taglio può essere calcolato

$$V_{cr} =\pi^2* D*K_t/b^2 ; \quad D = E*h_{ef}^3/[12*(1-\upsilon^2)]$$

l'area A deve tener conto delle sole lastre di vetro senza intercalari

$A = b*(h_1+h_2)$ *sia per il calcolo della snellezza normalizzata* λ *che per il calcolo del taglio resistente* V_{bRd} ;

Per il ***vetrocamera*** *la verifica di instabilità va condotta su ogni singola lastra .*

Esempio applicativo : verifica di una piastra di vetro

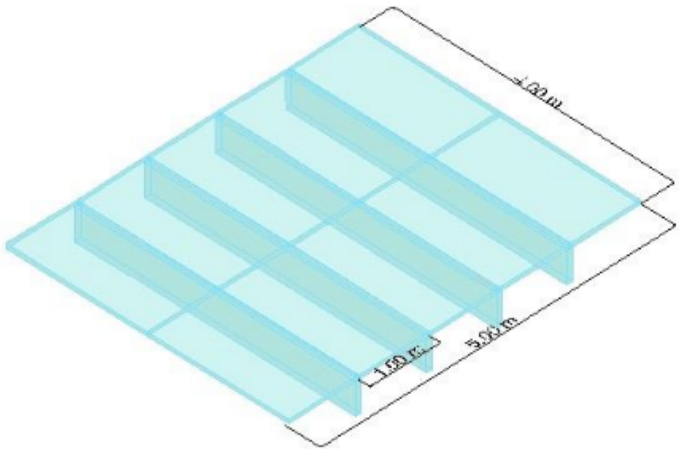
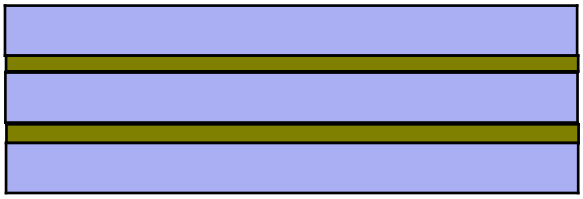


Figura 8.51. Impalcato con travi e solaio di vetro.

Calcoliamo le lastre di solaio appoggiate alle travi lungo i lati lunghi eventi dimensioni 100x200 cm sollecitate dal peso proprio, dal carico da neve e da un carico concentrato ripartito su una impronta quadrata di lato 5 cm ; la lastra è stratificata con 3 strati aventi lo stesso spessore ed intercalari in SCG .

Spessore dello strato 13 mm
Spessore intercalare 0,8 mm



Peso proprio $G_K=3*2500*0,013+2*0,0008*1050 =99,18$ *daN/mq≈100 daN/mq*

Carico da neve $Q_K = 260$ *daN/mq*

Carico concentrato $F_K =200$ *daN su una impronta 5x5 cm*

La lastra è praticamente appoggiata sulla luce corta di 1m , prima di una modellazione FEM si possono stimare le sollecitazioni flessionali e taglianti per lo SLU :

$M = Q*L^2/8 =65$ *daN*m* $\quad V = Q*L/2 = 260$ *daN*

$Q = 1,3*100+1,5*260 = 520$ *daN/ml*

per carico concentrato

$M = 1,3* G*L^2/8 + 1,5*F*L/4 = 91,25$ *daN*m ;* $V =Q*L/2 +F/2= 165$ *daN*

per il calcolo dello stato tensionale dobbiamo considerare lo spessore equivalente determinato per vetro stratificato

$1/J_{eq} = \eta_{1D} /J_{full} + (1-\eta_{1D})/J_{Abs}$

$J_{full} = N*b/12*[h^3 + h*(h+h_{int})^2*(N-1)*(N+1)]$

$\eta_{1DN}=1/\{1+ E*h_{int}/(12*G_{int})*N*h^3*(N+1)*\Psi/[h^2+(h+h_{int})^2*(N^2-1)]\}$

lo spessore efficace per le deformazioni

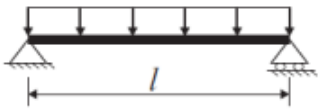
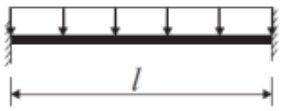
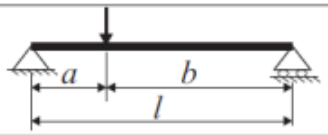
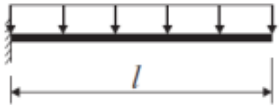
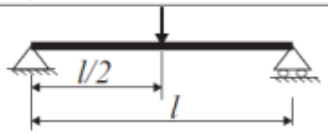
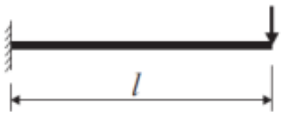
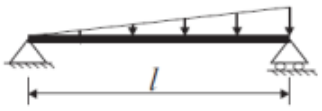
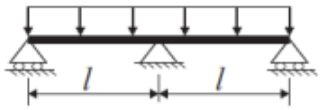
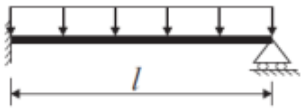
$h_{eq}= \{1/[\eta/(\sum h_i^3 +12*\sum h_i*d_i^2)+ (1-\eta)/\sum h_i^3]\}^{1/3}$

lo spessore efficace per le tensioni

$h_{i\sigma}= \{1/[2\eta*|d_i|/(\sum h_i^3 +12\sum h_i*d_i^2)+ h_i /h_w^3]\}^{1/2}$

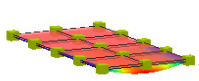
h = 1,3 cm
h_{int} *= 0,08 cm*
N = 3
E = 700000 daN/cmq
G_{int} *= 265 daN/cmq*
$\Psi = 168/(17*L^2) = 9{,}8824*10^{-6}$ */mmq L = 1000 mm*
di = distanza dello strato i-mo dal baricentro della lastra monolitica
$d_1 = d_3 = 13{,}8$ *mm ;* $d_2 = 0$

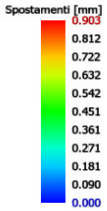
Tabella 6.3 Travi di vetro laminato: valori del coefficiente Ψ per differenti condizioni di carico e vincolo.

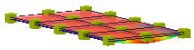
Condizioni di carico e di vincolo	Ψ	Condizioni di carico e di vincolo	Ψ
	$\frac{168}{17\,l^2}$		$\frac{42}{l^2}$
	$\frac{15}{l^2+2ab}$		$\frac{14}{5l^2}$
	$\frac{10}{l^2}$		$\frac{5}{2l^2}$
	$\frac{10}{l^2}$		$\frac{45}{14l^2}$
	$\frac{21}{l^2}$		$\frac{21}{l^2}$

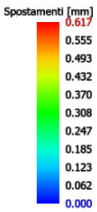
η_{1DN}*=0,973*
lo spessore efficace per il calcolo della deformazione
h_{eff} *= 22,96 mm per le deformazioni*
h_{eff} *= 25,98 mm per il calcolo delle tensioni esterna*
h_{eff} *= 30,51 mm per il calcolo delle tensioni interna*
Eseguiamo una modellazione FEM della nostra piastra avente lunghezza 2 metri appoggiata sul lato lungo per una luce di 1 m.

Le deformazioni per carico permanente e carico da neve per lastra di spessore 23 mm

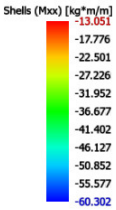


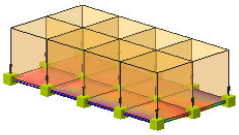


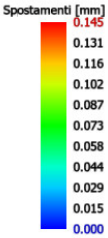












La max deflessione per combinazione quasi permanente con coefficienti parziali unitari è pari a 0,61 mm

*δ= 5/384*3.6*100^4/(700000*I)= 0.66 mm < 2 mm*

*I = 100*2.296^3/12= 100 cm^4*

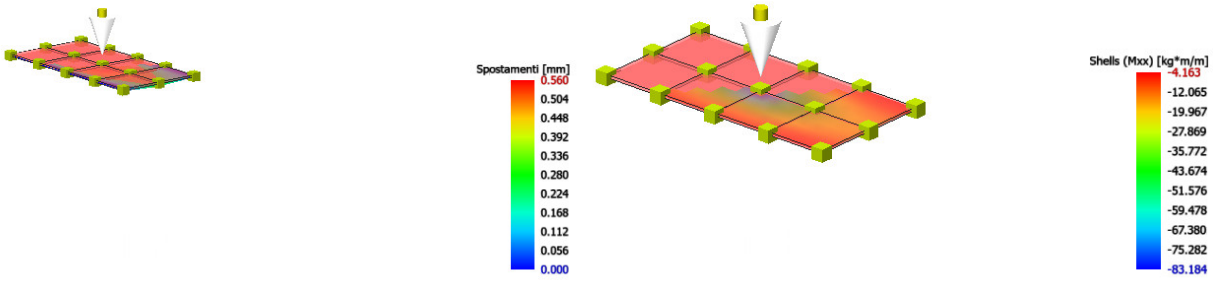
La max deflessione L/500 = 2mm

*Le tensioni **σ = M/W= 58 daN/cmq lastra esterna***

σ = M/W= 42 daN/cmq lastra interna

*W = 100*2,568^2/6 =112 cmc ; W = 100*3,051^2/6 =155 cmc ;*

*La modellazione FEM dà un momento di 60 < 65 daN*m come da modello a trave*
Per il carico concentrato determiniamo lo spessore efficace per le deformazioni e le tensioni per lo strato interno ed esterno e modelliamo una lastra monolitica appoggiata sui lati lunghi avente uno spessore di 21,4 mm caricata al centro con una forza verticale di 200 daN



il momento max circa 83 daN/m ; la max deflessione 0,56 mm < L/500 = 2mm

Il calcolo dello spessore efficace può essere ancora eseguito utilizzando per il coefficiente di trasferimento del taglio la formula

$\eta_{1DN}=1/\{1+ E*h_{int}/(G_{int})*N*h^3*(N+1)*\Psi/[h^2+(h+h_{int})^2*(N^2-1)]\} = 0,754$

spessore efficace per il calcolo delle deformazioni

$h_{eq}= \{1/[\eta/(\sum h_i^3 +12*\sum h_i*d_i^2)+ (1-\eta)/\sum h_i^3]\}^{1/3} = 21,35$ *mm*

$G_{int}= 26,5$ *N/mmq*

spessore efficace per il calcolo delle tensioni

lastra interna $h_{eq}=27,36$ *mm*

lastre esterne $h_{eq}= 24,61$ *mm*

Le tensioni sulle lastre esterne

$W_{est}= 100*2.461^2/6 =$ *101 cmc* $\quad \sigma = 8300/101= 82,17$ *daN/cmq*

La tensione sulla lastra interna

$W_{est}= 100*2.736^2/6 =$ *125 cmc* $\quad \sigma = 8300/125= 66,4$ *daN/cmq;*

Determiniamo la resistenza di progetto a trazione del vetro temprato ed indurito

$f_{G,d} =(K_{mod} * K_{ed} *K_{sf} *\lambda_{GA} *\lambda_{GL} *f_{G,K})/(R_M*\gamma_M) +[K_v * K'_{ed} *(f_{bK} - f_{g,K})]/(R_Mv*\gamma_Mv)$

$K_{mod} = 0,42$ *per neve una settimana ;* $K_{mod} = 0,50$ *per forza concentrata ;*

K_{ed} = 0,8 per verifiche in prossimità del bordo della lastra ;

K_{sf} = 1 coefficiente per il profilo superficiale del vetro senza trattamenti ;

$f_{G,K}$ = 450 daN/cmq resistenza caratteristica nominale del vetro float ;

R_M= 1 fattore riduttivo del coefficiente parziale ;

γ_M = 2,50 coefficiente parziale;

K'_{ed} = 0,8 coefficiente per le verifiche in prossimità del bordo della lastra ;

K_v = 1 coefficiente per lastre con trattamento termico in orizzontale ;

f_{bK} = 700 daN/cmq vetro indurito; 1200 daN/cmq per vetro temprato

$R_M v$ = 1 fattore riduttivo del coefficiente parziale

$\gamma_M v$ = 1,35 coefficiente parziale per vetro presollecitato

λ_{GA} ***fattore di scala*** *che considera l'area sottoposta alla massima tensione sollecitante*

λ_{GA} = [0,24mq/(K*A)] =1,12 $0,75 \leq \lambda_{GA} \leq 1$ $\lambda_{GA} = 1$

K = 0,0054 A =2 mq

λ_{GL} =1

Carico da neve

Resistenza a trazione vetro indurito f_{gd} = 208 daN/cmq

Resistenza a trazione vetro temprato f_{gd} = 504daN/cmq

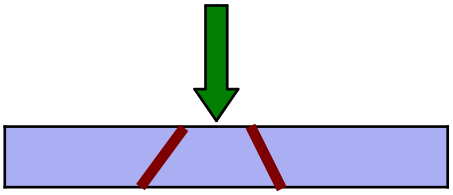
Carico concentrato

Resistenza a trazione vetro indurito f_{gd} = 220 daN/cmq

Resistenza a trazione vetro temprato f_{gd} = 516 daN/cmq

La deflessione di progetto L /500 = 1000/500= 2mm

Verifica a punzonamento *della lastra di vetro per carico concentrato*

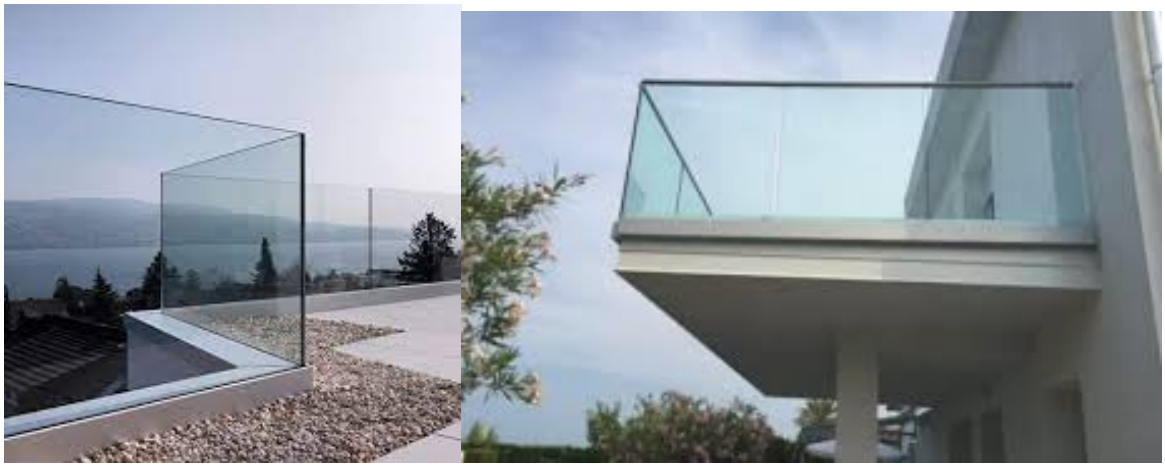


$F \leq Vrd = fgd * 4 * (5+h_{eq}) * h_{eq} = 13405\ daN \quad > 200\ daN$

la verifica appare superflua si è considerato lo spessore efficace per le deformazioni.

5- Il calcolo del parapetto in vetro

Le ringhiere in vetro sono gradevoli esteticamente conferiscono all'edificio un tocco di modernità , se poi integrate con elementi in legno aventi la funzione di protezione solare hanno una maggiore stabilità ed una funzione di protezione da un eventuale rischio di caduta trasmettendo a livello psicologico quel benessere mentale necessario per l'utilizzo del balcone o del terrazzo sia da parte degli adulti che dei bambini.



Calcoliamo un parapetto in vetro incastrato alla base composto da pannelli aventi dimensione 100cmx100cm come riportato in figura

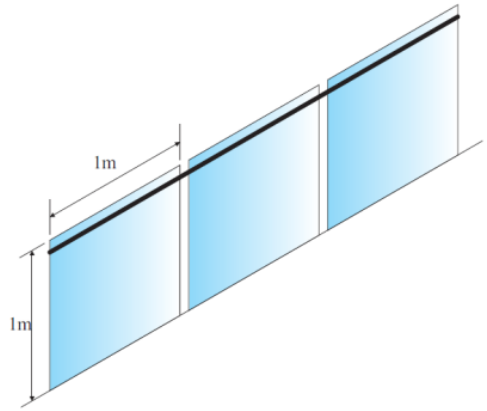


Figura 8.47. Rappresentazione schematica del parapetto oggetto di analisi.

Le azioni che sollecitano il parapetto sono orizzontali :

- azione del vento
-azione sismica (elemento non strutturale)
- forza orizzontale F applicata in sommità di 100 daN/m

Tali azioni non vanno combinate di conseguenza l'azione più gravosa è la forza orizzontale F che allo stato limite ultimo SLU

$M = 1,5*100 = 150\ daN*m$

la deflessione $\delta = F*L^3/(3*E*I)$

Il pannello è stratificato con due lastre ciascuna dello spessore di 9 mm con intercalare SCG di 0,76 mm;il coefficiente di trasmissione del taglio :

$\Gamma=1/[1+9,6*E*h_{int}*I_s/(G_{int}*L^2*d^2)]= 0,742$

$J_{abs}=J_1+J_2 =2*J = 121500\ mm^4$

$J_{full}=J_1+J_2 +A_1*d_1^2+A_2*d_2^2 =2*J+2*A*d^2 = 550159\ mm^4$

$A = 1000*9 = 9000\ mmq \quad d = 4,88\ mm \ ; \ J= 60750\ mm^4$

$\underline{A}=(A_1* A_2)/(A_1+A_2) =4500\ mmq \qquad \Psi=5/(2*L^2)$

Lo spessore equivalente per il calcolo delle deflessioni:

$h_{efw} = [h_1^3+h_2^3+ 12*\Gamma*I_s]^{1/3} = 17,40\ mm$

$I_s=h_1*d_1^2 + h_2*d_2^2 = 2*h* d^2= 428,65\ mmc$

lo spessore equivalente per il calcolo delle tensioni

$h_{ef} =[h_{efw}^3/(h+2*\Gamma*d]^{1/2} = 18\ mm$

La tensione $\sigma = M/W =15000/54 = 277\ daN/cmq$

$W = 100*1.8^2/6= 54\ cmc$

la deflessione

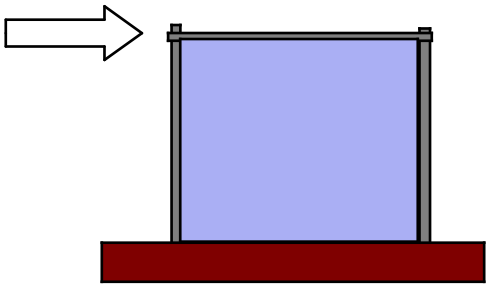
$\delta = 100*100^3/(3*700000*I)= 1.08\ cm > L/250 = 4\ mm$

$I = 100*1.74^3/12=43.9\ cm^4$

E' evidente che le ringhiere in vetro vanno integrate con elementi lignei che hanno la funzione di migliorare l'estetica dell'edificio e di conferire una maggiore stabilità al parapetto sia per quanto concerne le deformazioni che per la resistenza; di solito viene realizzato un corrimano che irrigidisce il parapetto.

6- Le vetrate : criteri di verifica

Le vetrate negli edifici sono sollecitate dalle azioni del vento fanno parte integrante della tamponatura di conseguenza rischiano di andare in frantumi in occasione di eventi sismici e vanno presi degli opportuni accorgimenti. La vetrata non deve interferire con la deformazione del telaio del nostro edificio da essa va opportunamente svincolata in modo che ad essa non vengano trasmesse sollecitazioni derivanti da azioni sismiche orizzontali.

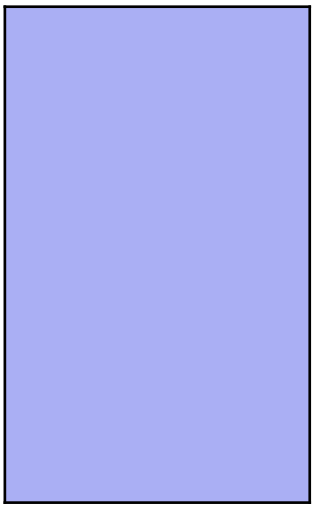


La deformata del telaio in acciaio o in legno è indipendente dalla deformata della lastra di vetro che non è collegata alla struttura gli spostamenti orizzontali sono consentiti senza sollecitare la vetrata. Una lastra di questo tipo è sollecitata da azioni sismiche fuori del piano e da azioni orizzontali del vento essendo appoggiata sui bordi.



Per volte reticolari in acciaio in alluminio e legno nelle quali sono inseriti dei pannelli in vetro è conveniente nella modellazione per aumentare la rigidezza della volta di inserire anche l'elemento plate-shell in vetro , la cui deformazione interagisce con quella delle aste cautelandoci nei confronti del carico critico globale e del sisma verticale.

*Verifichiamo una vetrata avente dimensioni 1500*2500 inserita in un telaio di PVC o metallico quindi appoggiata ai bordi al primo piano di un edificio praticamente la parete esterna di un edificio.*



E' sollecitata da un carico uniforme orizzontale corrispondente al max tra
- azione sismica per elementi non strutturali
- azione del vento

Consideriamo sulla vetrata una pressione statica di circa 130 daN/mq , la lastra si compone di due strati ciascuno dello spessore d 8 mm con intercalare in PVB di 0.76 mm per uno spessore complessivo di 16,76 mm ; il coefficiente di trasmissione del taglio

$\Gamma=1/[1+9,6*E*h_{int}*I_s/(G_{int}*L^2*d^2)]= 0,251$

$J_{abs}=J_1+J_2 =2*J = 128000\ mm^4$

G_{int}=0,44 N/mmq modulo di elasticità tangenziale intercalare PVB

$J_{full}=J_1+J_2 +A_1*d_1^2+A_2*d_2^2 =2*J+2*A*d^2 = 588425\ mm^4$

$A = 1500*8 = 12000\ mmq \quad d = 4,38\ mm \quad ; \quad J= 64000\ mm^4$

$\underline{A}=(A_1* A_2)/(A_1+A_2) =6000\ mmq \qquad \Psi=37,653*10^{-6}\ /mmq$

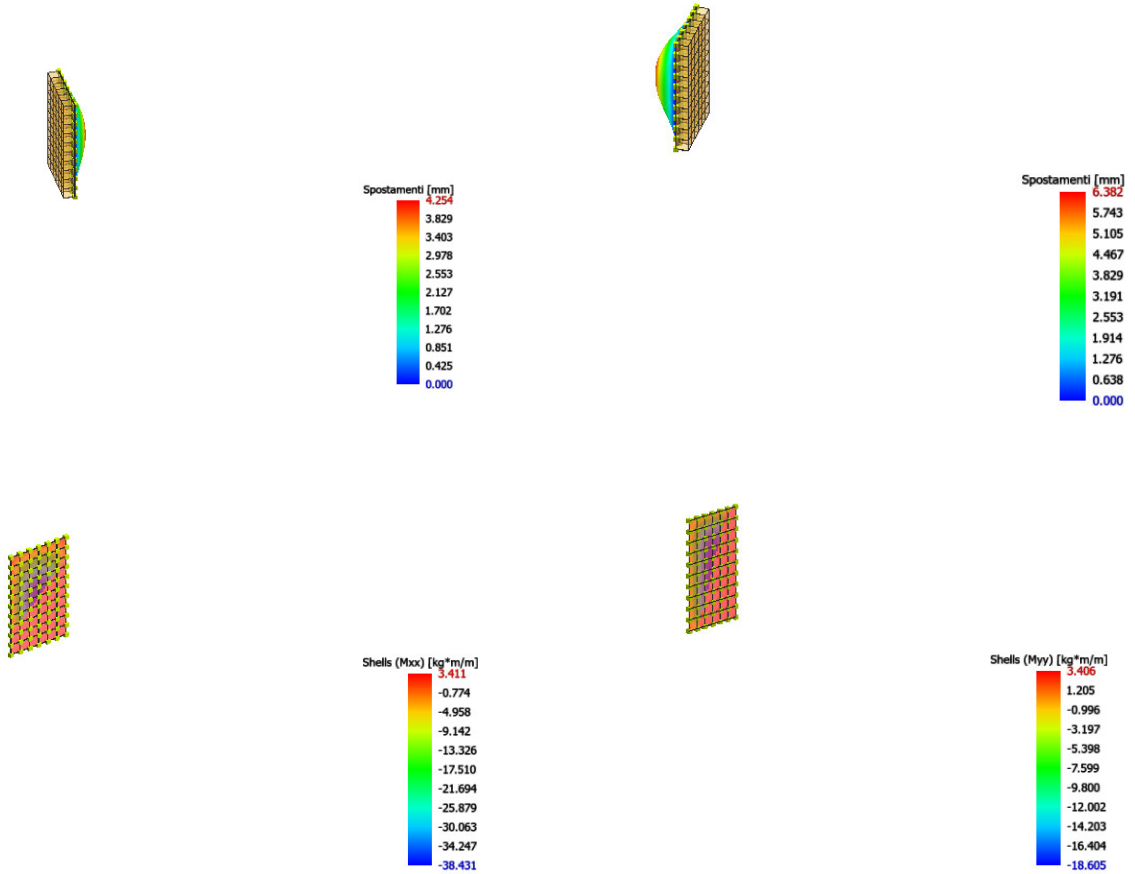
$L = 1500 \qquad I_s=h_1*d_1^2 + h_2*d_2^2 = 2*h* d^2= 307\ mmc$

Lo spessore equivalente per il calcolo delle deflessioni:
$h_{efw} = [h_1^3+h_2^3+ 12*\Gamma*I_s]^{1/3} = 13,35\ mm$

lo spessore equivalente per il calcolo delle tensioni
$h_{ef} =[h_{efw}^3/(h+2*\Gamma*d]^{1/2} = 14.87\ mm$



Eseguiamo una modellazione FEM della nostra lastra , sollecitata dalle azioni del vento , inserendo pannellini di dimensioni 25x25 cm in modo che l'appoggio sui bordi possa essere continuo aventi uno spessore di 13mm.



*la max deflessione per coefficienti parziali unitari è pari a 4,25 mm ; il momento massimo lo abbiamo nel punto centrale Mxx= 38 daN*m lato lungo ; Myy = 18daN*m lato corto*

le tensioni $\sigma_{XX} = 3800/W = 103$ *daN/cmq* $\sigma_{YY} = 1800/W = 48{,}84$ *daN/cmq*

$W = 100*1.487^2/6 = 36{,}85$ *cmc*

le tensioni sono entrambe di trazione $\sigma = \sqrt{(\sigma_{XX}^2+\sigma_{YY}^2)} = 114$ *daN/cmq*

la deflessione di progetto $L/60 = 150/60 = 2{,}5$ *cm* $> 4{,}25$ *mm*

La resistenza a trazione di progetto
$f_{Gd} = 826$ *daN/cmq per vetro temperato*
$f_{Gd} = 414$*N/cmq per vetro indurito*

7- Le volte reticolari

Le volte reticolari in acciaio- legno o alluminio ed elementi piani in vetro possono presentare dei problemi in fase di modellazione durante il calcolo strutturale per cui si vuole evidenziare la differenza di comportamento sia per quanto concerne la deformabilità e quindi le deflessioni che la instabilità globale di bukcling se consideriamo inseriti nella volta gli elementi piani in vetro. Analizzeremo una cupola ed una volta a botte realizzate con profilati in acciaio, modellate sia con elementi di solaio deformabili a membrana che con elementi plate -shell di vetro inseriti nelle maglie metalliche, caricate con un carico da neve verticale determiniamo quindi le deformazioni ed il moltiplicatore minimo dei carichi verticali che provoca instabilità. Il pannello di vetro interagisce con la struttura reticolare limitando gli spostamenti ed ha una funzione di irrigidimento della struttura quindi ad essa deve essere ben collegato in modo da garantire la trasmissione degli sforzi funzionando da doppia diagonale tesa e compressa; e' evidente che la crisi nel vetro la sia ha per trazione quindi si rompe prima la diagonale tesa ma la struttura conserva la sua isostaticità.
Modelliamo in fase di dimensionamento un paraboloide a direttrice circolare di diametro 20 m freccia 8 m composta da 12 archi e 11 anelli in acciaio profili quadrati cavi di dimensione 15x15 spessore 10 mm, caricata dal peso proprio e da un carico verticale di 50 daN/mq. Si può calcolare l'arco a 3 cerniere il carico critico per ognuno di essi e l'abbassamento in chiave ;
L'equazione della parabola $Y = -2/25*X^2 + 8$
la spinta $H = Q*L^2/(8*f) = 468$ *daN* $L = 20$ *m* $f = 8$*m* $Q = 75$ *daN/m*

La reazione verticale $V = 750$ *daN* $L_0 = 10$*m* $I = 1017$ *cm*^{4}

l'abbassamento in chiave $\delta = Q*L^2/(32*E*A)*L^2/f^2*(1+8/3*f^2/L^2) = 1.02$ *cm*

il carico critico $Nc = \pi^2*EI/L_0^2 = 6709$ *daN* $\alpha = 7{,}58 < 10$

Sforzo normale alla imposta $\alpha = 58°$ $N = H*\cos 58 + V*\sin 58 = 8884$ *daN*

Riportiamo la modellazione FEM del paraboloide
Arco di parabola

0	*8*
1	*7,92*
2	*7,68*
3	*7,28*
4	*6,72*
5	*6*
6	*5,12*
7	*4,08*
8	*2,88*
9	*1,52*
10	*0*

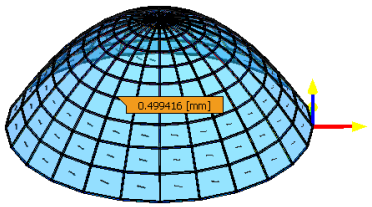
Modelliamo una prima cupola con profili quadrati tubolari 100x100 mm e spessore 3 mm , con solai deformabili a membrana con carico da neve verticale uniforme di 260 daN/mq incernierata alla base

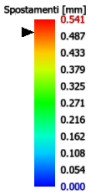
N°	fattore
1	3.712
2	3.712
3	3.744
4	3.744
5	3.940
6	3.940
7	4.319
8	4.319
9	5.150
10	5.150

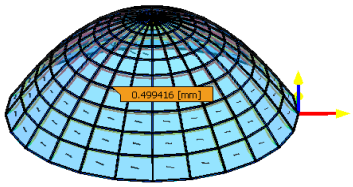
I fattori amplificativi sono relativi alla seguente combinazione di carico:

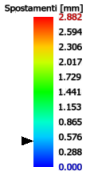
Condizione	fattore
Peso Proprio	1.300
QP Solai	1.300
QFissi Solai	1.500
QV Solai	1.500
QV SolaiPsi0	0.000
QV SolaiPsi1	0.000
QV SolaiPsi2	0.000
Tamponamento	1.500
Neve	0.750
Vento X	0.000
Vento Y	0.900
Carichi termici	0.900
Spinta terreno	1.300

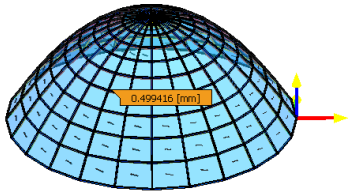
il moltiplicatore critico per l'analisi di buckling è inferiore a 10

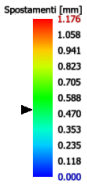












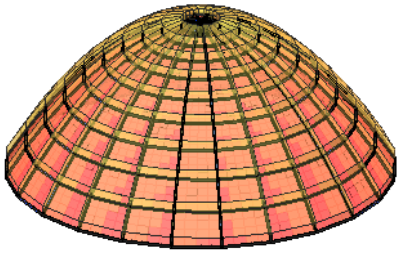
Deflessione max 1,176 mm coefficienti parziali unitari;
Modelliamo la stessa cupola inserendo degli elementi plate -shell in vetro aventi uno spessore di 16 mm vetro stratificato caricati con un carico da neve verticale di 260 daN/mq;

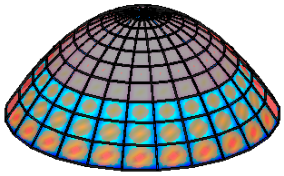
N°	fattore
1	71.440
2	71.494
3	71.494
4	71.649
5	71.649
6	71.889
7	71.889
8	72.194
9	72.194
10	72.541

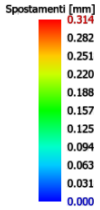
I fattori amplificativi sono relativi alla seguente combinazione di carico:

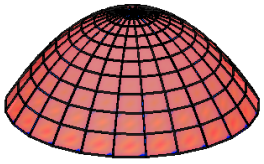
Condizione	fattore
Peso Proprio	1.300
QP Solai	1.300
QFissi Solai	1.500
QV Solai	0.000
QV SolaiPsi0	1.500
QV SolaiPsi1	0.000
QV SolaiPsi2	0.000
Tamponamento	1.500
Neve	1.500
Vento X	0.000
Vento Y	0.900
Carichi termici	0.900
Spinta terreno	1.300

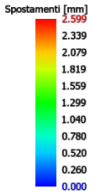
il moltiplicatore critico α> 10 è circa 15 volte più grande

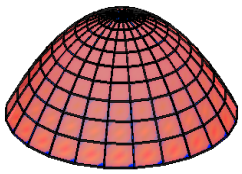


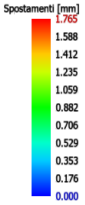












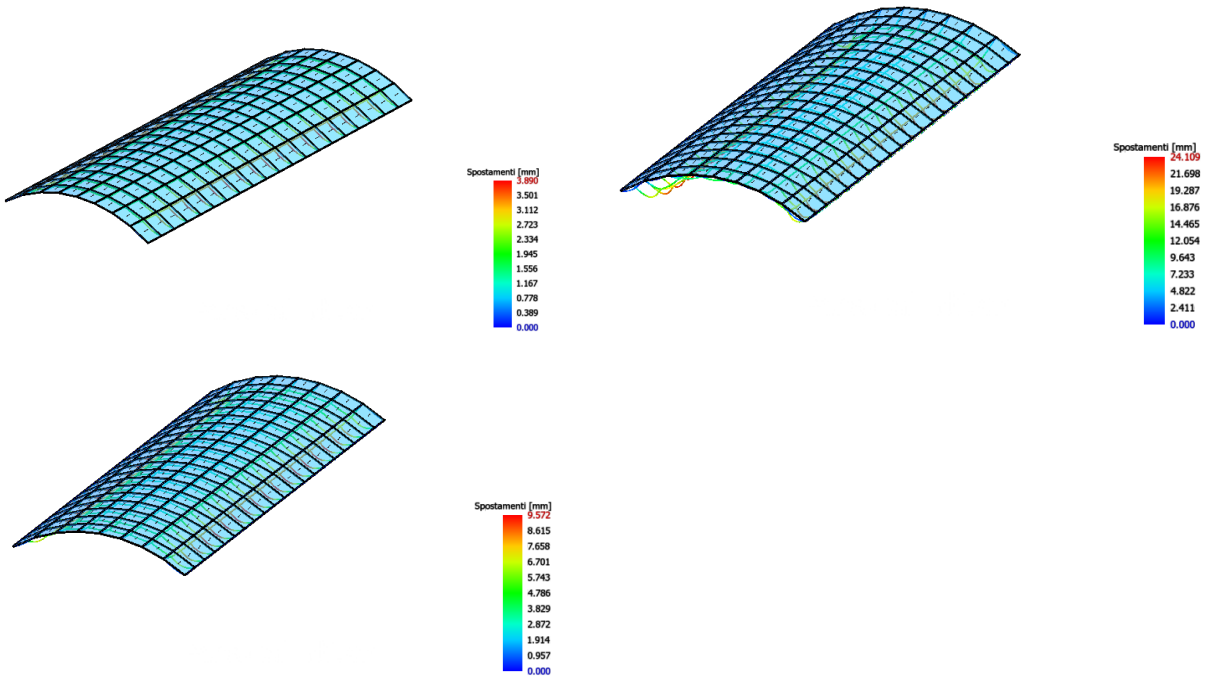
la max deflessione per coefficienti parziali unitari è 1,765 mm maggiore della precedente per il peso del vetro circa 40 daN/mq

Modelliamo adesso una volta a botte con direttrice ad arco circolare avente una lunghezza di 40 metri larghezza 16 metri composta da 21 archi ad interasse di 2 metri collegati da elementi orizzontali e freccia 5 metri. Si utilizzano gli stessi profili utilizzati per la cupola ; i vincoli sono degli appoggi lungo i bordi in modo che la volta possa avere anche un funzionamento a trave . ***Solai deformabili a membrana***

N°	fattore
1	0.420
2	0.553
3	0.806
4	0.886
5	0.960
6	1.097
7	1.224
8	1.316
9	1.561
10	1.625

I fattori amplificativi sono relativi alla seguente combinazione di carico:

Condizione	fattore
Peso Proprio	1.300
QP Solai	1.300
QFissi Solai	1.500
QV Solai	1.500
QV SolaiPsi0	0.000
QV SolaiPsi1	0.000
QV SolaiPsi2	0.000
Tamponamento	1.500
Neve	0.750
Vento X	0.000
Vento Y	0.900
Carichi termici	0.900
Spinta terreno	1.300



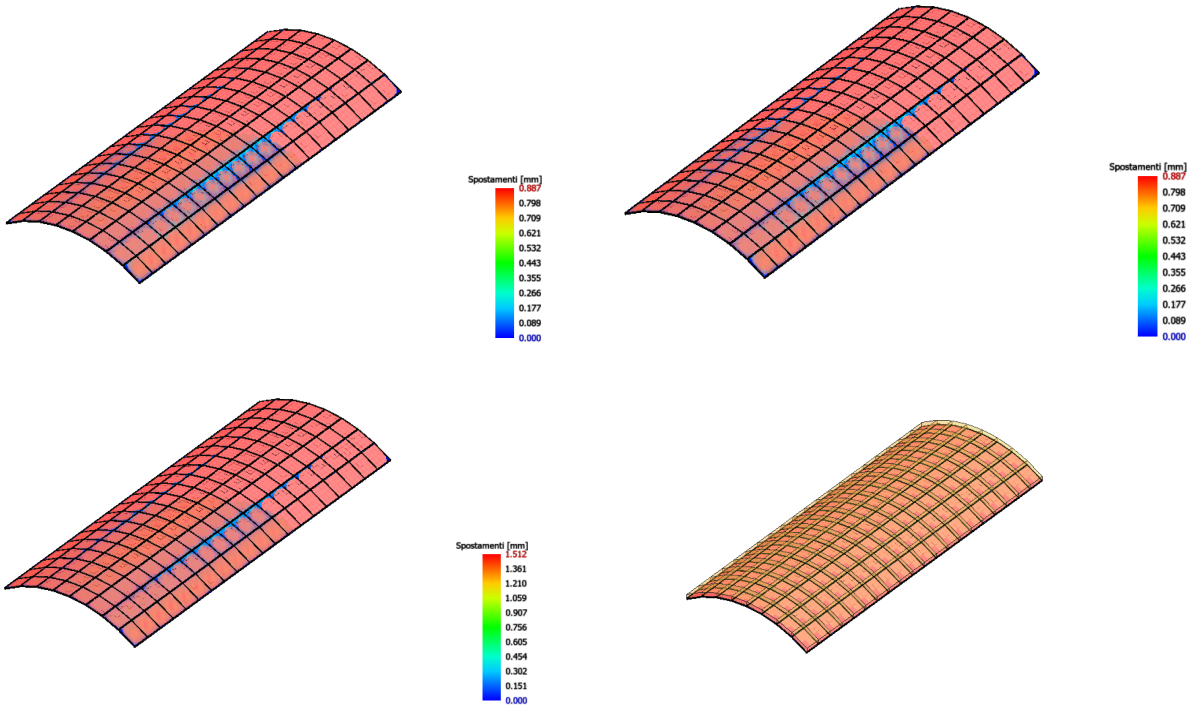
la max deflessione per coefficienti parziali unitari è circa 1 cm
Modelliamo la stessa volta inserendo elementi plate-shell in vetro aventi uno spessore di 16 mm

N°	fattore
1	27.820
2	29.400
3	34.641
4	37.763
5	38.067
6	39.314
7	39.418
8	40.937
9	41.328
10	42.342

I fattori amplificativi sono relativi alla seguente combinazione di carico:

Condizione	fattore
Peso Proprio	1.300
QP Solai	1.300
QFissi Solai	1.500
QV Solai	0.000
QV SolaiPsi0	1.500
QV SolaiPsi1	0.000
QV SolaiPsi2	0.000
Tamponamento	1.500
Neve	1.500
Vento X	0.000
Vento Y	0.900
Carichi termici	0.900
Spinta terreno	1.300

I moltiplicatori critici del carico verticale sono > 10



La max deflessione per coefficienti parziali unitari è circa 1 mm .

8- La trasmittanza termica delle strutture in vetro

Le strutture in vetro hanno una elevata conducibilità termica , vengono utilizzate come serre solari, hanno la funzione di riscaldare gli ambienti della nostra abitazione tramite la luce del sole , in estate possono rivelarsi estremamente calorose surriscaldando gli ambienti se non vi è un adeguata aerazione in inverno con il cielo coperto possono refrigerare gli ambienti con conseguente dispendio di energia per il riscaldamento ed il raffrescamento. In un edificio vanno utilizzate con cautela gli scambi termici con l'esterno e gli apporti solari vanno adeguatamente calcolati in modo da utilizzare razionalmente la parete vetrata. La trasmittanza o conducibilità termica del vetro è pari a ***λ= 0,8W/K°m*** *gli infissi vengono realizzati in vetrocamera con doppio o triplo vetro interponendo un gas quale Argon o Kripton al fine di ridurre la trasmittanza termica. Aumentando lo spessore del vetro e quindi il numero degli strati si può ridurre la trasmittanza termica , per componenti trasparenti i valori limite sono definiti nella tabella seguente*

1.1 – Parametri relativi al fabbricato dell'edificio di riferimento

	$U_{2019/2021}$ (W/m²K)			
Zona climatica	Opachi verticali verso esterno, ambienti non climatizzati o contro terra	Opachi orizzontali o inclinati di copertura, verso esterno e ambienti non climatizzati	Opachi orizzontali di pavimento verso esterno, ambienti non climatizzati o contro terra	Chiusure tecniche trasparenti, opache e cassonetti, verso esterno e verso ambienti non climatizzati
A e B	0,43	0,35	0,44	3,00
C	0,34	0,33	0,38	2,20
D	0,29	0,26	0,29	1,80
E	0,26	0,22	0,26	1,40
F	0,24	0,20	0,24	1,10

Esistono delle pellicole antisolari in grado di ridurre gli scambi termici con l'esterno e quindi la trasmittanza funzione dello spessore del vetro K = λ/s

Dati tecnici

NEU BR 20 EXT	Vetro singolo 4 mm	Vetro camera 4 mm - aria - 4mm	Vetro camera basso emissiva 4mm - 16 - 4mm
Valore Ug del vetro neutro W/m^2*K	5,789	2,695	1,653
Fattore g Trasmittanza solare totale	0,22	0,16	0,12
Raggi ultravioletti trasmessi Max	< 1%	< 1%	< 1%
Totale energia solare respinta	78%	84%	88%
Coefficiente di schermatura	0,25	0,18	0,14
Trasmissione (radiazione solare)	12%	10%	7%
Riflessione Esterno (radiazione solare)	55%	55%	56%
Assorbimento (radiazione solare)	33%	35%	37%
Trasmissione (luce visibile)	20%	18%	16%
Riflessione Esterno (luce visibile)	37%	37%	37%

9- Conclusioni

Il calcolo delle strutture in vetro è abbastanza semplice si utilizzano i metodi della scienza delle costruzioni ponendo particolare attenzione al vetro stratificato dove è importante la determinazione dello spessore equivalente per il calcolo delle deformazioni e delle tensioni. Nella definizione dello spessore assume importanza il coefficiente di trasmissione del taglio che dipende dalle caratteristiche geometriche e meccaniche degli strati nonché dall'intercalare ovvero dalla sua rigidezza o modulo di elasticità tangenziale. Si possono utilizzare intercalari

in PVB (polivinilbutirrale) con modulo G = 0,44 N/mmq

in SCG Sentry Glass Plus G = 26,4 N/mmq

in EVA (etilene vinilacetato) E = 950N/mmq

*lo spessore equivalente si avvicina tanto più allo spessore del vetro stratificato con valori del coefficiente di trasmissione del taglio Γ= 0,9÷1 quanto più rigido è l'intercalare ovvero quanto più alto è G; per vetro stratificato 39 + 2*0,76 mm si hanno spessori equivalenti per il calcolo delle deformazioni che si avvicinano a 40 mm . Nella progettazione di strutture in vetro assume importanza l'intercalare al quale vengono affidate la trasmissione delle tensioni tangenziali e quindi il comportamento monolitico del vetro stratificato. Il vetro è un materiale innovativo utilizzato nell'ar-*

chitettura moderna che conferisce al nostro edificio una sua valenza estetica, solai in vetro possono essere utilizzati per mansarde con funzione di serra solare, ancora strutture in vetro per ambienti espositivi , la volta reticolare architettura del 1800 con Paxton , il parapetto in vetro utilizzato negli edifici moderni. Pensare di progettare una ***casa trasparente*** *ovvero dove tutti possono guardare all'interno viola il diritto alla privacy sarebbe più opportuna una* ***casa burka*** *dove possiamo nascondere la nostra personalità conservare privacy ed intimità; la casa in vetro appartiene alla psicologia esibizionista un ambiente nel quale possiamo esporre qualcosa come semplici oggetti , ovvero sono ambienti espositivi.*

Bibliografia

-Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Costruzioni con Elementi Strutturali di Vetro CNR -DT 210/2013;

-Guidance for European Structural Design of Glass Components;

-Coperture in vetro stratificato : criteri di progettazione;

- Guida alla scelta dei vetri nelle balaustre

- NTC 2018

Le travi iperstatiche con sezione composta

1-Introduzione

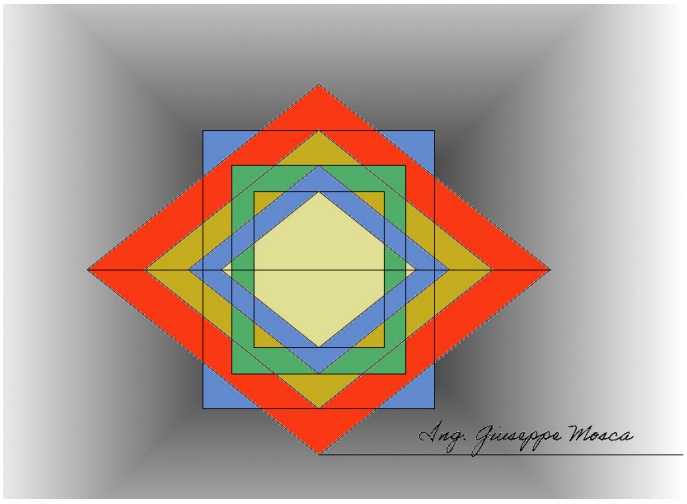
2-La trave appoggiata appoggiata

3-La trave incastrata agli estremi

4-La trave continua

5- La rigidezza:modellazione FEM

6-Conclusioni

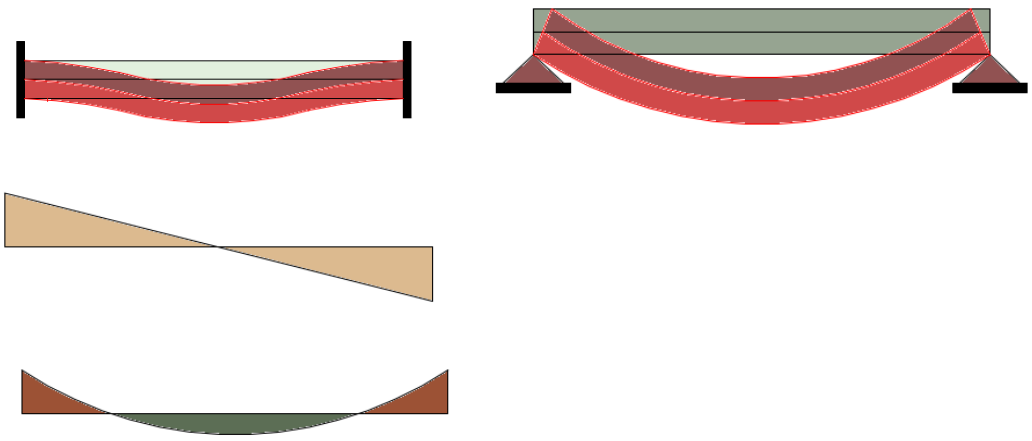




Mi scuso di eventuali imprecisioni che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1-Introduzione

Le travi composte sono degli elementi monodimensionali derivanti dalla sovrapposizione o meglio collaborazione di più elementi mono e bidimensionali che possono essere dello stesso materiale o di materiale differente ; tipiche sono le sezioni composte in legno , solai e grigliati in legno con soletta collaborante , travi miste acciaio cls per strutture da ponte, i solai in acciaio con lamiera aggregata travi composte in cls quali il solaio latero cementizio con travetti precompressi impalcati da ponte con trave precompresse a doppio T affiancate e soletta collaborante, irrigidimenti di solai esistenti cls con soletta , strutture e solai in vetro. Il comportamento strutturale di queste sezioni è caratterizzato dallo scorrimento relativo tra i singoli elementi strutturali che vanno solidarizzati con connettori , e materiali adesivi determinando secondo un criterio di fascia due schemi limite di comportamento, corrispondente alla rigidezza infinita del collegamento dove la inerzia è quella della sezione composta e connessione infinitamente deformabile dove la inerzia della sezione deriva dalla somma delle inerzie dei singoli componenti. I comportamento effettivo ovvero la rigidezza equivalente della sezione ha un valore intermedio tra quelle corrispondenti al criterio di fascia che dipende dalla rigidezza e interasse dei connettori e per l'adesivo dalla sua resistenza tangenziale. La problematica è stata ampiamente affrontata per travi appoggiate appoggiate dove il diagramma dei momenti è parabolico con fibre tese inferiori per tutta la lunghezza della trave ; quando la trave è incastrata agli estremi si ha un inversione del diagramma dei momenti , in mezzeria $M = q*L^2/24$ *mentre agli appoggi* $M = q*L^2/12$ *con andamento parabolico ed inversione delle fibre in corrispondenza del punto fisso della trave ad 0,212L , il diagramma del taglio è lineare ma la deformata della trave ha un andamento differente .*



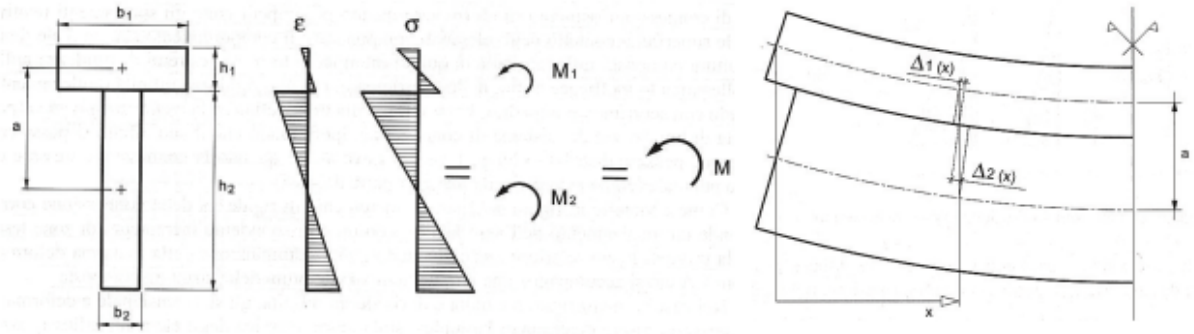
Il calcolo e dimensionamento della connessione tra i singoli elementi strutturali viene eseguito tramite la forza di scorrimento risultante delle azioni tangenziali tra i vari elementi seguendo le vecchie normative , per gli eurocodici e le NTC il dimensionamento lo si esegue in base alla risultante degli sforzi di compressione che sono nulli dove il momento è nullo e nella trave con due incastri invertono il segno. La trattazione di ***jourawsky*** *per la determinazione delle tensioni tangenziali deriva dalle equazione di equilibrio del concio di trave alla traslazione orizzontale tra tensioni normali e tangenziali. In questo articolo ci limitiamo al calcolo della forza necessa-*

ria per calcolare i connettori nella ipotesi di connessione rigida per poi definire la rigidezza equivalente della sezione composta. I calcoli strutturali nella modellazione FEM vengono eseguiti sempre per connessione rigida la rigidezza equivalente viene utilizzata esclusivamente per sezioni composte in legno o legno cls.

2-La trave appoggiata appoggiata

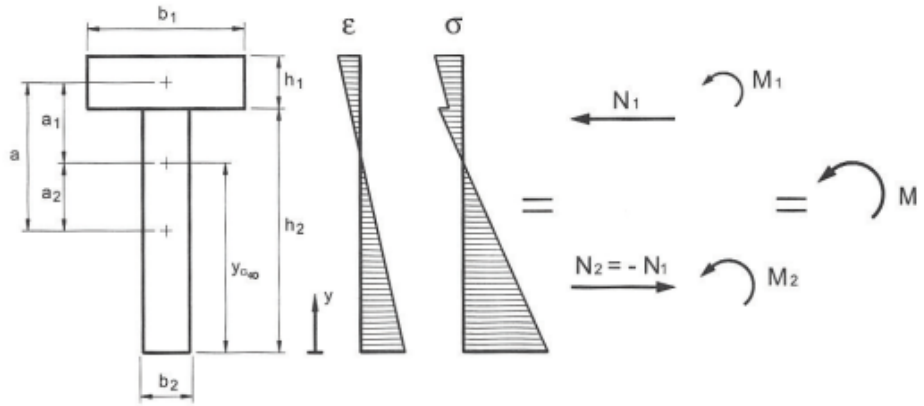
Per lo schema di trave appoggiata appoggiata è ben nota la rigidezza equivalente della sezione composta in funzione della rigidezza dei connettori e per le due situazioni limite

Rigidezza connettorì nulla K= 0

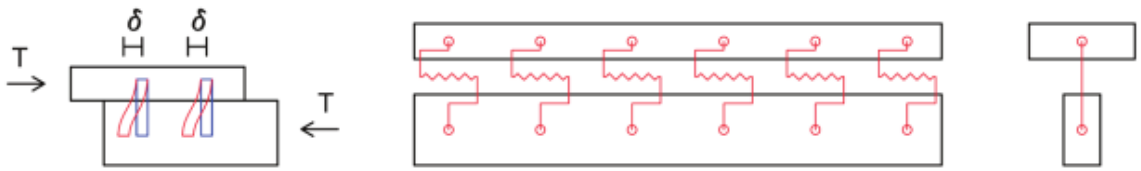


$(E^*I)_{eq} = E_1^*I_1 + E_2^*I_2$

Rigidezza connettorì infinita K= ∞



Connessione parziale o semirigida



Per una trave di semplice appoggio le soluzioni sono fornite dall'eurocodice 5 attraverso il metodo Gamma

$(EI)_{eff} = E_1*I_1 + E_2*I_2 + \gamma* (E_1*A_1*a_1^2 + E_2*A_2*a_2^2)$

i coefficienti di trasmissione del taglio

$\gamma=1/[1+\pi^2*(E_1*A_1*E_2*A_2)/(E_1*A_1+E_2*A_2)*(s_{eq}/(K*L^2)]$

L luce effettiva della trave composta

K rigidezza del connettore $K = K_{Ser}$ *SLE* $K = 2/3*K_{ser}$ *SLU*
s_{eq} *interasse tra i connettori*

Le tensioni normali

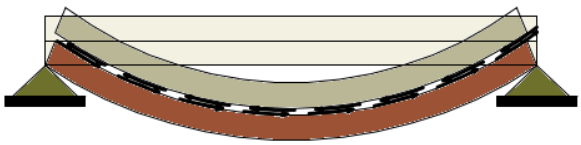
$\sigma_1 = \gamma*E_1*M/(EI)_{eff} *a_1$; $\sigma_{m1} = 0,5*h_1 *E_1*M/(EI)_{eff}$;

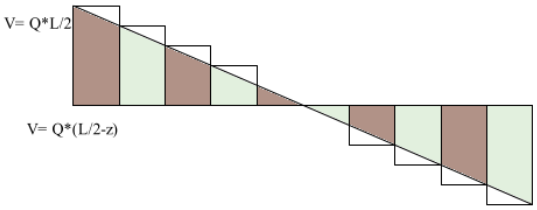
$\sigma_2 = \gamma*E_2*M/(EI)_{eff} *a_2$; $\sigma_{m1} = 0,5*h_2 *E_2*M/(EI)_{eff}$;

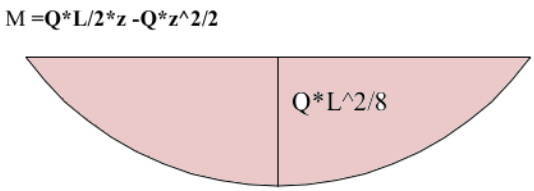
La forza di scorrimento nel connettore

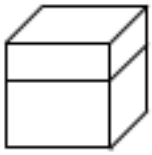
$F= s*E_1*A_1*\gamma*a_1 *V/(EI)_{eff}$;

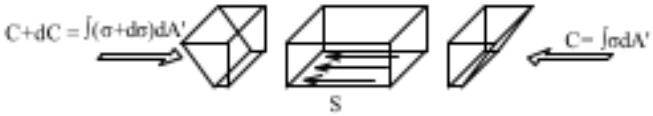
Ipotizziamo che la connessione sia rigida e determiniamo la forza di scorrimento S per n tratti costanti ΔZ dalla trattazione di jourawsky











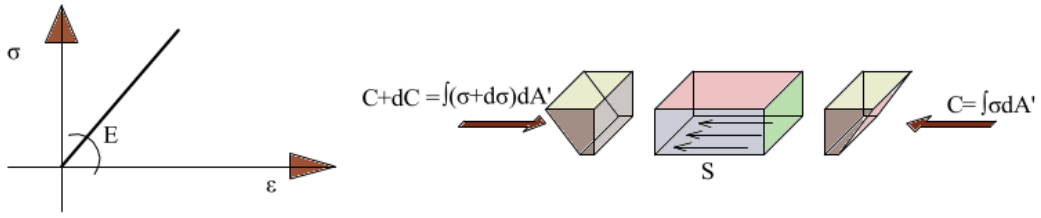
Dall'equilibrio alla traslazione orizzontale del concio di trave di lunghezza ΔZ

$C+dC = S+C \quad ; \quad dC = S \; ; \qquad \int d\sigma * dA' = \tau * b * \Delta Z$

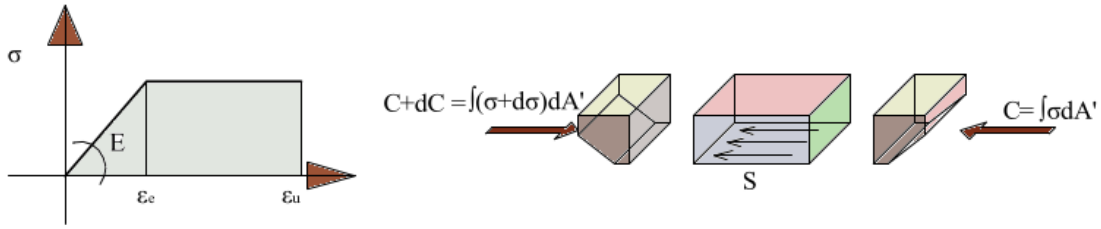
B larghezza trave ; A' area sottesa dalla corda ;

τ tensione tangenziale ; σ tensione normale

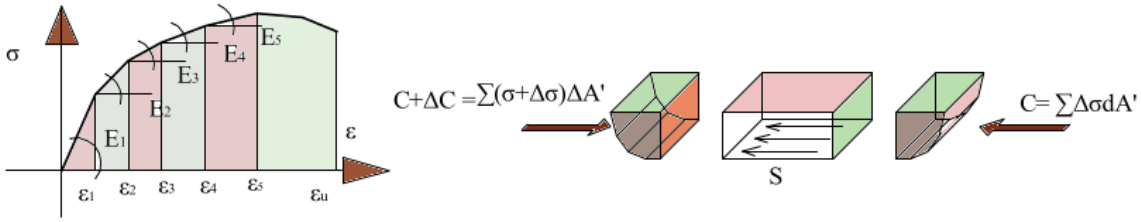
*Per la funzione tensione normale se utilizziamo la formula di Navier si ha un andamento lineare σ= M/I*y nella ipotesi di elasticità lineare si possono utilizzare formulazioni differenti con andamenti parabolici o cubici funzione del legame tensione deformazione .*



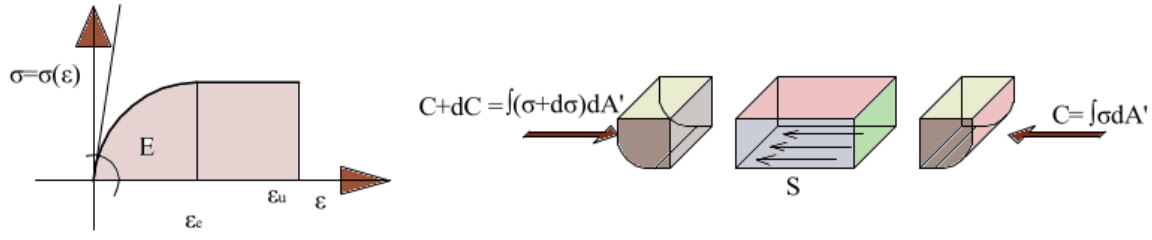
Elasticità lineare



Elastoplastico ideale



Legame discretizzato



Parabolico

Qualunque sia il solido delle tensioni per calcolare la connessione ci occorre lo scorrimento S

$dC = S$; $\int d\sigma * dA' = \tau * b * \Delta Z$

$S = \Sigma \Delta C_i = \Sigma \tau * b * \Delta Z$, *in generale* $S = \int dC * dz = \int \tau * b * dZ$

Esteso per la simmetria a tutta a metà luce della trave. All'appoggio ovvero al punto di nullo del momento $C = 0$, *in mezzeria* $C = \int \sigma * dA'$

$S = \int \sigma * dA'$ *dove* $\sigma = M/I * y$ *per andamento lineare* $M = Q * L^2/8$

Nelle altre ipotesi ipotizzando valido il principio di conservazione delle sezioni piane ovvero diagramma delle deformazioni lineare dall'equilibrio alla traslazione orizzontale delle tensioni normali ovvero della sezione per la altezza complessiva h

$C = T$ $\int \sigma_N * dA_C = \int \sigma_T * dA_T$ $A_T = b*(h-x)$; $A_C = b*x$

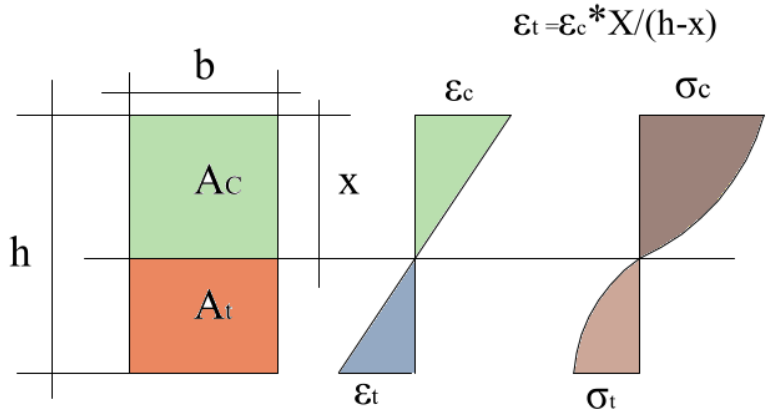
con A_C *area compresa ed A area tesa della sezione x profondità della sezione e integrale esteso da zero ad x , h altezza sezione per la parte compressa , per la zona tesa esteso ad h-x*

$\int \sigma_N * dy = \int \sigma_T * dy$

Dall'equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro

$M = b * \int \sigma_N * y * dy + b * \int \sigma_T * y * dy$ *da 0 a x per C e da 0 a h-x per T*

$\sigma_N = f(\varepsilon)$; $\sigma_T = f(\varepsilon)$;



La incognita del sistema sono ξ *ed X*

$\xi = \varepsilon_C/X$; $\varepsilon_T = \varepsilon_C * X/(h-X) = \varepsilon_C/X * X(h/X-1) = X * \xi/(h/X-1)$

Ricavabili dalle due equazioni

$\int \sigma_N * dy = \int \sigma_T * dy$

$Q * L^2/8 = b * \int \sigma_N * y * dy + b * \int \sigma_T * y * dy$

Integrate da da 0 a x per C e da 0 a h-x per T

Dove $\sigma_N = f(\varepsilon)$; $\sigma_T = f(\varepsilon)$;

se utilizziamo una espressione polinomiale lineare ,quadratica, cubica ect che definisce il diagramma tensione deformazione ben noto dato del problema tenendo conto delle disomogenità della sezione e dei differenti parametri elastici della sezione composta

$\sigma_N = a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon + a_4$

$\sigma_T = b_1 * \varepsilon^3 + b_2 * \varepsilon^2 + b_3 * \varepsilon + b_4$

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε varia con legge lineare

$\varepsilon(y) = \varepsilon_c / X * y = \xi * y$ *parte compressa tra zero e X*

$\varepsilon(y) = \varepsilon_c / X * y = -\xi * y$ *parte compressa tra zero e h-X*

Gli integrali sono semplici da risolvere

$\int \sigma_N * dy = \int [\, a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4 \,] dy$

$\int \sigma_T * dy = \int [\, b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y) + b_4 \,] dy$

$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4 /4 + a_2 * \xi^2 * x^3 /3 + a_3 * \xi * x^2/2 + a_4 * x$

$\int \sigma_T * dy = b_1 * [\xi * (h-x)]^3 + b_2 * [\xi * (h-x)]^2 + b_3 * [\xi * (h-x)] + b_4 * (h-x)$

La prima equazione:

$a_1 * \xi^3 * x^4 /4 + a_2 * \xi^2 * x^3 /3 + a_3 * \xi * x^2/2 + a_4 * x =$

$b_1 * [\xi * (h-x)]^3 + b_2 * [\xi * (h-x)]^2 + b_3 * [\xi * (h-x)] + b_4 * (h-x)$

La seconda equazione alla rotazione intorno all'asse neutro

$$Q*L^2/8 = b*\int \sigma_N*y*dy + b*\int \sigma_T*y*dy$$

$$Q*L^2/(8b) = \int [a_1*\xi^3*y^4 + a_2*\xi^2*y^3 + a_3*\xi*y^2 + a_4*y]dy +$$

$$+ \int [b_1*\xi^3*y^4 + b_2*\xi^2*y^3 + b_3*\xi*y^2/2 + b_4*y]dy$$

La soluzione degli integrali è immediata

$$Q*L^2/(8b) = a_1*\xi^3*x^5/5 + a_2*\xi^2*x^4/4 + a_3*\xi*x^3/3 + a_4*x^2/2 +$$

$$b_1*\xi^3*(h-x)^5/5 + b_2*\xi^2*(h-x)^4/4 + b_3*a_3*\xi*(h-x)^3/3 + b_4*(h-x)^2/2$$

I coefficienti costanti sono noti dal diagramma tensione deformazione

$b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4;$ $\qquad$ $a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4;$

Il sistema di equazioni polinomiale

$$a_1*\xi^3*x^4/4 + a_2*\xi^2*x^3/3 + a_3*\xi*x^2/2 + a_4*x =$$

$$b_1*[\xi*(h-x)]^3 + b_2*[\xi*(h-x)]^2 + b_3*[\xi*(h-x)] + b_4*(h-x)$$

$$Q*L^2/(8b) = a_1*\xi^3*x^5/5 + a_2*\xi^2*x^4/4 + a_3*\xi*x^3/3 + a_4*x^2/2 +$$

$$b_1*\xi^3*(h-x)^5/5 + b_2*\xi^2*(h-x)^4/4 + b_3*a_3*\xi*(h-x)^3/3 + b_4*(h-x)^2/2$$

Ha due incognite x e ξ può essere risolto trovando i punti di intersezione delle due curve del piano cartesiano x e ξ, si possono studiare le funzioni tabellandole per punti o utilizzando come negli anni 50 il regolo calcolatore o per uno studente di fisica del primo anno di un istituto tecnico per geometri

X	ξ
X_1	ξ_1
X_2	ξ_2
X_3	ξ_3
X_4	ξ_4
.	.
.	.
.	.
.	.
X_n	ξ_n

curva equilibrio traslazione

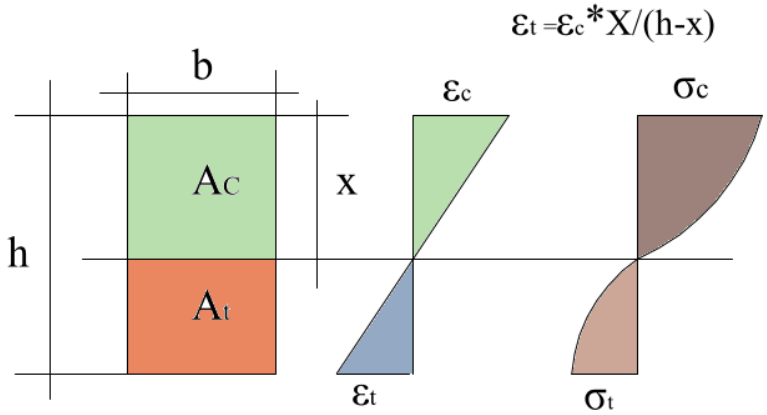
X	ξ
X_1	ξ_1
X_2	ξ_2
X_3	ξ_3
X_4	ξ_4
.	.
.	.
.	.
.	.
X_n	ξ_n

curva equilibrio rotazione

Per uno studente di ingegneria tabellare la funzione e trovare soluzioni grafiche è dequalificante è preferibile utilizzare fogli elettronici , software di analisi matematica free reperibili on line o programmare in visual basic.
Il sistema di equazioni ha 8 soluzioni

$$\xi_1 \;;\; \xi_2 \;;\; \xi_3 \;;\; x_1 \;;\; x_2 \;;\; x_3 \;;\; x_4 \;;\; x_5 \;;$$

anche immaginarie , si sceglie la coppia di numeri reali (ξ; x) che definisce al meglio il diagramma delle tensioni

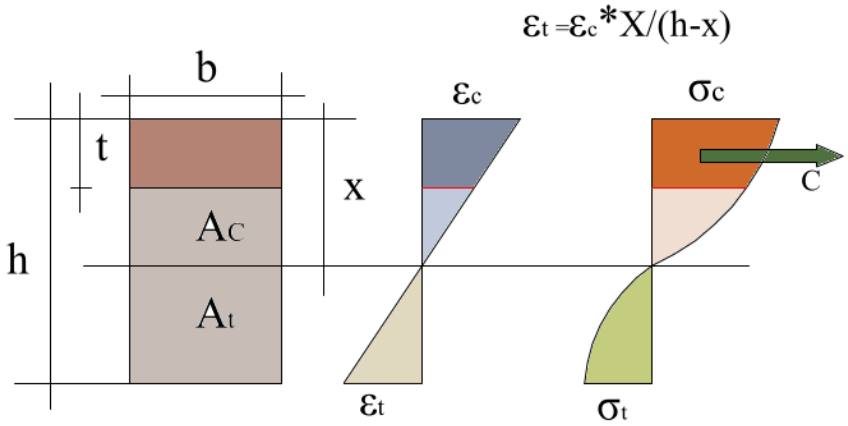


Alla quale corrispondono le deformazioni al lembo teso e compresso

$$\varepsilon_C = \xi * x \quad ; \quad \varepsilon_T = \varepsilon_C * X/(h-X)$$

le tensioni di trazione e compressione

$$\sigma_C = a_1*\varepsilon_C^{\,3} + a_2*\varepsilon_C^{\,2} + a_3*\varepsilon_C + a_4 \quad ; \quad \sigma_T = b_1*\varepsilon_T^{\,3} + b_2*\varepsilon_T^{\,2} + b_3*\varepsilon_T + b_4$$



La legge di variazione della tensione di compressione e trazione deriva dal principio di conservazione delle sezioni piane

$$\varepsilon(y) = \pm\, y*\varepsilon_C/x \;;\; \text{asse y verticale origine nell' asse neutro}$$

$\sigma_N(y) = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4$

$\sigma_T(y) = - [b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y) + b_4]$

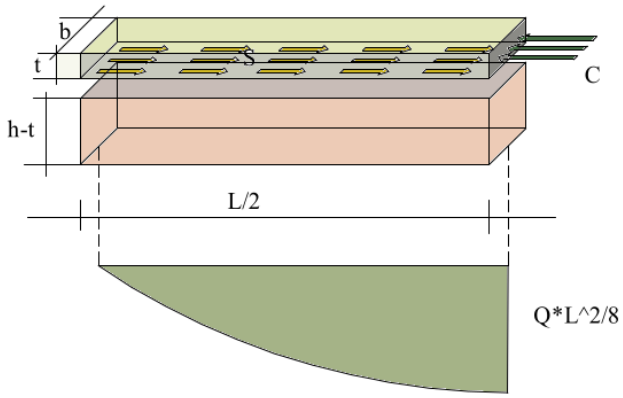
La legge di variazione del momento flettente ci consente di ricavare l'andamento delle tensioni ad ogni ascissa z

$M(z) = Q * L^2/8 - Q * Z^2/2 = Q * L^2/8 [1 - (2 * Z/L)^2]$

$\sigma_N(y,z) = [a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4] * [1 - (2 * Z/L)^2]$

$\sigma_T(y,z) = - [b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y) + b_4] * [1 - (2 * Z/L)^2]$

La risultante complessiva ovvero lo scorrimento S nel tratto (L/2, 0) relativa alla parte di sezione composta di spessore t



$S = C = \int [a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4] \, dy$

calcolato tra (x-t e x) nella sezione di mezzeria ovvero per momento $Q * L^2/8$

$S = C = \{a_1 * [\xi^3 (x^4/4 - (x-t)^4/4 + a_2 * [\xi^2 (x^3/3 - (x-t)^3/3) + a_3 * [\xi^2 (x^2/2 - (x-t)^2/2) + a_4 * t\}$

Il segno negativo non è importante è opposto all'asse Z diretto verso la mezzeria

Il dimensionamento dei connettori a tranciamento è semplice , la area totale

$As = 0{,}6 * S/fyd = 1/\sqrt{3} * S/fyd$ *, il numero di essi stabilito il passo p* $n = As/p$

fyd resistenza trazione connettore (ipotesi connessione rigida) $\boldsymbol{k = \infty}$

La cosa più semplice è considerare il momento costante su tutta la trave , ovvero dal momento $\boldsymbol{M_{rd}}$ *resistente ultimo della sezione in mezzeria ipotizzando che la rottura la si raggiunga per max deformazione in zona compressa o tesa ;*

Il calcolo è molto più semplice , dalla equazione di equilibrio alla traslazione

$\int \sigma_N * dy = \int \sigma_T * dy$ *per max deformazione di compressione* ε_{cmax}

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε varia con legge lineare

$\varepsilon(y) = y * \varepsilon_{c\,max} / x = (\xi * y)$ *parte compressa tra zero e X*

$\varepsilon(y) = y * \varepsilon_{cmax} / x = (\xi * y)$ *parte tesa tra zero e h-X*

$\sigma_N = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 (\xi * y) + a_4$

$\sigma_T = -[b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 (\xi * y) + b_4]$

I due integrali sono immediati

$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2 + a_4 * x$

$\int \sigma_T * dy = b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)2^3/2 + b_4 * (h-x)$

Eguagliando le due risultanti trazione e compressione

$a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2 + a_4 * x =$

$= b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)^2/2 + b_4 * (h-x)$

$\varepsilon_C = \xi * x ; \quad \xi = \varepsilon_C / x \quad \varepsilon_T = \varepsilon_C * (h-x)/x$

$(h-x) = \varepsilon_T * x / \varepsilon_C = \varepsilon_T / \xi \quad ; \quad x = \varepsilon_C / \xi;$

ε_{Cu} *valore di rottura noto funzione del materiale* $x = (\varepsilon_{Cu} / \xi)$

$H-x = (h - \varepsilon_{Cu} / \xi)$

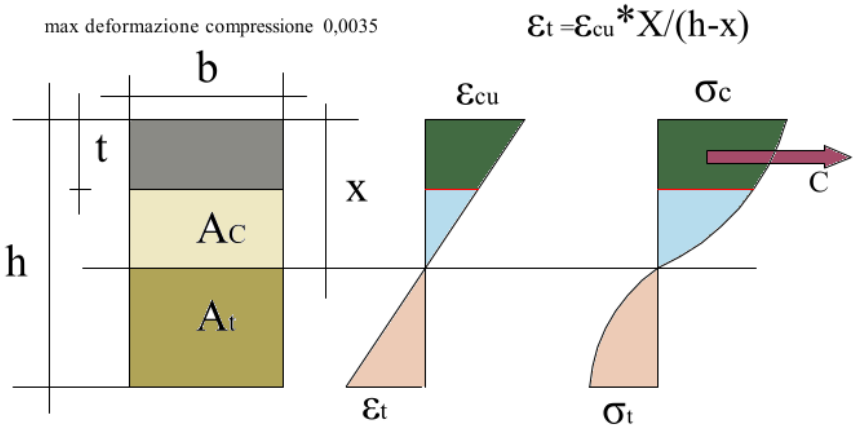
La incognita della equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale è la sola ξ

$a_1 * \xi^3 * (\varepsilon_{Cu} / \xi)^4/4 + a_2 * \xi^2 * (\varepsilon_{Cu} / \xi)^3/3 + a_3 * \xi * (\varepsilon_{Cu} / \xi)^2/2 + a_4 * (\varepsilon_{Cu} / \xi) =$

$= b_1 * \xi^3 * (h - \varepsilon_{Cu}/\xi)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h - \varepsilon_{Cu}/\xi)^3/3 + b_3 * \xi * (h - \varepsilon_{Cu}/\xi)^2/2 + b_4 * (h - \varepsilon_{Cu}/\xi)$

Che può essere risolta con il teorema degli zeri o il software Effedix

La profondità dell' asse neutro $x = (\varepsilon_{Cu} / \xi)$ *è un valore numerico calcolato*



Il momento resistente della sezione rispetto all'asse neutro

$$Mrd = B*\int[a_1*(\xi*y)^3+a_2*(\xi*y)^2+a_3(\xi*y)+a_4]*y*dy +$$

$$+B*\int[b_1*(\xi*y)^3+b_2*(\xi*y)^2+b_3(\xi*y)+b_4]*y*dy$$

$$Mrd = B*\{ a_1*\xi^3*x^5/5+a_2*\xi^2*x^4/4+a_3*\xi*x^3/3+a_4*x^2/2+$$

$$b_1*\xi^3*(h-x)^5/5+b_2*\xi^2*(h-x)^4/4+b_3*\xi*(h-x)^3/3+b_4*(h-x)^2/2$$

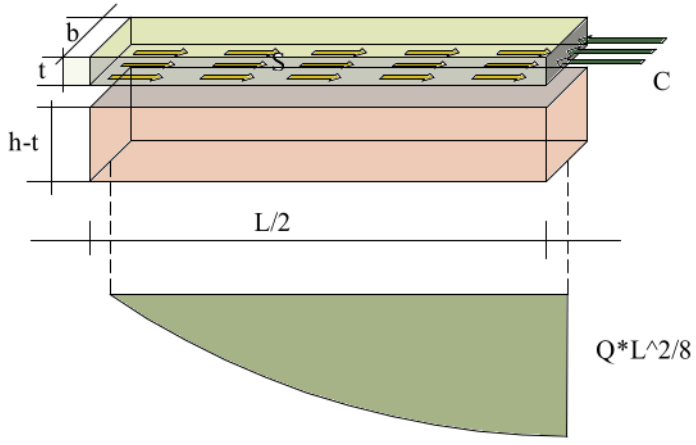
Le tensioni lungo la sezione composta

$$\sigma_N(y) = a_1*(\xi*y)^3+a_2*(\xi*y)^2+a_3*(\xi*y)+a_4$$

$$\sigma_T(y) = -[b_1*(\xi*y)^3+b_2*(\xi*y)^2+b_3*(\xi*y)+b_4]$$

La risultante degli sforzi di compressione ovvero lo scorrimento S

$$S = C = \int[a_1*(\xi*y)^3+a_2*(\xi*y)^2+a_3*(\xi*y)+a_4]\,dy$$



$$S = C = \{a_1*[\xi^3(x^4/4-(x-t)^4/4+a_2*[\xi^2(x^3/3-(x-t)^3/3)+a_3*[\xi^2(x^2/2-(x-t)^2/2)+a_4*t\}$$

Il dimensionamento dei connettori a tranciamento è semplice , la area totale

$As = 0{,}6*S/fyd = 1/\sqrt{3}*S/fyd$ *, il numero di essi stabilito il passo p* $n = As/p$

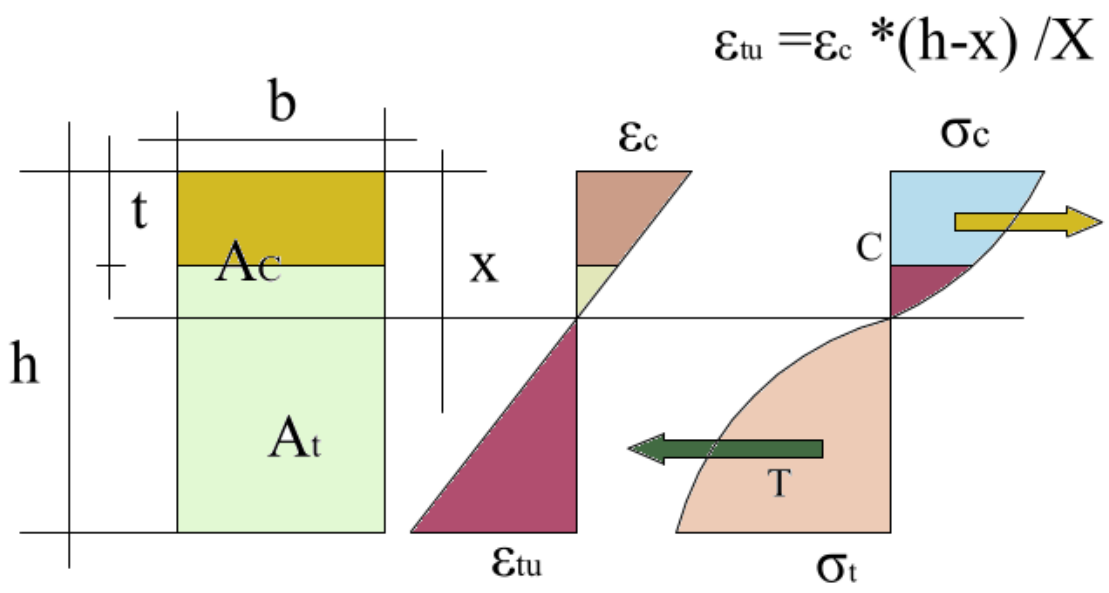
fyd resistenza trazione connettore (ipotesi connessione rigida) $\boldsymbol{k = \infty}$

Per solaio con soletta collaborante non si tiene conto della armatura in compressione : per impalcati di travi da ponte a sezione mista con travi in acciaio affiancate tener conto della armatura compressa è semplice

$\int \sigma_N*dy + E_s*\Sigma A_{si}*\varepsilon_{si} + \Sigma A_{si}*f_{yd} = \int \sigma_T*dy$ *con* $\varepsilon_{si}/(d_i-x) = \varepsilon_C/x$

$E_s = 206000$ *N/mmq* *per* $\varepsilon_{si} > fy_d/E_s$ $\sigma_{SI} = f_{yd}$ *per* $\varepsilon_{si} \le fy_d/E_s$ $\sigma_{SI} = E_s*\varepsilon_{si}$

d_i *distanza da bordo compresso del tondino i-mo* $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{Cu}*(d_i-x)/x$



$\int \sigma_N*dy = \int \sigma_T*dy$ *per max deformazione di trazione* ε_{TU}

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε varia con legge lineare

$\varepsilon(y) = y*\varepsilon_{tu}/(h-x) = (\xi*y)$ *parte compressa tra zero e X*

$\varepsilon(y) = y*\varepsilon_{tu}/(h-x) = (\xi*y)$ *parte tesa tra zero e h-X*

Mediante la posizione $\xi = \varepsilon_{tu}/(h-x)$

$\sigma_N = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 (\xi * y) + a_4$

$\sigma_T = -[b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 (\xi * y) + b_4]$

I due integrali sono immediati

$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4/4 + a_2 * \xi^2 * x^3/3 + a_3 * \xi * x^2/2 + a_4 * x$

$\int \sigma_T * dy = b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)2^3/2 + b_4 * (h-x)$

Eguagliando le due risultanti trazione e compressione

$a_1 * \xi^3 * x^4/4 + a_2 * \xi^2 * x^3/3 + a_3 * \xi * x^2/2 + a_4 * x =$

$= b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)^2/2 + b_4 * (h-x)$

$\varepsilon_{Tu} = \xi * (h-x)$; $\xi = \varepsilon_{TU}/(h-x)$ $\varepsilon_C = \varepsilon_{TU} * x/(h-x)$

$(h-x) = \varepsilon_{TU} * x/\varepsilon_C$; $\varepsilon_C * (h-x) = \varepsilon_{TU} * x$

ε_{TU} *valore di rottura noto funzione del materiale* $h-x = (\varepsilon_{TU}/\xi)$

$(h-x) = (\varepsilon_{TU}/\xi)$; $x = h - (\varepsilon_{TU}/\xi)$

La incognita della equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale è la sola ξ

$a_1 * \xi^3 * (h-(\varepsilon_{TU}/\xi))^4/4 + a_2 * \xi^2 * (h-(\varepsilon_{TU}/\xi))^3/3 + a_3 * \xi * (h-(\varepsilon_{TU}/\xi))^2/2 + a_4 * (h - (\varepsilon_{TU}/\xi)) =$

$= b_1 * \xi^3 * (\varepsilon_{TU}/\xi)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (\varepsilon_{TU}/\xi)^3/3 + b_3 * \xi * (\varepsilon_{TU}/\xi)^2/2 + b_4 * (\varepsilon_{TU}/\xi)$

Che può essere risolta con il teorema degli zeri o il software Effedix

La profondità dell'asse neutro $x = h - (\varepsilon_{TU}/\xi)$ *è un valore numerico calcolato*
Il momento resistente della sezione rispetto all'asse neutro

$Mrd = B * \int [a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 (\xi * y) + a_4] * y * dy +$

$+ B * \int [b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 (\xi * y) + b_4] * y * dy$

$Mrd = B * \{ a_1 * \xi^3 * x^5/5 + a_2 * \xi^2 * x^4/4 + a_3 * \xi * x^3/3 + a_4 * x^2/2 +$

$b_1 * \xi^3 * (h-x)^5/5 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^4/4 + b_3 * \xi * (h-x)^3/3 + b_4 * (h-x)^2/2$

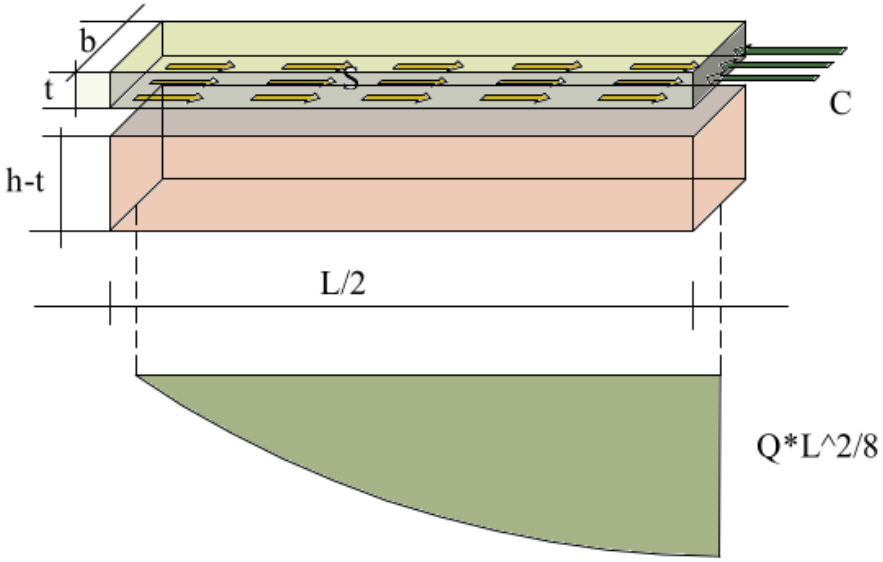
Le tensioni lungo la sezione composta

$\sigma_N(y) = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4$

$\sigma_T(y) = - [b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y) + b_4]$

La risultante degli sforzi di compressione ovvero lo scorrimento S

$S = C = \int [a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y) + a_4] \, dy$



$S = C = \{a_1 * [\xi^3 (x^4/4 - (x-t)^4/4 + a_2 * [\xi^2 (x^3/3 - (x-t)^3/3) + a_3 * [\xi^2 (x^2/2 - (x-t)^2/2) + a_4 * t\}$

Il dimensionamento dei connettori a tranciamento è semplice , la area totale

$As = 0,6 * S/fyd = 1/\sqrt{3} * S/fyd$ *, il numero di essi stabilito il passo p* $n = As/p$

fyd resistenza trazione connettore (ipotesi connessione rigida) $\boldsymbol{k = \infty}$

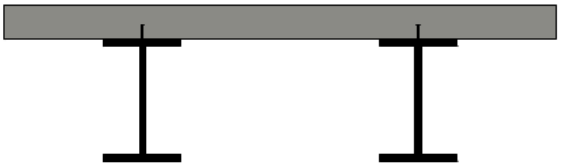
Per solaio con soletta collaborante non si tiene conto della armatura in compressione : per impalcati di travi da ponte a sezione mista con travi in acciaio affiancate tener conto della armatura compressa è semplice

$\int \sigma_N * dy + E_s * \Sigma A_{si} * \varepsilon_{si} + \Sigma A_{si} * f_{yd} = \int \sigma_T * dy$ *con* $\varepsilon_{si}/(d_i - x) = \varepsilon_C / x$

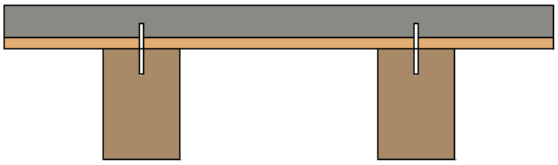
$E_s = 206000$ *N/mmq* *per* $\varepsilon_{si} > fy_d/E_s$ $\sigma_{SI} = f_{yd}$ *per* $\varepsilon_{si} \leq fy_d/E_s$ $\sigma_{SI} = E_s * \varepsilon_{si}$

d_i *distanza da bordo compresso del tondino i-mo* $\varepsilon_{si} = \varepsilon_{Cu} * (d_i - x)/x$

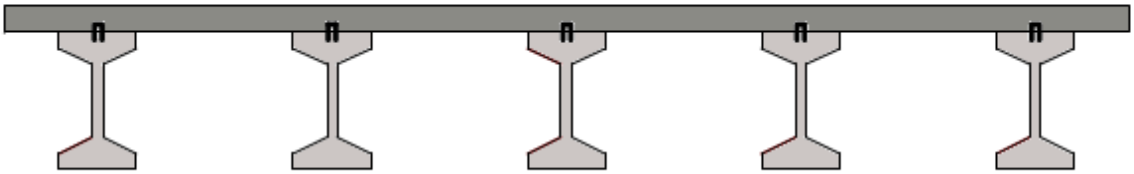
Il calcolo è stato descritto per sezione rettangolare composta con lo stesso materiale , le sezioni composte acciaio cls-legno calcestruzzo o ***cap-cls*** *hanno le seguenti forme geometriche e caratteristiche meccaniche dei materiali per le quali la teoria può essere estesa.*



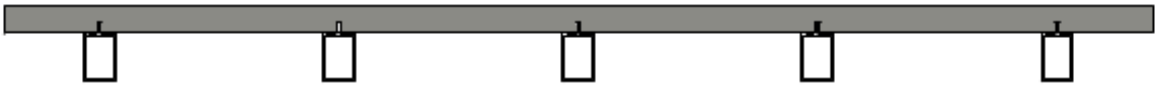
solaio acciaio o alluminio - cls



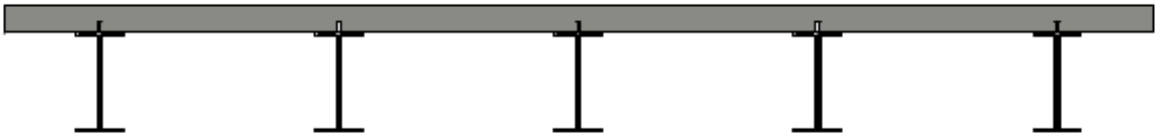
solaio legno - cls



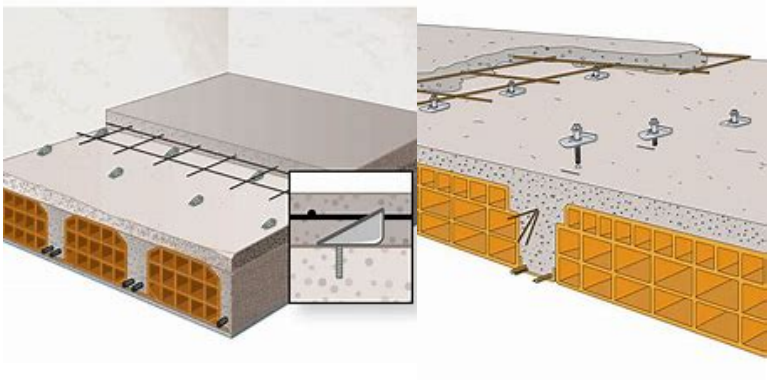
impalcato da ponte
C.a.p.-cls in opera



impalcato da ponte
acciaio -cls



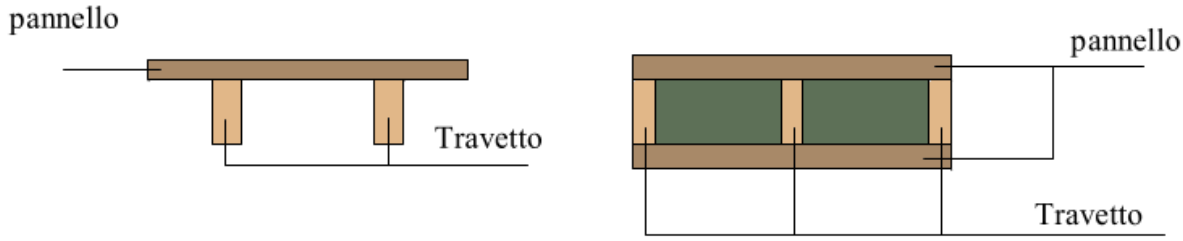
Altre tipologie di sezioni composte sono quelle legno- legno o cls-cls quando si vuol consolidare un solaio in c.a. esistente.



Solaio a doppia orditura , graticcio in lamellare con tavolato superiore



Solai in legno

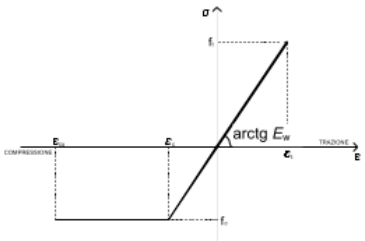


sezioni composte in legno

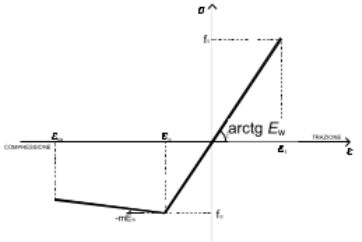
Per i materiali acciaio - legno - cls , le NTC 2018 propongono i diagrammi tensione deformazione che risalgono al 1950 elastico lineare , elastoplastico ideale e parabola rettangolo; per il legno esistono diagrammi tensioni deformazioni proposte da CNR

Tabella 4-1 – Modelli costitutivi per legno massiccio e legno lamellare incollato.

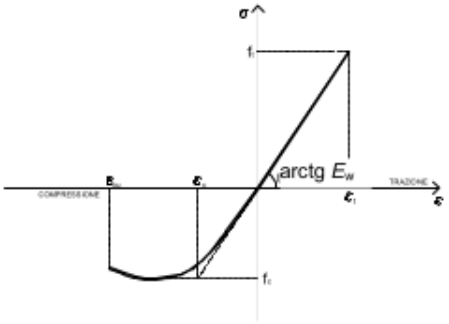
1. Modello elasto-plastico

Definizione analitica	*Diagramma*
$\sigma = E_w \cdot \varepsilon$ per $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_t$ $\sigma = f_c$ per $\varepsilon < \varepsilon_c$ Il modello è molto semplice, limitando il diagramma a un triangolo-rettangolo. Nonostante la semplificazione, il modello è ampiamente utilizzato.	

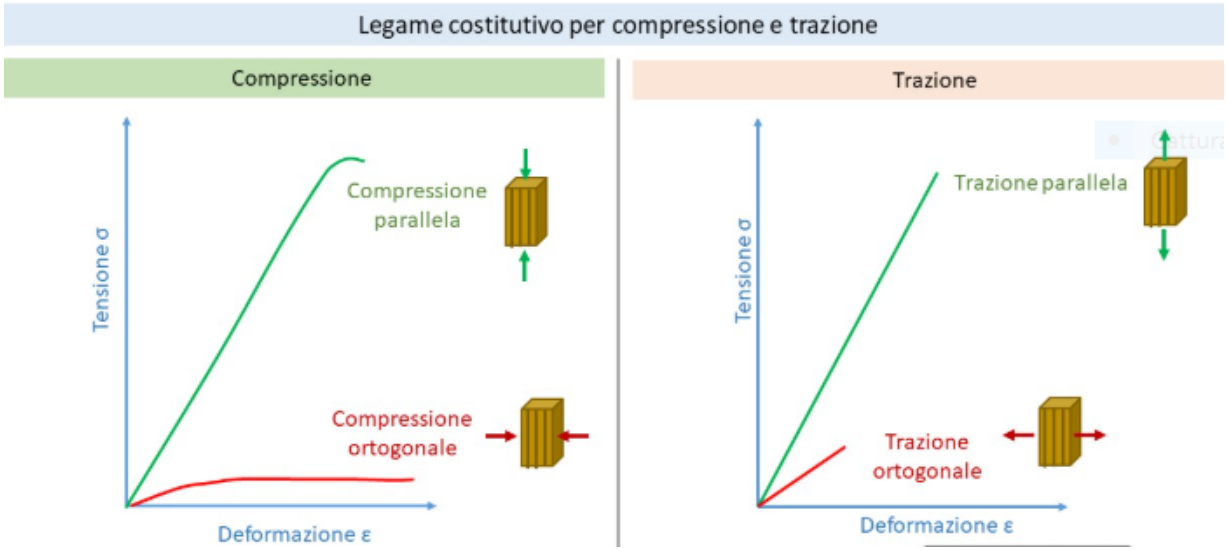
2. Modello di Bazan

Definizione analitica	*Diagramma*
$\sigma = E_w \cdot \varepsilon$ per $\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_t$ $\sigma = f_c + m \cdot E_w \cdot (\varepsilon - \varepsilon_c)$ per $\varepsilon < \varepsilon_c$ Il modello è più completo rispetto al precedente, senza tuttavia perdere i vantaggi della semplicità legati alla linearità. Una difficoltà è rappresentata dalla definizione del coefficiente $m<0$ che caratterizza la pendenza del tratto plastico ad incrudimento negativo (comportamento *softening*).	

3. Modello di O'Halloran

Definizione analitica	*Diagramma*
$\sigma = E_w \cdot \varepsilon$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon_t$ $\sigma = A \cdot \lvert\varepsilon\rvert^n + E_w \cdot \varepsilon$ per $\varepsilon_{cu} < \varepsilon < 0$ Tra quelli qui riportati, il modello fornisce la migliore descrizione del comportamento reale del legno a fronte di una relativa maggiore complessità del ramo a compressione, la cui definizione richiede l'assegnazione dei due parametri $A>0$ e $n>0$.	

I diagrammi tensione deformazione per il legno è il seguente



Per il calcestruzzo riportato nell'eurocode 2

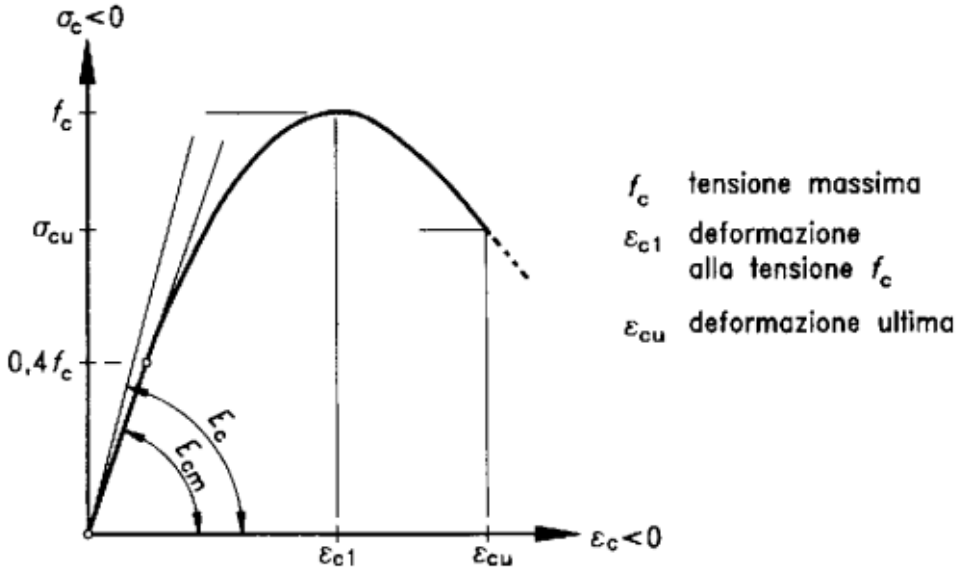
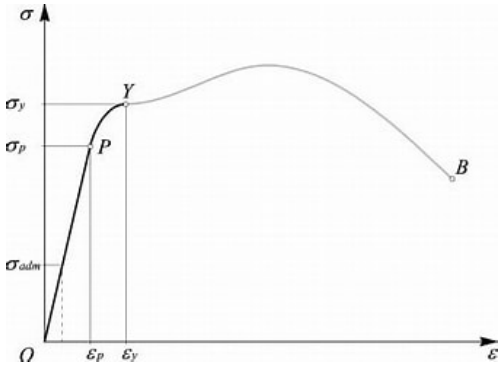
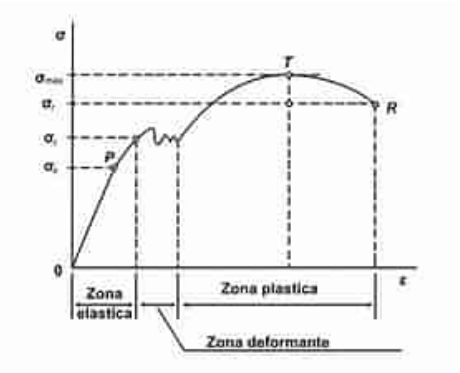


Fig. 3.1 – Diagramma tensioni-deformazioni per compressione monoassiale

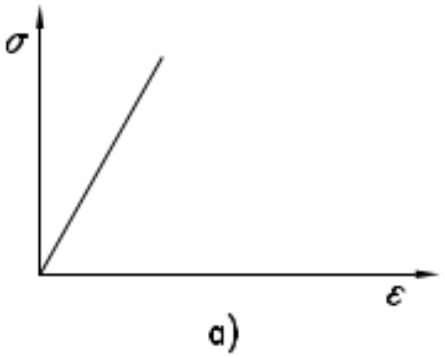
Per l'acciaio dalla prova a trazione :

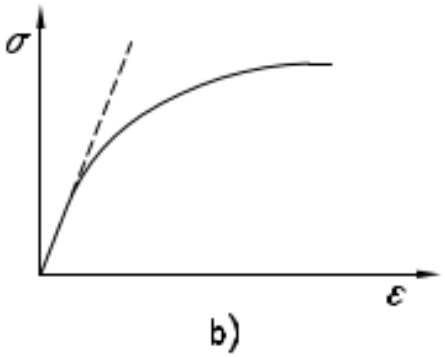




Per l'alluminio eurocode 9

a) Elastico lineare
b) Elastico non lineare

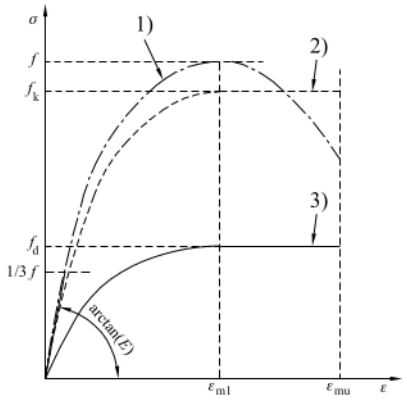




Per la muratura eurocode 6

Diagramma tensioni-deformazioni per la muratura in compressione

Legenda
1) Tipico
2) Diagramma ideale (parabola-rettangolo)
3) Diagramma di calcolo



Il legame polinomiale tensione deformazione approssima la curva tensione deformazione per il materiale sia a trazione che a compressione; si possono utilizzare polinomi di 4°,5°, 6° .....grado ,è una teoria già nota che trova applicazione nei software per la verifica delle sezioni

$\sigma_N = a_1*\varepsilon^3+a_2*\varepsilon^2+a_3*\varepsilon+a_4$
$\sigma_T = b_1*\varepsilon^3+b_2*\varepsilon^2+b_3*\varepsilon+b_4$

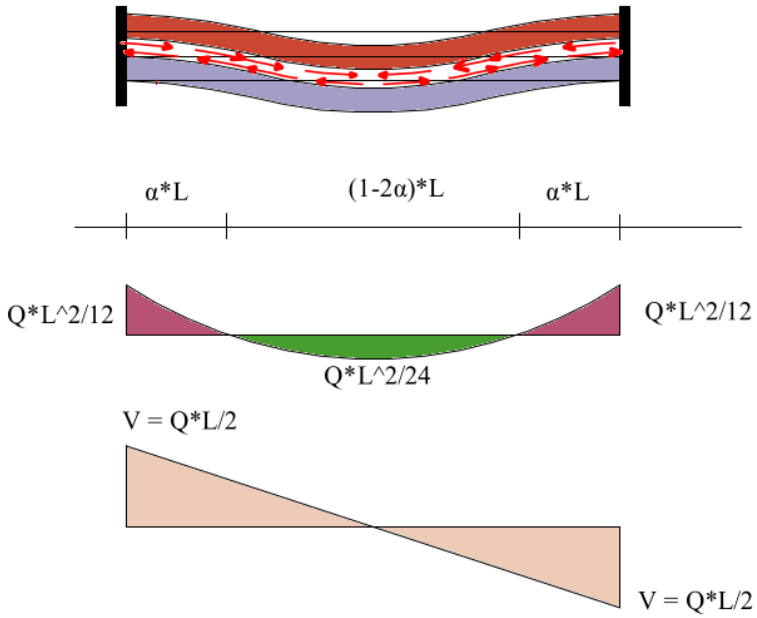
È evidente che nel calcolo delle risultanti degli sforzi di compressione e trazione su deve tener conto dei diversi materiali della sezione composta e dividere gli integrali con i relativi estremi ad ad esempio per sezione mista legno cls e acciaio cls

$\int \sigma_{NL}*dy + \int \sigma_{NCLS}*dy = \int \sigma_{TL}$; $\int \sigma_{NA}*dy + \int \sigma_{NCLS}*dy + \Sigma\sigma_{SI}*A_{si} = \int \sigma_{TA}$;

L legno , A acciaio Cls Calcestruzzo T trazione N compressione

3-La trave incastrata agli estremi

Per una trave incastrata agli estremi vi è un cambiamento di segno del diagramma dei momenti con inversione delle fibre tese e compresse e conseguente cambiamento di segno delle tensioni normali di compressione in mezzeria e trazione all'incastro , mentre il verso delle tensioni tangenziali resta lo stesso Se eseguiamo il calcolo della trave con sezione composta incastrata agli estremi attraverso la rigidezza equivalente sarebbe una trave a rigidezza variabile.



Il cambiamento di rigidezza equivalente è definito dai punti fissi del diagramma dei momenti ovvero dal parametro α che per carico uniformemente distribuito è un parametro invariabile sia della trave incastrata che delle travi continue.
La funzione momento :

$$M(z) = -Q*L^2/12 + Q*L/2*Z - Q*Z^2/2$$

Il momento è nullo alla ascissa

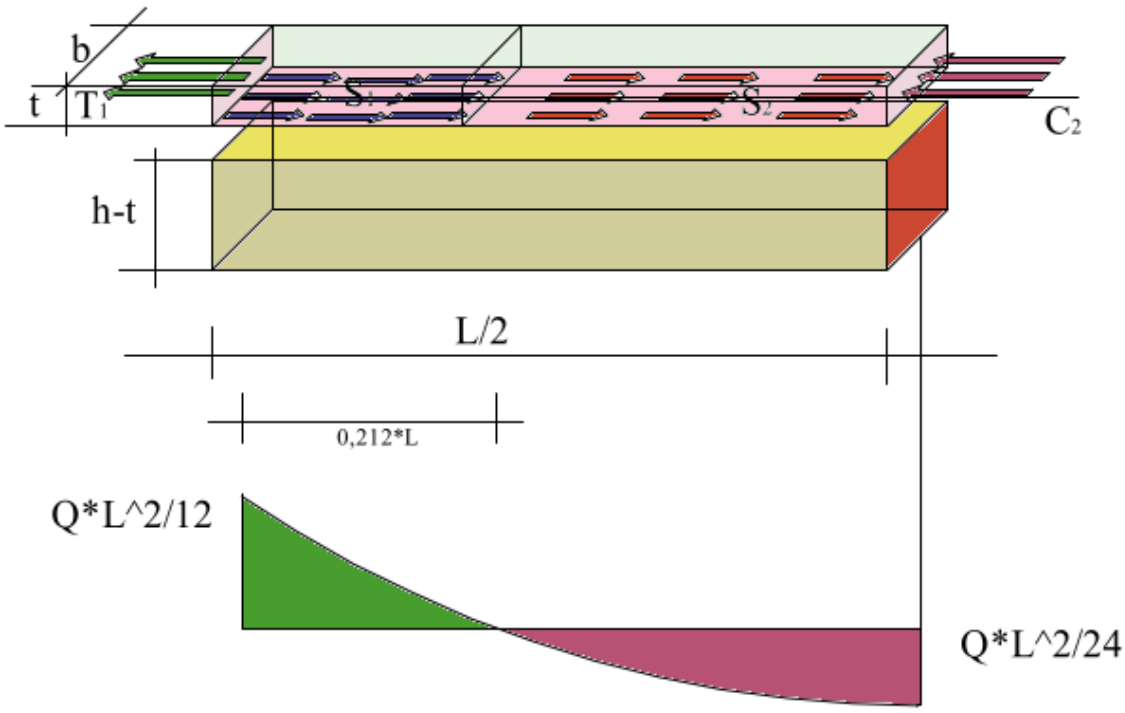
$$-Q*L^2/12 + Q*L/2*Z - Q*Z^2/2 = 0 \qquad -L^2/12 + L/2*Z - Z^2/2 = 0$$

$6Z^2 - 6\,Z*L + L^2 = 0$ *è una equazione di secondo grado*

$$Z = [6*L \pm (36\,L^2 - 24*L^2)^{1/2}]/2 = L*(6 \pm \sqrt{12})/12$$

$$\alpha = 0{,}212 \qquad \alpha = 0{,}788$$

Per il calcolo dello scorrimento e dei connettori facciamo riferimento al momento resistente ultimo della sezione



*Tra la trave isostatica su due appoggi e iperstatica con due incastri vi è differenza nel numero dei connettori nel tratto (0-0.212*L) e nel tratto (L/2-0.212*L) ;Lo scorrimento totale è analogo a quello di una trave su due appoggi con la unica differenza che varia l'interasse tra i connettori .*

$Q*L^2/8 = Q*L^2/12 + Q*L^2/24$

Il momento in mezzeria è pari a 0,333 di quello della trave su due appoggi , il momento all'incastro è invece 0,666 , vuol dire che rispetto ad una trave su due appoggi Se il passo tra i connettori è p , risulta per

$Z = 0$; $Z = 0,212*L$ *il passo p' = 2/3*p*

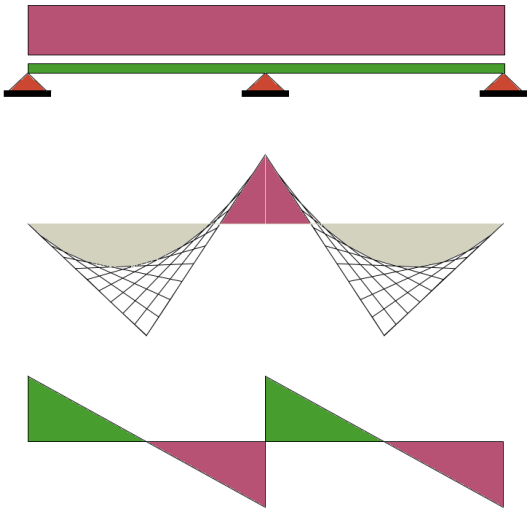
$Z = 0,212*L$; $Z = L/2$ *il passo p' = 1/3*p*

4-La trave continua

Per le travi continue si tratta di determinare i punti fissi per carico verticale Q costante , sistemi monodimensionali risolti tramite le equazioni di congruenza le cui soluzioni sono note e immediate :

-Trave su 3 appoggi luci uguali

$M = Q*L^2/8$; $R_A = 0,375*Q*L$; $R_B = 1,25*Q*L$; $R_C = 0,375*Q*L$;



La ascissa del punto di nullo del momento

$M(z) = 0,375*Q*L*z - Q*Z^2/2$; $0,25*Q*L*z - Q*Z^2/2 = 0$

$Z = 0$; $0,375*L - Z/2 = 0$ $\mathbf{z = 0,75*L = 3/4*L}$

La inversione delle fibre riguarda un tratto di trave avente lunghezza pari ad L rispetto ad una trave su due appoggi lo scorrimento è inalterato ed anche il passo tra i connettori.

-Trave su 3 appoggi luci disuguali

La equazione di congruenza è immediata

$Q*L_1^3/(24*EI) - M*L_1/(3EI) =- Q*L_1^3/(24*EI) + M*L_2/(3EI)$

$Q*L_1^3/24 - M*L_1/3 = -Q*L_2^3/24 + M*L_2/3$

$M = Q*(L_1^3+L_2^3)/ [8*(L_1+L_2)]$ *posto* $L = (L_1+L_2)$

$M = Q*(L_1^3+L_2^3)/8*L$

$R_A = Q*L_1 /2 - Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_1);$ $R_C = Q*L_2 /2 - Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_2);$

$R_B= Q*L_1 /2 +Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_1) +Q*L_2 /2 +Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_2)$

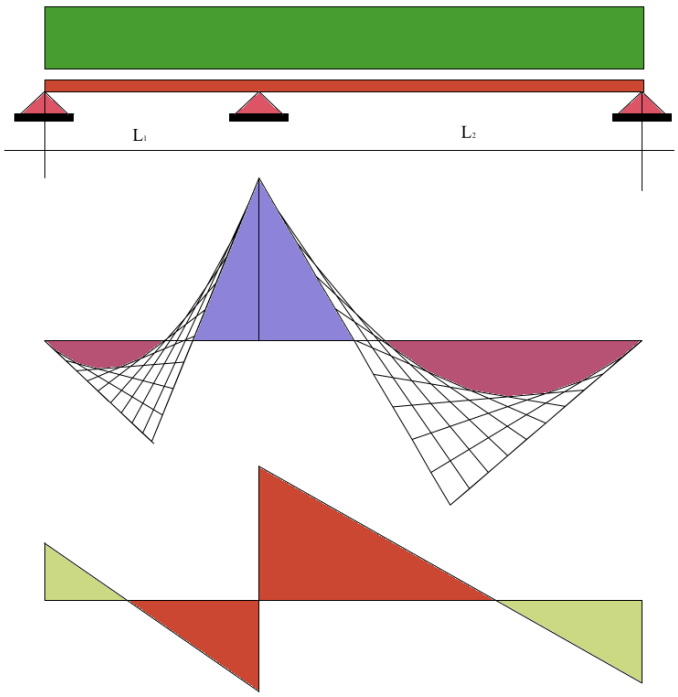
$R_B= Q*L +Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_1)+Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_2)$

$M(z) =[Q*L_1 /2 - Q*(L_1^3+L_2^3)/(8*L*L_1)]*z - Q*Z^2/2$

$z= 0$ $z = L_1 -(L_1^3+L_2^3)/(4*L*L_1)$ ***Prima campata***

Z da destra verso sinistra

$z= 0$ $z = L_2 -(L_1^3+L_2^3)/(4*L*L_2)$ ***Seconda campata***



-Trave su 4 appoggi luci uguali

Le 2 equazione di congruenza sono immediate

$Q*L_1^3/(24*EI) - M_2*L_1/(3EI) = - Q*L_2^3/(24*EI) + M_2*L_2/(3EI) + M_3*L_2/(6I)$

$Q*L_3^3/(24*EI) - M_3*L_3/(3EI) = - Q*L_2^3/(24*EI) + M_2*L_2/(6EI) + M_3*L_3/(3EI)$

Stante la simmetria strutturale e di carico i due momenti sono uguali $M_2 = M_3 = M$

$Q*L_1^3/24 - M_2*L_1/3 = - Q*L_2^3/24 + M_2*L_2/3 + M_3*L_2/6$

$Q*L_3^3/24 - M_3*L_3/3 = - Q*L_2^3/24 + M_2*L_2/6 + M_3*L_3/3$

$Q*L_1^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2*(L_1 + L_2)/3 + M_3*L_2/6$

$Q*L_3^3/24 + Q*L_2^3/24 = + M_2*L_2/6 + M_3*(L_2 + L_3)/3$

$Q*L^2/12 = 5*M/6$ $\mathbf{M = Q*L^2/10}$

$V_1 = 0,4*Q*L$; $V_{2S} = 0,6*Q*L$; $V_{2D} = 0,5*Q*L$;

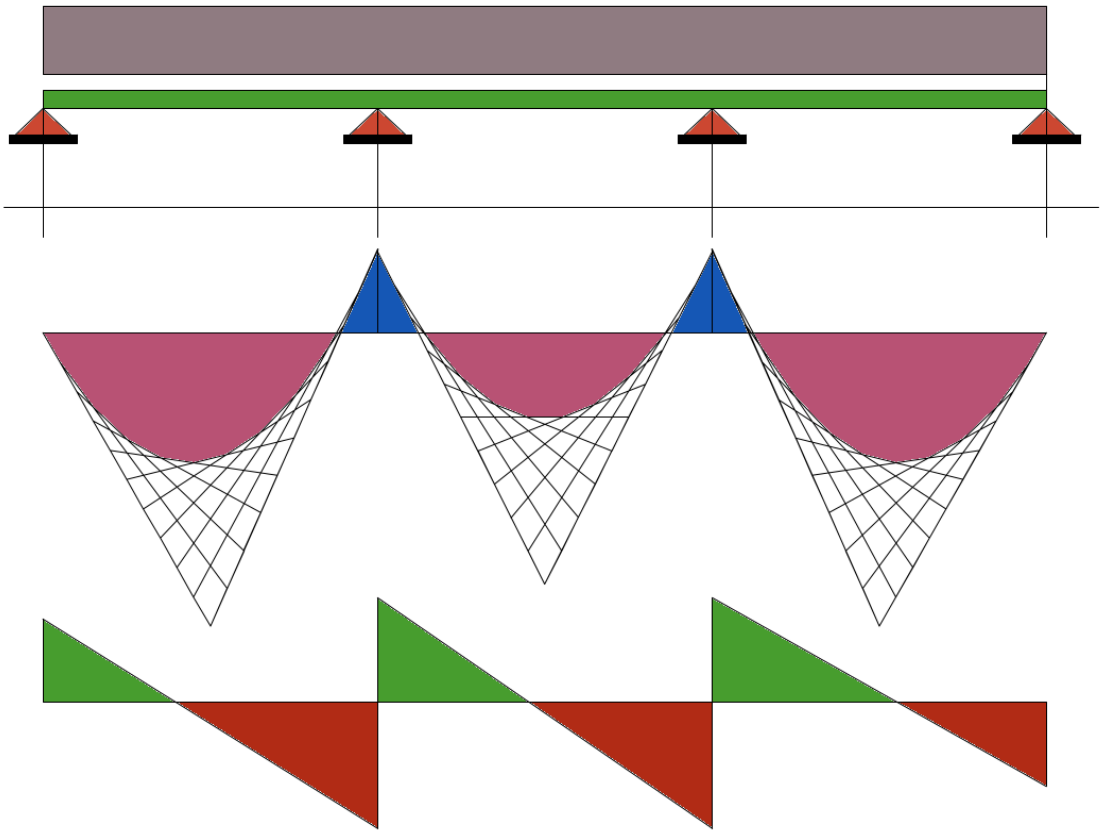
$V_{3S} = 0,5*Q*L$; $V_{3D} = 0,6*Q*L$; $V_4 = 0,4*Q*L$;

Ascisse punti fissi (simmetria)

$0,4*Q*L*z - Q*z^2/2 = 0$; $z = 0$ $\mathbf{z = 0,8*L}$

$0,5*Q*L*z - Q*z^2/2 - q*L/10 = 0$ $L*z/2 - z^2/2 - L/10 = 0$

$5*z^2 - 5*L*z + L = 0$ $z = \{+5*L \pm [25*L^2 - 20*L^2]^{1/2}\}/10$ $\mathbf{z = 0,7*L}$; $\mathbf{z = 0,3*L}$;



-Trave su 4 appoggi luci disuguali

Le 2 equazione di congruenza sono immediate

$Q*L_1^3/(24*EI) - M_2*L_1/(3EI) =- Q*L_2^3/(24*EI) + M_2*L_2/(3EI) + M_3*L_2/(6I)$

$Q*L_3^3/(24*EI) - M_3*L_3/(3EI) =- Q*L_2^3/(24*EI) + M_2*L_2/(6EI) + M_3*L_3/(3EI)$

$Q*L_1^3/24 - M_2*L_1/3 =- Q*L_2^3/24 + M_2*L_2/3 + M_3*L_2/6$
$Q*L_3^3/24 - M_3*L_3/3 =- Q*L_2^3/24 + M_2*L_2/6 + M_3*L_3/3$

$Q*L_1^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2*(L_1+ L_2)/3 + M_3*L_2/6$
$Q*L_3^3/24 + Q*L_2^3/24 =+ M_2*L_2/6 + M_3*(L_2+ L_3)/3$

Un sistema di 2 equazioni in due incognite

Esempio trave lunga 15 m $L_1 = 6$ m ; $L_2 = 5.25$ m ; $L_1 = 3.75$ m ;

$800*6\text{^}3/24 + 800*5.25\text{^}3^3/24 = M_2*(6 + 5.25)/3 + M_3*5.25/6$
$800*3.75\text{^}3/24 + 800*5.25\text{^}3/24 = M_2*5.25/6 + M_3*(5.25+3.75)/3$

$Q = 800$ daN/m $M_2 = 2891$*daN*m $M_3 = 1350$ *daN*m

La soluzione del sistema è stata trovata attraverso il software effe di X come intersezione di due rette

$V_1 = 0,5*Q*L_1 - M_2/L_1$; $V_{2S} = 0,5*Q*L_1 + M_2/L_1$;

$V_{2D} = 0,5*Q*L_2 + M_2/L_2 - M_3/L_2$ $V_{3S} = 0,5*Q*L_2 - M_2/L_2 + M_3/L_2$;

$V_{3D} = 0,5*Q*L_3 + M_3/L_3$; $V_4 = 0,5*Q*L_3 - M_3/L_3$;

Con la posizione $M = Q*L^2$; $\alpha*M_2 = M_3$ $\alpha = 0,467$

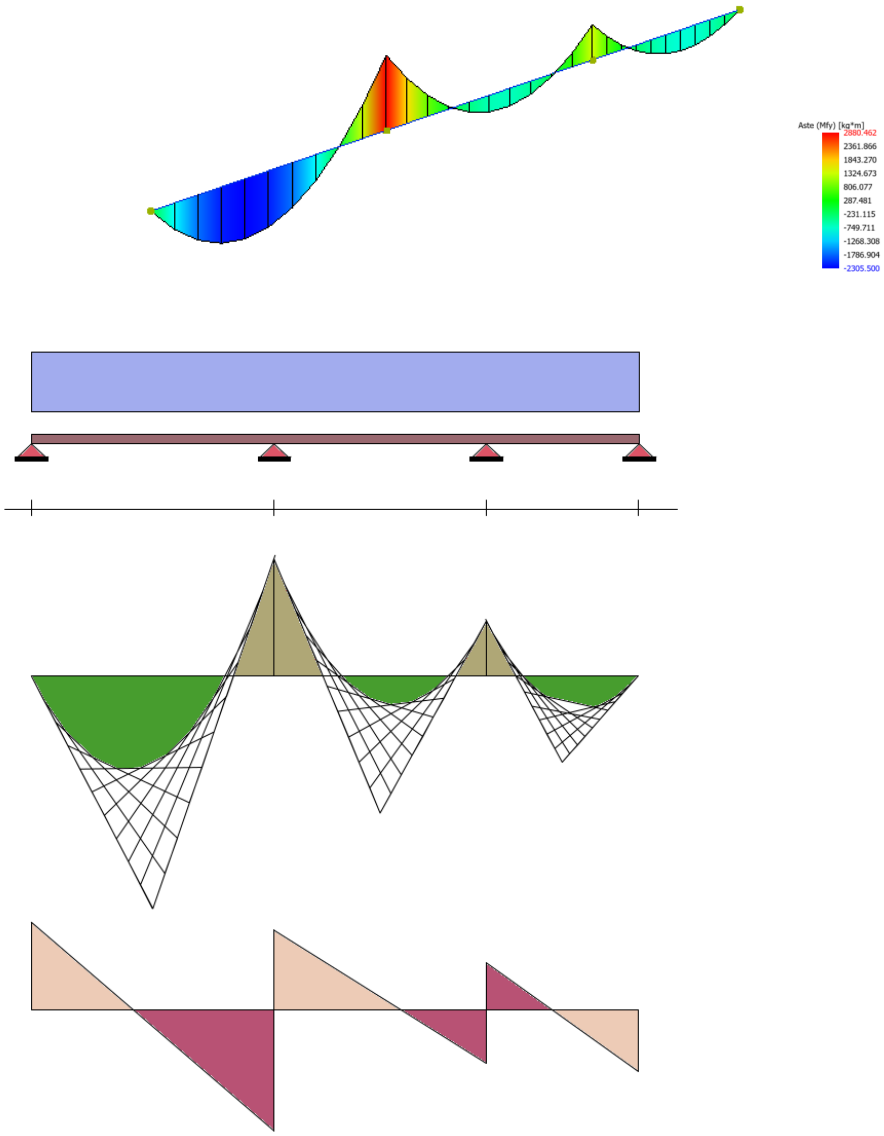
$Q*L_1^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2*(L_1+ L_2)/3 + \alpha*M_2*L_2/6$
$Q*L_3^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2*L_2/6 + \alpha*M_2*(L_2+ L_3)/3$

$Q*L_1^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2[(L_1+ L_2)/3 + \alpha**L_2/6]$
$Q*L_3^3/24 + Q*L_2^3/24 = M_2[L_2/6 + \alpha*(L_2+ L_3)/3]$

$(Q*L_1^3/24+Q*L_2^3/24)[L_2/6+\alpha*(L_2+L_3)/3]=(Q*L_3^3/24+Q*L_2^3/24)[(L_1+L_2)/3+\alpha*L_2/6]$

$\alpha=[2*(L_3^3+L_2^3)(L_1+L_2)-(L_1^3+L_2^3)*L_2]/[2*(L_1^3+L_2^3)(L_2+L_3) -(L_3^3+L_2^3)*L_2]$

Si può ricavare il momento $M_2 = (Q*L_1^3/24 + Q*L_2^3/24)/[(L_1+ L_2)/3 + \alpha*L_2/6]$



I punti fissi del momento *si ottengono dalla soluzione delle equazioni di II grado*

Prima campata

$M(z) = M_2 - [0{,}5*Q*L_1 - M_2 / L_1]*z + Q*z^2/2 = 0$

$z^2 - (Q*L_1 - 2*M_2 / L_1)*z + 2*M_2/Q = 0$

Seconda campata

$M(z) = M_2 - [0{,}5*Q*L_2 + (M_2 - M_3)/L_2]*z + Q*z^2/2 = 0$

$z^2 - [Q*L_2 + 2*(M_2 - M_3)/L_2]*z + 2*M_2/Q = 0$

Terza campata

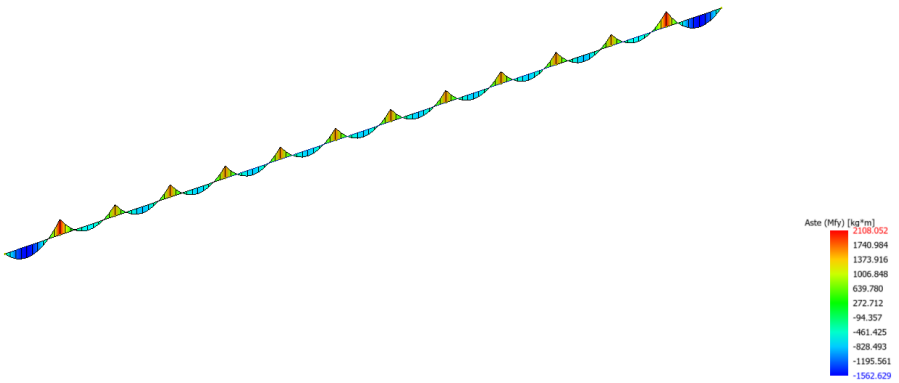
$M(z) = M_3 - [0{,}5*Q*L_3 - M_3 / L_3]*z + Q*z^2/2 = 0$

$z^2 - [Q*L_3 - 2M_3 / L_3]*z + 2*M_3/Q = 0$

-Trave su n appoggi luci uguali

*Per carico e schema statico simmetrico la trave di lunghezza infinita ha il comportamento di trave incastrata incastrata con momento sull'appoggio pari a $Q*L^2/12$; la trave ha una sua lunghezza finita pari a n*L dove n è il numero delle campate.*

$Q*L^2/12 = 1666$ daNm ; $Q*L^2/10 = 2000$ daNm ;



Il momento sul secondo appoggio $M= 2108 = Q*L^2/9,5= 2\ Q*L^2/19\approx$; $Q*L^2/10$
Il momento sul terzo appoggio $M= 1556 = Q*L^2/12,85= 10\ Q*L^2/1285\approx$; $Q*L^2/12$
Il momento sul quarto appoggio $M= 1700 = Q*L^2/11,75=4\ Q*L^2/47\approx$; $Q*L^2/12$
Il momento sugli appoggi centrali $M= 1670 = Q*L^2/12$

Per la campata i-ma con i 1,2,3 .....i .....n app i app i+1

La ascissa del punto fisso soluzione della equazione di II grado

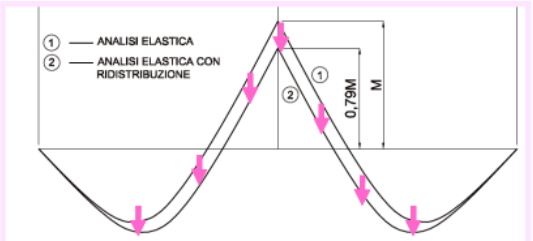
$M_i(z) = 0,5*Q*L_i*z - M_i - Q*z^2/2 = 0$ $z^2 - L_i*z + 2*M_i/Q = 0$

Nelle travi continue su più appoggi viene eseguita una ridistribuzione dei momenti flettenti; per sezioni miste acciaio-cls

Limiti di ridistribuzione dei momenti negativi **agli appoggi**, in termini di **riduzione percentuale del momento flettente iniziale**

Classe della sezione	1	2	3	4
Analisi fessurata	25%	15%	10%	–
Analisi non fessurata	40%	30%	20%	10%

Ovviamente la riduzione dei **momenti negativi** sugli appoggi comporta di conseguenza la variazione dei **momenti positivi** e dei **tagli** per soddisfare l'equilibrio statico.



Il calcolo dei connettori e dell'interasse va eseguito dalla mezzeria al punto fisso per la reazione delle tensioni di compressione e dal punto fisso all'appoggio per la reazione degli sforzi di trazione

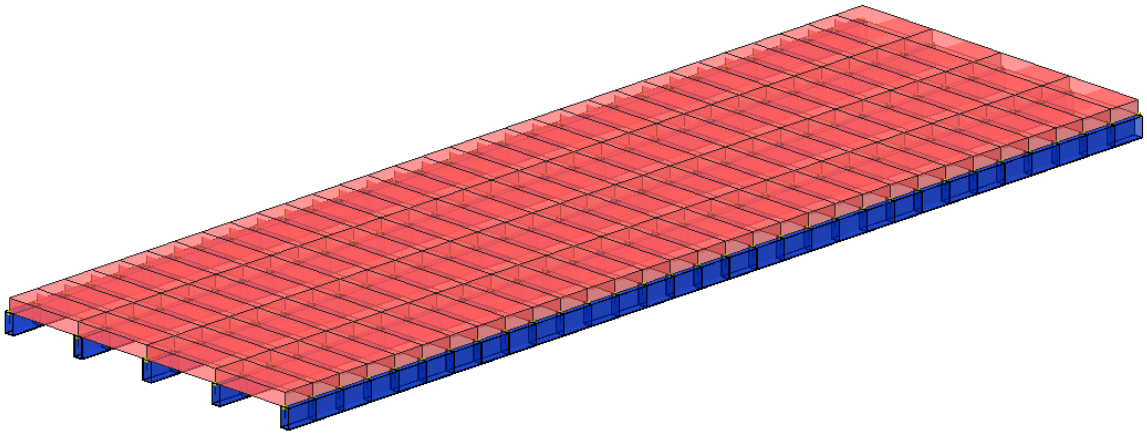
5- La rigidezza

*Si pone la problematica della variazione della rigidezza equivalente della sezione composta al cambio di segno del momento flettente ovvero alla inversione delle fibre tese e compresse; per una trave su due appoggi la soletta superiore è sempre compressa , viceversa per una trave iperstatica agli appoggi la soletta superiore è tesa vanno disposte armature metalliche per la trazione assieme alla rete elettrosaldata. La variazione di rigidezza è conseguente alla fessurazione del calcestruzzo , della quale non si tiene conto nel calcolo dei solai in cementi armato con travetti precompressi . Le NTC 2008 consigliavano di dimezzare la rigidezza degli elementi strutturali per tener conto della parzializzazione funzione del momento flettente negativo che varia con legge parabolica dal punto fino all'appoggio con fessurazione graduale. Per le NTC 2018 è necessari eseguire una analisi non lineare che tenga conto della fessurazione , alla fine per la esecuzione dei lavori ovvero metter in opera il solaio con i connettori la variazione di rigidezza è insignificante esclusivamente una formulazione teorica che può aver una sua rilevanza nella tecnica e scienza delle costruzioni in cantiere posizionare su una trave di solaio 10 connettori ad interasse 50 cm o 13 connettori a interasse 40 cm non incide nè su costi né sui tempi di montaggio del nostro solaio. (**Molto spesso i connettori vengono omessi**) Ai fini del calcolo teorico si può far riferimento ad una trave continua a rigidezza variabile , pari a 3/4*EI nella zona di momento negativo , fibre tese superiori e EI nella zona di momento positivo ,visto che i calcoli vengo eseguiti con software in esso già implementati. Per solai in legno con soletta superiore , hanno sempre un funzionamento a trave su due appoggi poichè il travetto di legno viene interrotto in corrispondenza dell'appoggio che è un cordolo di c.a,. o una trave legno , si ha continuità solo nella soletta superiore di calcestruzzo. Tali modellazioni si adattano a sezioni composte tipiche degli impalcati da ponte dove le travi di acciaio sono collegate da giunti corrispondenza di pile intermedie , si ha effettivamente un modello di trave continua su più appoggi ; nella zona compressa si può considerare la rigidezza della sezione composta acciaio cls , nella zona tesa solo la rigidezza delle travi in acciaio o eventualmente EI e α*EI con 0,5<α<1*



Si potrebbero progettare ponti ciclo-pedonali con travi in legno lamellare affiancate e soletta superiore di irrigidimento che hanno appoggi intermedi e tener conto della variazione di rigidezza equivalente.

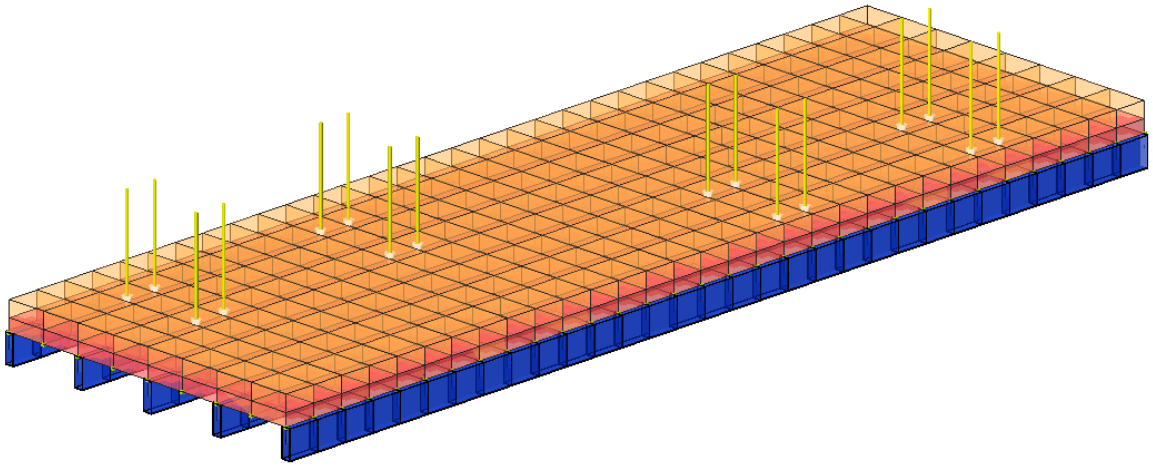
*Modelliamo un impalcato da ponte di larghezza 10 m lunghezza 2L= 30 m e appoggi intermedio , realizzato cm 5 travi in acciaio profilo rettangolare tubolare 30x90 x2cm e soletta superiore di 40 cm , per una altezza totale di 100 cm destinato al traffico veicolare , variando nella zona centrale (0,25*L) la rigidezza ovvero il modulo elastico dei pannelli di cls 3/4*E = 255000 daN/cmq ; E = 341000 daN/cmq per una fascia di 6 pannelli sull'appoggio centrale.*



Combinazioni di carico

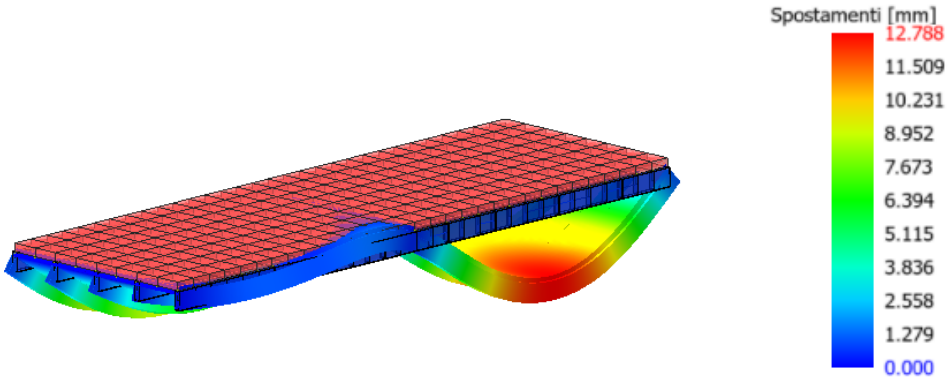
Carico distribuito 900 daN/mq su tutto il ponte
Carico tandem Q = 30000 daN 4 ruote 120x200 su una sola corsia

Carico distribuito 900 daN/mq su tutto il ponte
Carico tandem Q = 30000 daN 4 ruote 120x200 su due corsie

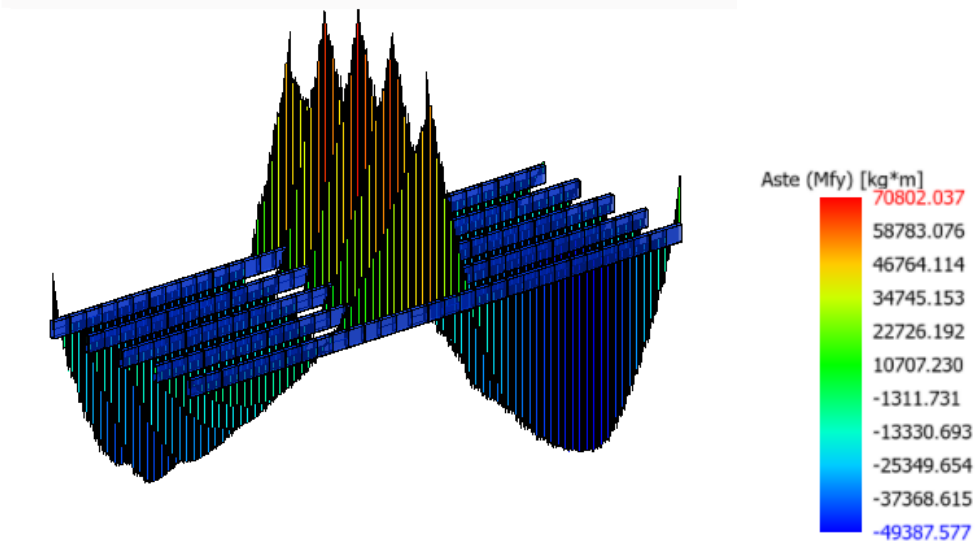


L'impalcato per questa condizione di carico è verificato , sia le travi di acciaio che la soletta di calcestruzzo .

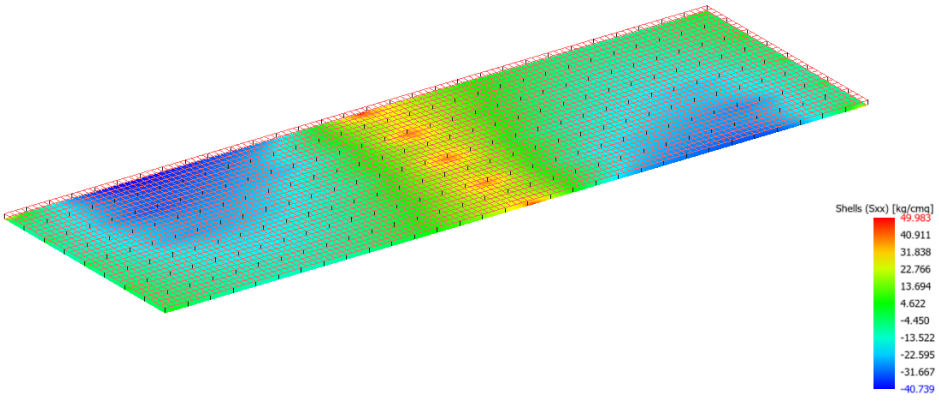
La freccia f < L/1000 =1,27 cm < 1,5 cm



I momenti sulle travi



Le tensioni normali sulla soletta S_{xx}



La modellazione eseguita per la sezione composta è rappresentativa del reale comportamento strutturale dell'impalcato ; ogni nodo di collegamento tra asta metallica e elemento ***plate- shell*** *vi è un connettore di rigidezza infinita che solidarizza la soletta superiore alle trave metalliche in più punti . Si può simulare anche la deformabilità del connettore attraverso un nodo incastro interno cedevole*

6-Conclusioni

La teoria statica delle travi composte in generale a sezione mista è argomento di studio della tecnica delle costruzioni utilizzando travi IPE in acciaio e soletta cls adatte per solai di edifici muratura impalcati da ponte o solai in lamiera gregata tipici di edifici acciaio; meno frequente è il calcolo del solaio misto legno cls forse più cultura nord europea scandinava , germanica , francese in Italia friuliana e altoatesina , raramente tra gli argomenti di tecnica delle costruzioni delle facoltà di ingegneria si affronta la progettazione di un solaio in legno con soletta collaborante in cls , fa parte dei programmi del corso di costruzioni in legno. Il calcolo della sezione mista come descritto nelle istruzioni CNR 10011 per l'acciaio veniva eseguito con il metodo alle tensioni ammissibili ipotesi di elasticità lineare omogeneizzando i due materiali determinando la sezione e l'interasse dei connettori attraverso il diagramma del taglio e lo scorrimento ovvero la risultante delle tensioni tangenziali nella interfaccia tra soletta di cls e profilo di acciaio, il recepimento degli eurocodici la introduzione anche nelle NTC 2018 di regole per la progettazione di strutture miste acciaio cls ha modificato il metodo di calcolo che sostanzialmente è lo stesso poiché la risultante delle tensioni di compressione eguaglia lo scorrimento complessivo come dalla formula jourawsky. Le travi iperstatiche con sezuione composta presentano una inversione delle fibre tese e comprese conseguenti al caanbiamento di segno del momento flettente, inoltre è stata rimossa per il calcolo della risultante delle tensioni normali la ipotesi di elasticità lineare approssimando il diagramma tensione deformazione ad una curva polinomiale. Ai fini della realizzazione pratica della struttura mista cambia ben poco, mettere in opera travi metalliche e realizzare al di sopra un getto di completamento in cls con connettori è distante anni luce da queste formulazioni teoriche, nella pratica professionale il calcolo , lo si esegue con software che verificano la sezione composta fornendoci l'interasse e il diametro dei connettori. E' interessante il progetto di grigliati di travi in lamellare con soletta di cls superiore collaborante adatte per solai intermedi di grande luce e per coperture. Sostanzialmente tra una trave appoggia e appoggiata e una trave continua su più appoggi non cambia nulla, nella modellazione si può tener conto dei punti fissi ed eventualmente variare la rigidezza ad esempio per impalcati da ponte che funzionano a trave continua in funzione del grado di fessurazione della soletta superiore; in fase di calcolo e inserimento dati nel software basta variare il modulo elastico del cls per gli elementi plate shell in zona tesa circa 0,2 L ,* ***(0,5E ÷3/4E)*** *modellando la trave composta di luce 10 m con 20 aste di lunghezza 50 cm e 20 elementi plate-shell la cui larghezza è pari a quella della soletta collaborante determinando la forza orizzontale nel nodo di collegamento tra asta elemento plate-shell in base alla quale dimensionare il connettore.*

La trave : dal De Saint Venant al modello FEM

1-Introduzione

2-La elasticità lineare:formulazione de Saint Venant

3-Diagrammi σ-ε dei materiali : rappresentazione polinomiale

4-Flessione semplice

5-Flessione deviata

6- Pressoflessione retta e deviata

7-Taglio

8-Torsione

9- I materiali non reagenti a trazione

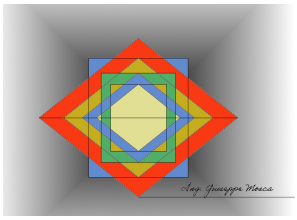
10- Le sezioni in cemento armato

11- Il calcolo delle frecce

12- Le sezioni di forma qualsiasi

13- La statica grafica

14- Conclusioni





N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

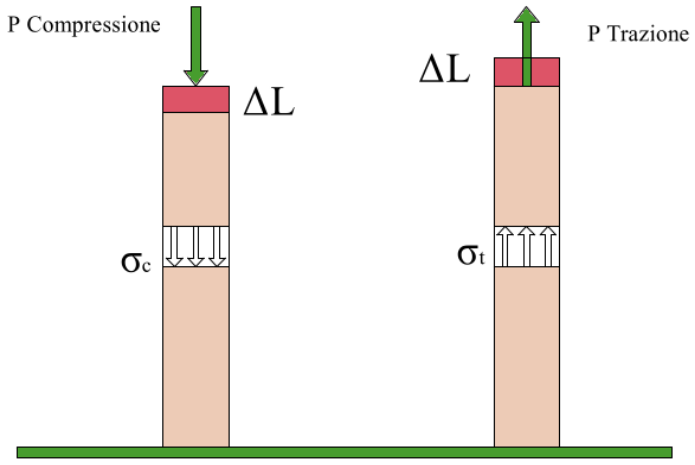
1-Introduzione

La teoria del De Saint Venant formulata nel XIX secolo in Francia risolve la problematica dello stato tensionale in una tronco di trave , ovvero un elemento monodimensionale caricato sulle due basi libere e privo di forze superficiali , definendo attraverso la soluzione di un sistema di equazioni differenziali le sollecitazioni semplici trazione compressione flessione tagli torsione nella ipotesi di isotropia omogeneità e elasticità lineare del materiale . La formula di ***Navier*** *, le formula di* ***jourawsky*** *le formule per la torsione vengono ancora utilizzate dopo molti anni per la verifica di travi in legno e per lo stato limite di servizio. L'obiettivo di questo articolo è la rimozione della ipotesi di elasticità lineare , rimanendo ferma la ipotesi di conservazione delle sezioni piane ovvero che nella sezione il diagramma delle deformazioni sia lineare , approssimando attraverso un polinomio di grado 2° , 3° 4° 5° ..... il diagramma tensione deformazione del materiale. La soluzione per le differenti sollecitazioni viene perseguita attraverso semplici equazioni di equilibrio delle tensioni alla traslazione rotazione come per il calcolo allo stato limite ultimo ,utilizzando il calcolo integrale , inizialmente per materiale isotropo omogeneo con stesso comportamento a trazione e compressione , per poi passare ai materiali non resistenti a trazione , al calcestruzzo armato e alle sezioni composte. La teoria è non lineare poiché varia il modulo elastico in funzione dello stato tensionale , viene affrontato il problema del calcolo della deflessione ovvero della freccia di travi semplici quali mensola , trave su due appoggi, trave incastrata agli estremi , le rotazioni e le frequenze fondamentali di vibrazione con un approccio non lineare .Se con le formule e la relative alle sollecitazioni semplici in ipotesi di elasticità lineare la verifiche venivano eseguite con la statica grafica e calcolatrice , adesso si utilizzano dei software di matematica attraverso i quali è possibile risolvere equazioni polinomiali , con il teorema degli zeri o sistemi di equazioni di gradi superiore al primo mediante l' intersezione grafica. Sono delle soluzioni matematiche dove si gioca con integrali e polinomi nulla di mostruoso , per anni la scienza delle costruzioni non solo in Italia ma anche in Francia è stata tacciata di maniacalità, materia ostica alla quale attraverso campagne diffamatore da parte del sistema scolastico, della tv e di certa sinistra era preferibile studiare filosofia lettere storia ect subendone da parte mia un vero e proprio disagio etichetta sociale stigma fonte di esclusione. Le medesime forme di persecuzione le ebbe* ***Stephan Timoshenko*** *in Ukraina in Russia e poi emigrò negli Stati Uniti; di questa limitazione imposta alla persona derivante dalla cultura a me non interessa più di tanto anche cambiando argomentazioni come ambiente naturale ecologia architettura design restauro di edifici storici ect, la esclusione il disagio è lo stesso non dipende dalla tendenza culturale ovvero dal contenuto delle materie oggetto di approfondimento e studio ovvero non è un regime culturale ma un potere clientelare sociale politico che si avvale anche della usura sanitaria , mezzi di stampa che stabilisce e definisce la classe sociale di appartenenza delle persone , il lavoro reddito la condizione di vita ect interferendo negativamente nella vita privata e professionale , poteri baronali professionali lobby anche religiose ect che decidono della condizione di vita delle persone .*

2-La elasticità lineare:De Saint Venant

Le formule del De Saint Venant per il concio di trave e generale per l'elemento modimensionale le ricaviamo da equazione di equilibrio di equilibrio nella ipotesi di elasticità lineare del materiale isotropia e omogeneità .

-Compressione e trazione semplice



$\sigma = P/A \quad ; \quad \varepsilon = \sigma/E = P/(EA) \quad ; \quad \Delta L = \varepsilon * L = \sigma * L/E = PL/(EA) \quad ;$

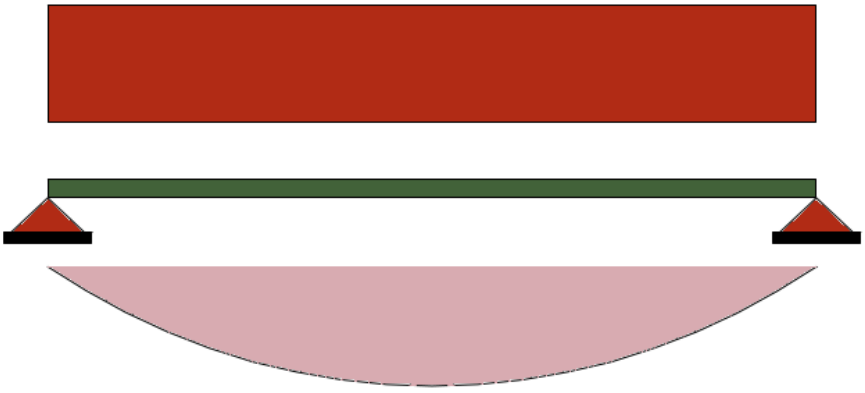
P sforzo normale di trazione o compressione A area della sezione

E modulo elastico ; ΔL allungamento K = EA/L rigidezza assiale

Le tensioni per carico concentrato assumono un valore costante ad una distanza pari alla meta della larghezza del pilastro ipotizzando per esse una diffusione a 45°

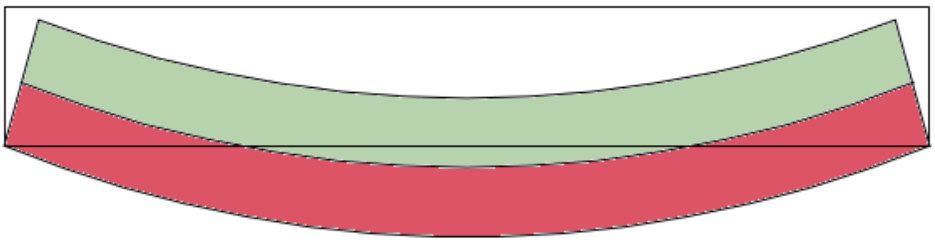
-Flessione semplice

$M = QL^2/8$ in mezzeria della trave

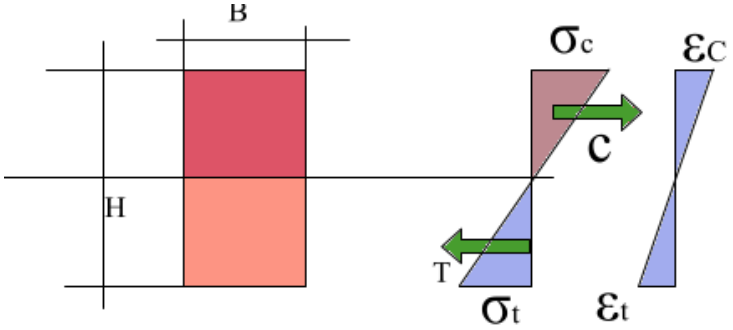


La trave si deforma le fibre compresse sono quelle superiori mentre le fibre tese quelle inferiori

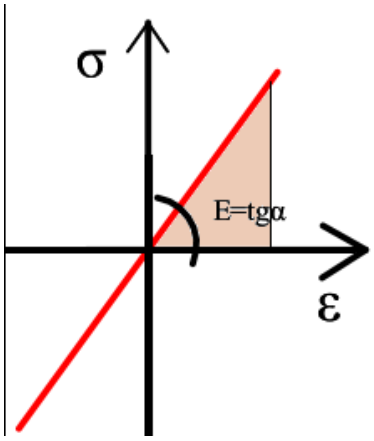
Deflection $f = 5/384 * Q * L^4/EI$



Nella parte superiore si hanno tensioni compressione i quella inferiore di trazione; Le fibre superiori si accorciano quelle inferiori si allungano



Il diagramma tensioni deformazioni è lineare



L'equilibrio alla traslazione e alla rotazione delle tensioni normali

C = T ; $\sigma_C * b * X/2 = \sigma_T * b * (H-x)/2$

M= C*d = T*d *d braccio coppia interna*

$M = \sigma_C * b * X/2 * 2/3 * X = \sigma_T * b * (H-x)/2 * 2/3 * (H-X)$

La ipotesi è che il materiale abbia lo stesso comportamento sia a trazione che a compressione ; $\sigma=\sigma_C=\sigma_T$

$b*x/2 = b*(H-x)/2 \qquad b*x = b**H/2 \;;\; x = H/2$

$M = \sigma_C*b*X/2*\ 2/3*X = \sigma_C*b*H/4*\ 2H/3 = \sigma_C*b*H^2/6 = \sigma_C*W$

W modulo di resistenza $W = 2*I/H \quad M = 2*\sigma_C*I/H$ *I momento di inerzia*

La tensione varia con legge lineare lungo la sezione $\sigma(y) = \sigma_C*y*(H/2)$

$\sigma(y) = \sigma_C*y*(H/2) = y*(H/2)*M*H/(2*I) = M/I*y$

$\sigma(y) = M*y/I$ ***formula di Navier***

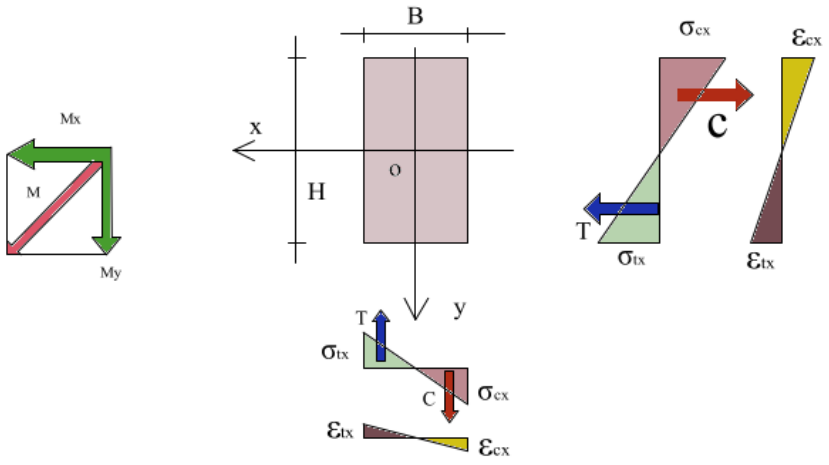
Le deformazioni $\varepsilon = \sigma/E = M*y/(EI)$; M/EI *curvatura della sezione*

La rotazione $\Delta\varphi = 2*\varepsilon/H = M/(EI)$

-Flessione deviata

Per la flessione deviata utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti nelle due direzioni x e y

$\sigma_Y = M_X*y/I_X \;;\; \sigma_X = M_Y*x/I_Y \;;$



Le tensioni sono normali al piano della sezione e si sommano ovvero

$\sigma = M_X*y/I_X + M_Y*x/I_Y \;;$

Per il caso più generale di momento flettente M risultante dei due momenti nelle 2 direzioni la equazione della retta passante per la origine del sistema di riferimento asse neutro della sezione

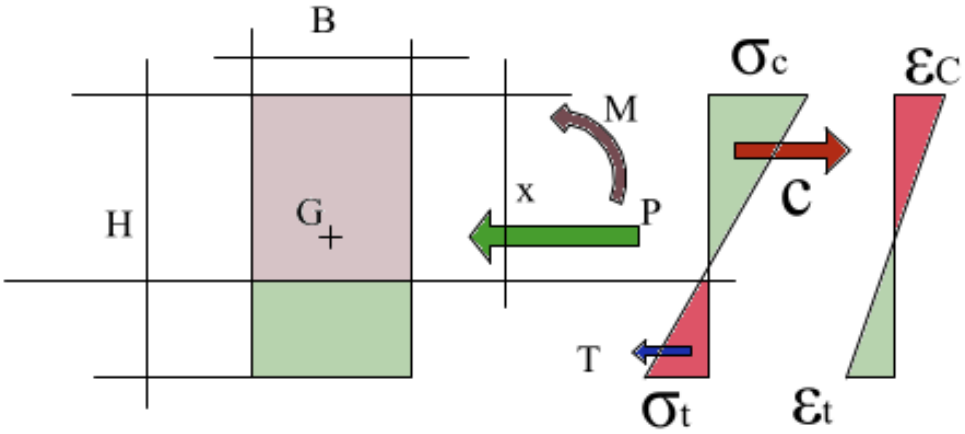
$M_X * y/I_X + M_Y * x/I_Y = 0 \quad y = m*x \quad ; m = M_Y/M_X * I_X/I_Y$

$m = tg\alpha$ α *angolo di inclinazione asse neutro rispetto ad x*

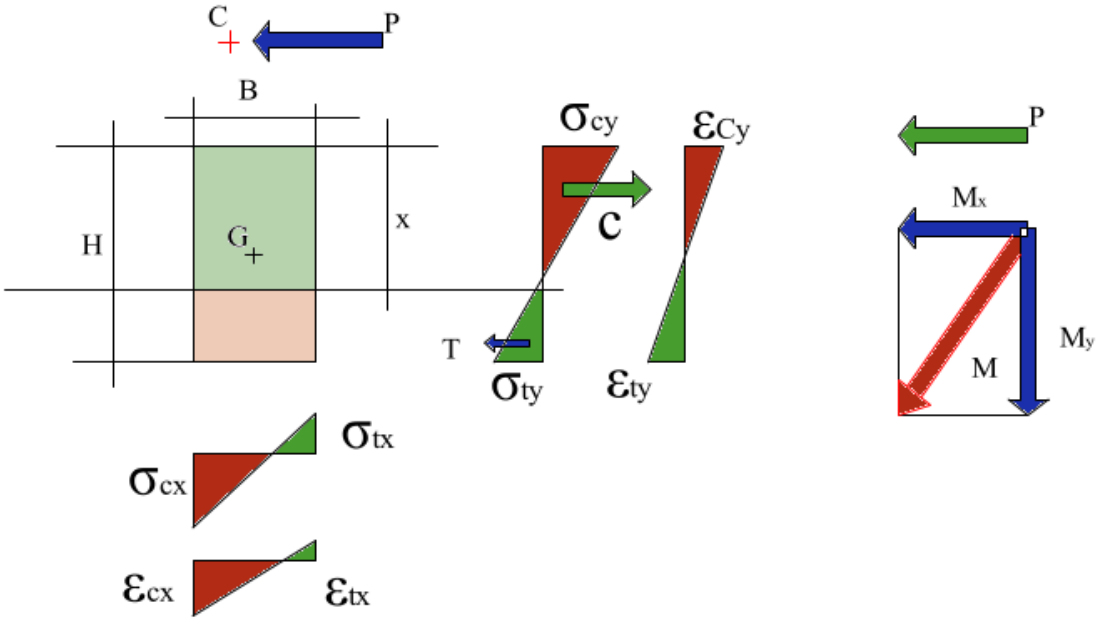
-Pressoflessione retta e deviata

La pressoflessione è caratterizzata dalla presenza nella sezione dello sforzo normale Per semplice sovrapposizione degli effetti , somma di un diagramma a farfalla per la flessione retta ed uno costante per la compressione , e per la pressoflessione deviata

$\sigma = P/A \pm M/I * y$ ***Pressoflessione retta*** $e = M/P$



$\sigma = P/A \pm M_X * y/I_X \pm M_Y * x/I_Y$ ***Pressoflessione deviata*** $e_X = M_X/P$; $e_Y = M_Y/P$;



L'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

C - T= P *;* $\sigma_C*b*x/2 - \sigma_T *b*(H-x)/2 = P$

L'asse neutro sempre orizzontale per ragioni di simmetria non è più baricentrico; nella equazione di equilibrio vi sono due incognite la tensione σ_C *e la x; la equazione di equilibrio la rotazione intorno al baricentro geometrico della sezione;scriviamo una ulteriore equazione di equilibrio alla rotazione delle tensioni normali rispetto all'asse di sollecitazione.*

$M = C*d_{CY} + T*d_{TY}$ *lo sforzo normale P è applicato nel baricentro geometrico*

$0 = C*d_{CX} + T*d_{CY}$

$d_c = 2/3x$ *distanza del punto di applicazione di C dall'asse neutro*

$d_t = 2/3*(H-X)$ *distanza del punto di applicazione di T da*

$M = \sigma_C*b*x^2 /3+\sigma_T*b*(H-x)^3/3+P*(x-H/ 2)$ *dall'asse neutro*

Il sistema di equazioni in 2 incognite ξ *e* σ_C

$x = \xi *H$ *;* $\sigma_T = \sigma_C*(H-x)/x$ *;* $\sigma_T = \sigma_C*(\xi-1)$

$\sigma_C*b*x/2 - \sigma_T *b*(H-x)/2 = P$

$\sigma_C*b*x^2 /3+\sigma_T*b*(H-x)^3/3 + P*(x-H/ 2) = M$

$\sigma_C*\xi - \sigma_C*\xi (\xi-1)^2 = 2P/(bH)$

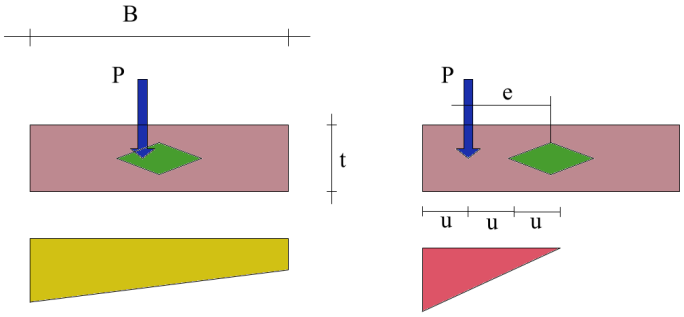
$\sigma_C*(\xi *H)^2 +\sigma_C*(\xi *H)^3(\xi-1)^4 =3* M/b + 3/2*P/b*(\xi *H)(\xi-1)$

Il sistema lo risolviamo trovando le coordinate dei punti di intersezione delle due curve nel piano σ_C-ξ

$\sigma_C*\xi - \sigma_C*\xi (\xi-1)^2 = 2P/(bH)$

$\sigma_C*(\xi *H)^2 +\sigma_C*(\xi *H)^3(\xi-1)^4 -3/2*P/b*(\xi *H)(\xi-1)=3*M/b$

Per i materiali non reagenti a trazione , le formule di verifica utilizzate per le murature e per il terreno sono arcinote per sezione rettangolare



Per $e \leq b/6$ $\sigma = P/A \pm M/I*y$

per $e > b/6$ sezione reagente 3u con $u = b/2-e$ $\sigma = 2P/(3tu)$

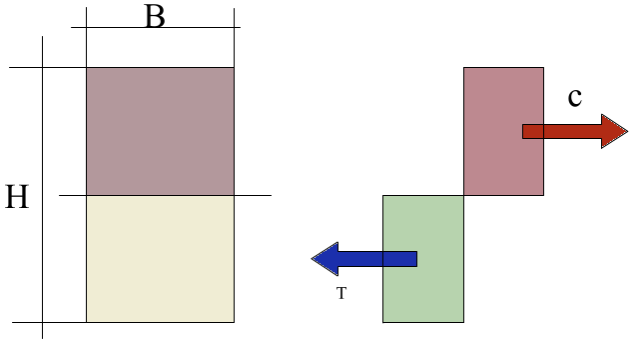
La sezione reagente si ricava da semplici considerazioni di equilibro

$P = \sigma * t*x/2$; $M = P*e$; $\sigma = 2P/(xt)$

Le formule di verifica per materiale elastoplastico ideale e plastico

Il momento resistente plastico di una sezione rettangolare

$M_{PL} = \sigma*B*H^2/4$; $\sigma = M/W_{PL}$;

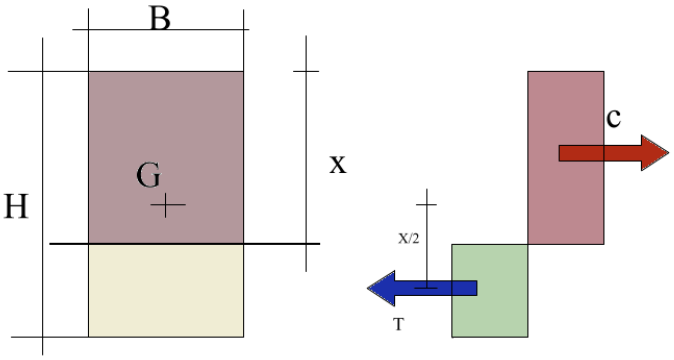


Per pressoflessione le equazioni di equilibrio

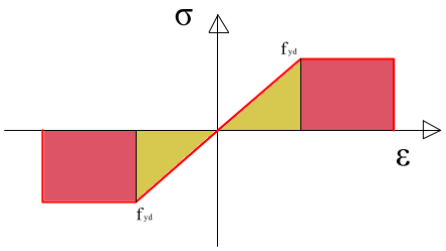
$\sigma*B*x - \sigma*B(H-x) = P$ per acciaio $x = [P-f_{yd}*H*B]/(2*f_{yd}*B)$

Il momento plastico della sezione calcolato rispetto al baricentro geometrico

$M_{PL} = f_{yd}*B*x*(H-x)/2 + f_{yd}*B*(H-x)*x/2$



Per diagramma elastoplastico ideale

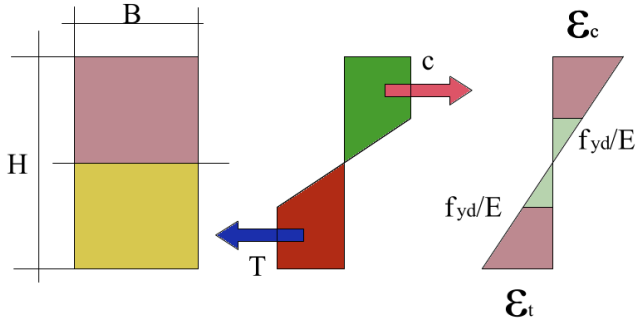


Il momento plastico della sezione per ***flessione retta***

$$\varepsilon_e = f_{yd}/E \;; \qquad \varepsilon_e/d = 2*\varepsilon_c/H \qquad \varepsilon_e*H = d*2*\varepsilon_c$$

$$d = \varepsilon_e*H/(2*\varepsilon_c) \qquad \varepsilon_e = f_{yd}/E = 375/(1.15*206000) = 0{,}00158 \qquad \varepsilon_c = 1\% = 0{,}01$$

Il calcolo del momento elastoplastico prevede l'attingimento al lembo teso e compresso della max deformazione che per l'acciaio è pari a 0,01

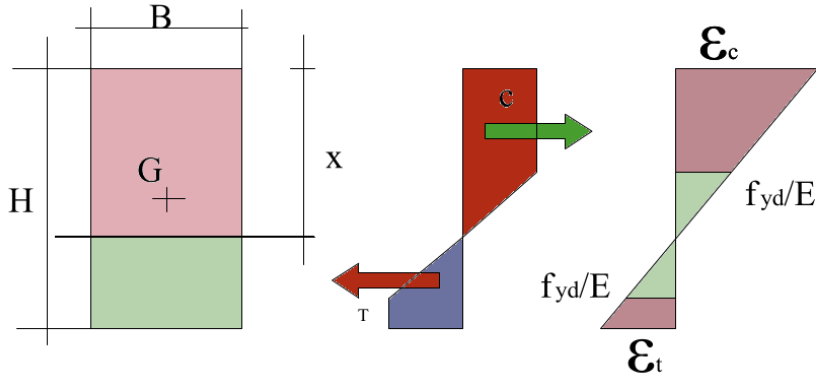


d= 2,36 cm H = 30 cm

$$T = C = f_{yd}*B*H/2 - f_{yd}*B*d/2 = f_{yd}*B/2*(H-d)$$

$$M_{PL} = f_{yd}*B*H^2/8 - f_{yd}*B*d^2/3 = f_{yd}*B*(H^2/8 - d^2/3)$$

Pressoflessione



$C-T = P \qquad f_{yd}*B*x - f_{yd}*B*d/2 - [f_{yd}*B*(H-x) - f_{yd}*B*d/2] = P$

$2x - d - 2(H-x) + d = 2*P/(B*fyd) \qquad x = H/4-P/(2*B*fyd)$

La rottura per pressoflessione corrisponde alla max deformazione a compressione

$\varepsilon_c=1\%=0,01 \qquad d= \varepsilon_e*H/(2*\varepsilon_c) \qquad d= 2,76 \ cm \quad H = 35 \ cm$

Il momento plastico della sezione pressoinflessa , rispetto al baricentro geometrico

$M_{PL} = C*d_c + T*d_t$

$C=f_{yd}*B*x/2-f_{yd}*B*d/2 \ ; \quad T=[f_{yd}*B*(H-x) - f_{yd}*B*d/2] \qquad x= H-2P/(B*fyd) \ ;$

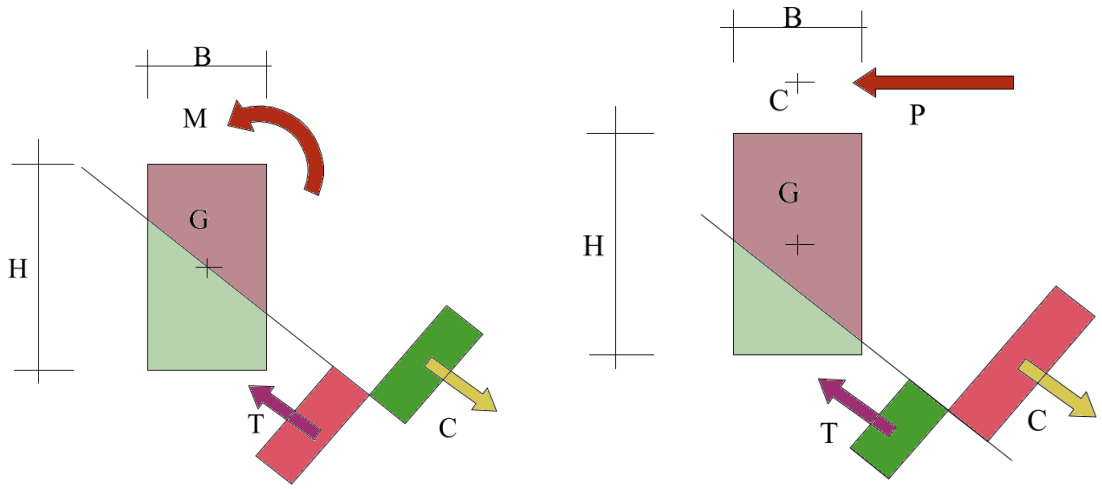
d_c *distanza della risultante degli sforzi di compressione dal baricentro geometrico*
d_T *distanza della risultante degli sforzi di trazione dal baricentro geometrico*

$M_{PL} = C_1*d_{1c} - C_2*d_{2c} + T_1*d_{1T} - T_2*d_{2T}$

$M_{PL} = f_{yd}*B*x^2/2 - f_{yd}*B*d^2/3 + [f_{yd}*B*(H-x)^2/2 - f_{yd}*B*d^2/3]$

$d_{1c} = x/2 \ ; \quad d_{2c} = 2/3*d \ ; \quad d_{1T} = (H-x)/2 \ ; \quad d_{2T} = 2/3*d$

Il momento plastico della sezione per ***flessione e pressoflessione deviata***



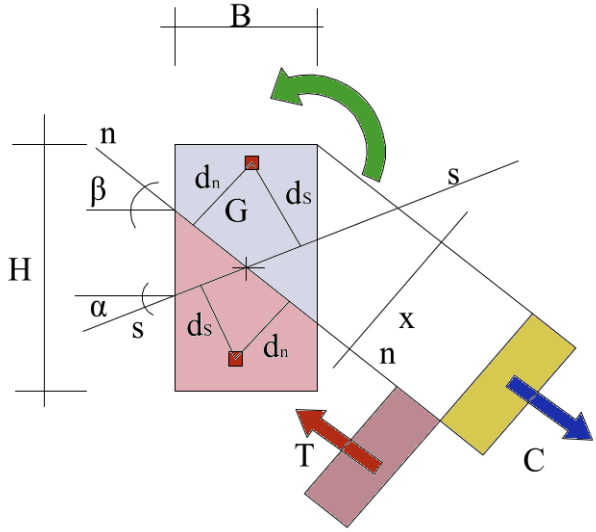
$f_{yd}*A' = f_{yd}*A''$ *area tesa pari all'area compressa per flessione deviata*

$f_{yd}*(A'-A'') = P \ ; \qquad (A'-A'') = P/f_{yd}$ *pressoflesione*

La posizione dell'asse neutro è individuata dalla profondità e dalla direzione
L'equilibrio alla rotazione intorno all'asse di sollecitazione baricentrico individuato dalla direzione del momento flettente sull'orizzontale α

$\int f_{yd}*d_s*dA' + \int f_{yd}*d_s*dA'' = 0$

*La incognita è la equazione dell'asse neutro il suo coefficiente angolare m = tgβ per flessione deviata , ovvero la profondità x = B*sinβ*



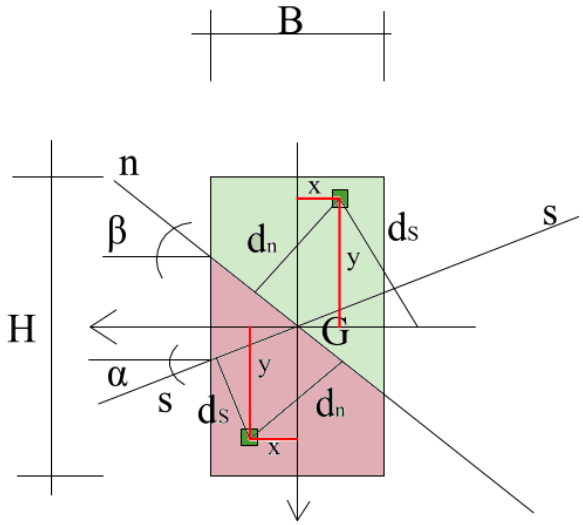
$\iint f_{yd}*d_s\,dA' - \iint f_{yd}*d_s\,dA'' = 0 \quad \iint f_{yd}*d_s dxdy - \iint f_{yd}*d_s dxdy = 0$;

è un integrale doppio il dominio

$-B/2 \le x \le B/2$ $y = x*tg\beta$ *in un sistema di riferimento di assi x e y*

area compresa $x*tg\beta \le y \le H/2$ *area tesa* $-H/2 \le y \le x*tg\beta$

$d_s = (y-x*tg\alpha)*sin\alpha$; $d_n = (y-x*tg\beta)*sin\beta$;



$\iint (y-x*tg\alpha)*sin\alpha*dxdy - \iint (y-x*tg\alpha)*sin\alpha*dxdy = 0$

Dalla risoluzione dei 2 integrali integrali doppi ricaviamo tgβ in funzione dell'angolo α ovvero la inclinazione dell'asse neutro funzione della direzione del momento flettente note le caratteristiche geometriche della sezione e la inclinazione dell'asse si sollecitazione si trova il valore gradi o radianti dell'angolo α

$tg\alpha = M_X / M_Y$

Dalla retta di equazione $y = x*tg\beta$ su ricavano le coordinate dei punti di intersezione con il perimetro della sezione $y = \pm B/2*tg\beta$ in modo da definire l'area compressa e quella tesa. Il momenti plastico

$M_{PL} = \iint f_{yd}*d_N\, dA' - \iint f_{yd}*d_N\, dA'' = \iint f_{yd}*d_N\, dxdy - \iint f_{yd}*d_N\, dxdy$

$M_{PL} = f_{yd}*[\iint (y-x*tg\beta)*sin\beta\, dxdy - \iint (y-x*tg\beta)*sin\beta\, dxdy]$

Gli integrali sono estesi al dominio

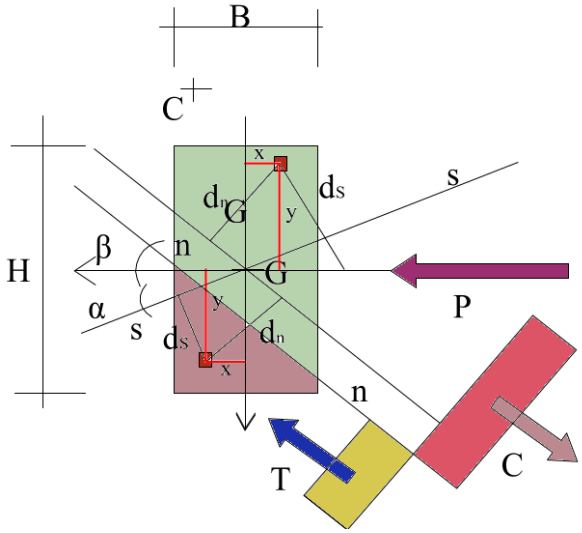
$-B/2 \le x \le B/2$ *area compresa* $x*tg\beta \le y \le H/2$ *area tesa* $-H/2 \le y \le x*tg\beta$

Per la ***pressoflessione***

$\iint_{A1} dxdy - \iint_{A2} dxdy) = P/f_{yd}$ *traslazione tensioni normali*

$\iint f_{yd}*d_s dxdy - \iint f_{yd}*d_s dxdy = 0$; *rotazione asse di sollecitazione baricentrico*

Un sistema di due equazioni nelle due incognite tgβ e d profondità asse neutro .



$M_X = P*e_X$; $M_Y = P*e_Y$; $(e_X; e_Y)$ *coordinate centro di sollecitazione*

La equazione dell'asse neutro $y = mx+n$; $m = tg\beta$; $n = d*cos\beta - H/2$

Distanza del vertice estremo compresso dall'asse neutro d

Il momento plastico calcolato rispetto ad un asse passante per il baricentro G, P lo sforzo normale è applicato in G

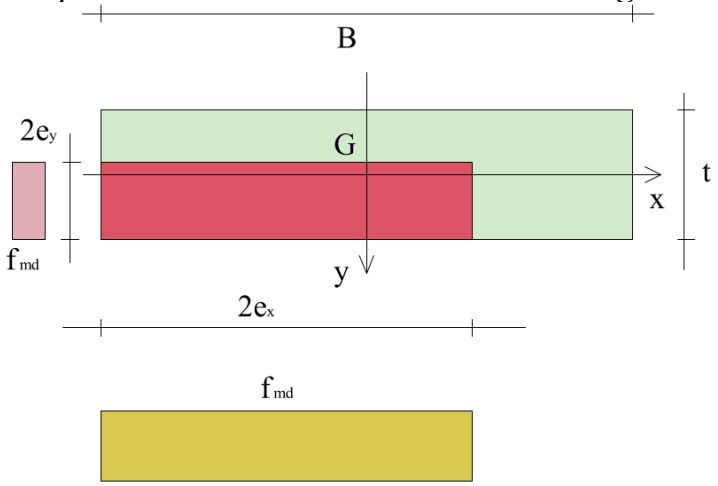
$M_{PL} = \iint f_{yd} * d_N \, dxdy - \iint f_{yd} * d_N \, dxdy$

Gli integrali sono estesi al dominio

$-B/2 \leq x \leq B/2 \qquad x * tg\beta + d * cos\beta - H/2 \leq y \leq H/2$ *area compresa*

$-B/2 \leq x \leq B/2 \qquad - H/2 \leq y \leq x * tg\beta + d * cos\beta - H/2$ *area tesa*

La verifica a ***pressoflessione deviata*** *di un materiale non reagente a trazione quale una parte di muratura con sezione rettangolare*



$u_X = b/2 - M_{XZ}/P_X$; $uz = t/2 - M_{XX}/P_X$;

lo sforzo normale $N_X = 4 * u_X * u_Z * \alpha * fcd$

$M_{XZ} = (b/2 - u_X) * 4 * u_X * u_Z * \alpha * fcd = N_X * b/2 * (1 - 2 * u_X/b) = N_X * b/2 * [1 - N_X/(2 * b u_Z * \alpha * fcd)]$

$M_{XX} = (t/2 - u_Z) * 4 * u_X * u_Z * \alpha * fcd = N_X * t/2 * (1 - 2 * u_Z/t) = N_X * t/2 * [1 - NX/(2 * t u_X * \alpha * fcd)]$

$u_X = N_X/(2 * \alpha * fcd * u_Z); \qquad u_Z = N_X/(2 * \alpha * fcd * u_X)$

si considerano le due aree reagenti $2 * u_Z * b$, $2 * u_X * t$

definiamo un rapporto tra i due momenti di calcolo

$M_{XZ}/M_{XX} = (b - 2u_X)/(t - 2u_Z) = \delta$

$u_X = 1/2 * [b - \delta * t * (1 - 2uZ/t)]; \qquad 4 * u_X * u_Z = 2 * u_Z * [b - \delta * (t - 2u_Z)]$

$u_Z = 1/2[t - b * (1 - 2uX/b)/\delta] \qquad 4 * u_X * u_Z = 2 * u_X * [t - (b - 2u_X)/\delta]$

$t*u_X = 1/2*[b*t- \delta*t(t-2u_Z)]$ $b*u_Z = 1/2*[b*t- b/\delta*(b-2u_X)]$

$2*t*u_X +\delta*t(t-2u_Z)=b*t$ $2*t*u_X -2*t*u_Z = b*t- \delta*t/2$

$2*b*u_Z +b/\delta*(b-2u_X)= b*t$ $-b/\delta*2u_X +2*b*u_Z = -b2/\delta+b*t$

$A = b*t$ $2*b*u_x -2*b*u_Z = A*b/t -A*\delta = A*(b/t-\delta)$ *)

*moltiplichiamo per b/t Sommando la *) con la seconda equazione cambiata di segno*

$2*b*ux - b/\delta*2uX = A*(b/t-\delta) +A- b2/\delta$

$u_X = [A*(b/t-\delta) +A- b2/\delta]/[2b*(1-\delta)]$

moltiplichiamo la seconda equazione per $t*\delta/b$

$-2*t*u_X+2t*\delta\ u_Z = -A*(t*\delta/b -1)$

sommando le due equazioni $2t*\delta\ u_Z - 2*t*u_Z = A-\delta*t2 - A*(t*\delta/b -1)$

$u_Z = [A-\delta*t2 - A*(t*\delta/b -1)]/ [2t*(\delta-1)]$

le formule dei due momenti resistenti nelle due direzioni :

$M_{XZRD} =N_X*b/2*[1-N_X/(2*bu_Z*\alpha*fcd)]$

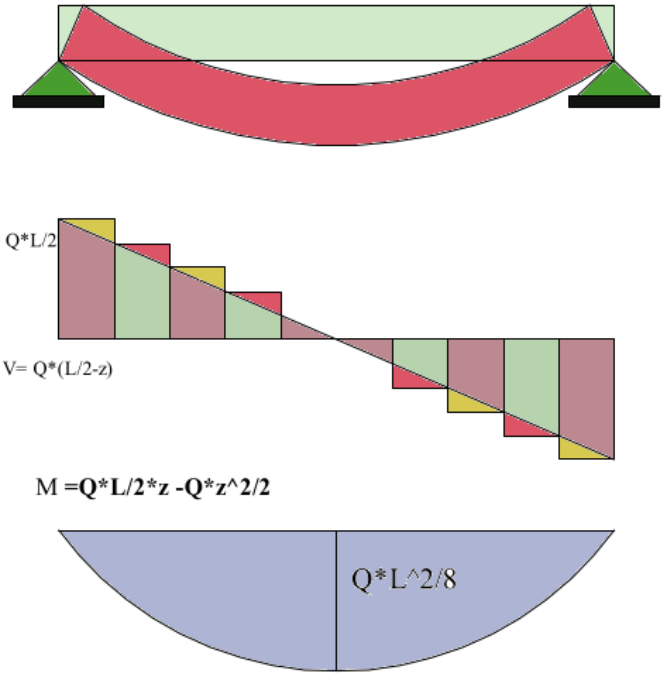
$M_{XXRD} =N_X*t/2*[1-N_X/(2*tu_X*\alpha*fcd)]$

$u_X = [A*(b/t-\delta) +A- b2/\delta]/[2b*(1-\delta)]$;

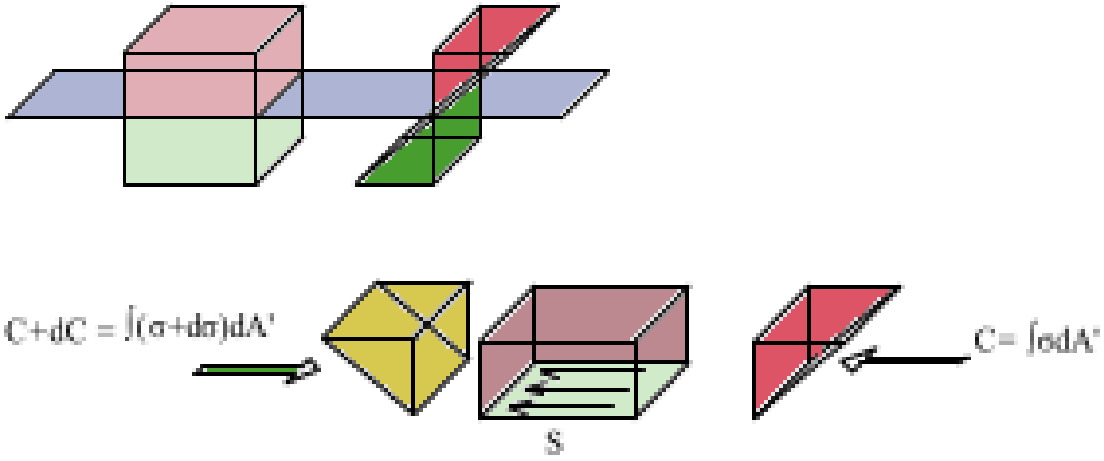
$u_Z = [A-\delta*t2 - A*(t*\delta/b -1)]/ [2t*(\delta-1)]$

Taglio

Il calcolo delle tensioni tangenziali nella ipotesi di elasticità lineare per sezione rettangolare lo si esegue attraverso la trattazione di jourawsky , per una trave appoggiata appoggiata



Considerando il concio di trave avente lunghezza Δz , nella ipotesi di diagramma a farfalla le tensioni tangenziali sull' asse neutro $\tau = 1,5*V/A$ calcolate attraverso l'equlibrio alla traslazione orizzontale tra tensioni normali e tangenziali;



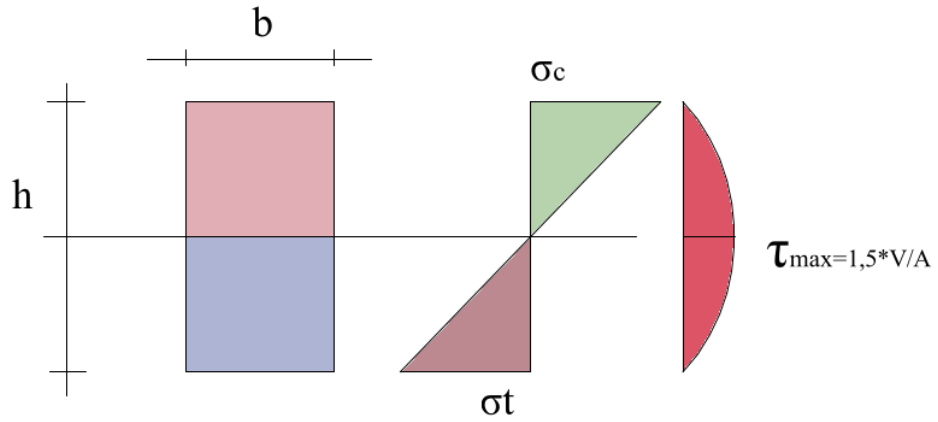
Lo scorrimento $S = \tau*\Delta z*b = \int d\sigma dA$; la tensione normale $\sigma = M/I*y$ ***(Navier)***

$T(z) = dM(z)/dz$; $d\sigma = dM/I*y$ $\tau*dz*b = \int dM/I*y \; dA$;

$\tau*b = dM/dz/I*\int y \; dA$ $\tau*b = T*S_n/I$ ovvero $\tau = T/I* S_n/b$

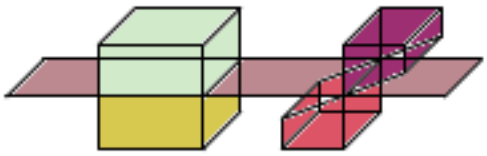
S_n momento statico rispetto alla corda , b larghezza corda

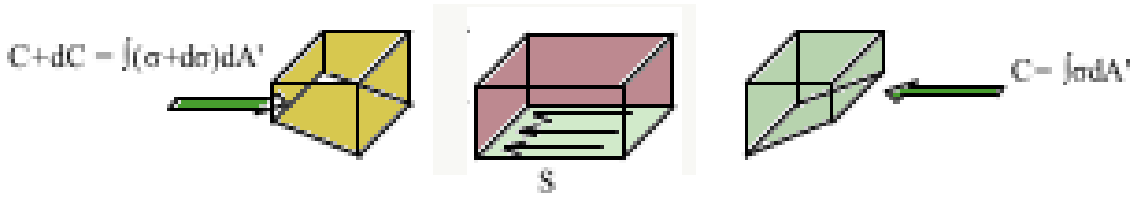
Sull'asse neutro $I = b*H^3/12$; $S_n = b*H^2/8$ $\tau = 1{,}5*T/A$



La tensione tangenziale varia con legge parabolica $\tau(y) = T*b*(h/2-y)^2//(2I*b)$

Se l'andamento delle tensioni è elastoplastico ideale





L'equilibrio alla traslazione orizzontale

dσ= 0 nel tratto di tensione costante

Lo scorrimento $S = \tau*\Delta z*b = \int d\sigma dA$; *la tensione normale* $\sigma = M/I*y$ ***(Navier)***

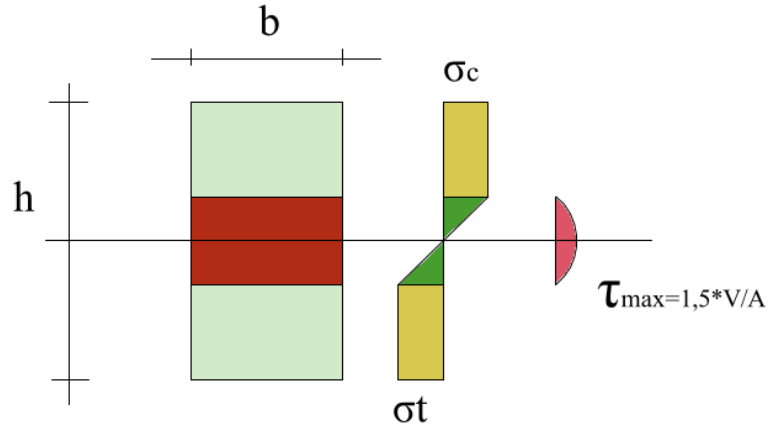
$T(z) = dM(z)/dz$; $d\sigma = dM/I*y$ $\tau*dz*b = \int dM/I*y\ dA$;

$\tau*b = dM/dz/I*\int y\ dA$ $\tau*b = T*S_n/I$ *ovvero* $\tau = T/I*S_n/b$

S_n *momento statico dell'area di tensione normale variabile , b larghezza corda*

Sull'asse neutro $I = b*H^3/12$; $S_n = b*H^2/8$ $\tau = 1{,}5*T/A$

L'area A è quella in figura rossa per acciaio $A = b*d$ $d = fyd*h/(E*0{,}01)$

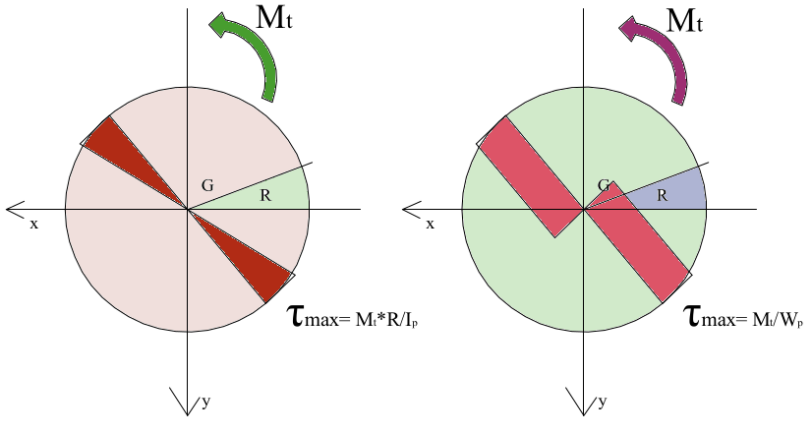


Il taglio $V_{RD} = I*b*\tau_{RD}/S_n \leq V_{SD}$

Torsione

Il calcolo a torsione lo eseguiamo inizialmente per sezione circolare e rettangolare per poi passare a sezioni alla Bredt e per sezione aperta.

Sezione circolare



Nella ipotesi di elasticità lineare diagramma τ-γ lineare con modulo di elasticità tangenziale G , il diagramma nella sezione è a farfalla , si applica il teorema di Guldino
Circonferenza descritta dal baricentro del triangolo $4/3*R*\pi$
Risultante tensioni tangenziali $\tau*R/2$,
Distanza del punto di applicazione dal centro $2/3*R$

$I_P = I_X + I_Y = \pi*R^4/2$ *momento di inerzia polare*

$M_T = 4/9* R^4*\pi * \tau/2 = 4/9* \tau*I_P /R \qquad \tau=\psi*M_T*r/I_P$

dove r *coordinata polare lungo* $0 \leq r \leq R$

La deformazione associata alla tensione tangenziale

$\gamma = \tau/G$, *l'angolo specifico di torsione* $\theta' = \psi*\gamma*R = M_T/(G*I_P) = 9/4*M_T/(G*I_P)$

$\Psi = 9/4$ *fattore di torsione funzione della geometria della sezione* $\gamma = \theta'*r$

$\tau = G*\gamma = G*r*9/4*M_T/(G*I_P)$; $\tau = \psi*M_T*r/I_P$;

Per due sezioni poste a distanza L il valore della rotazione torsionale

$\theta = L*\theta' = \psi*M_T*L/(G*I_P)$ *per il taglio lo spostamento* $\Delta = \chi*V*L/(G*A)$

La rigidezza torsionale della nostra asta

$K_T = (G*I_P)/(L*\psi)$; *il fattore di torsione viene trascurato a vantaggio di statica*

$\tau = M_T*r/I_P$ *si utilizza una formula analoga a quella di Navier*

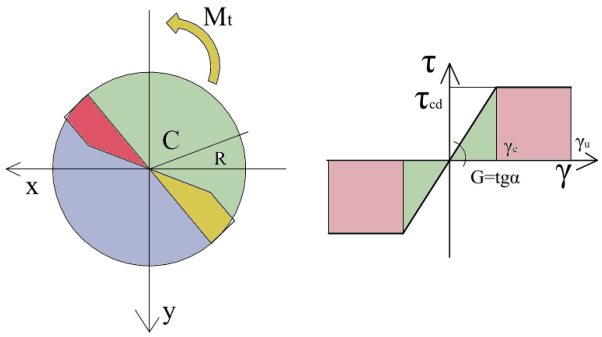
Per plasticizzazione della sezione ovvero tensione tangenziale costante

Circonferenza descritta dal baricentro del rettangolo $R*\pi$
Risultante tensioni tangenziali $\tau*R$,
Distanza del punto di applicazione dal centro R

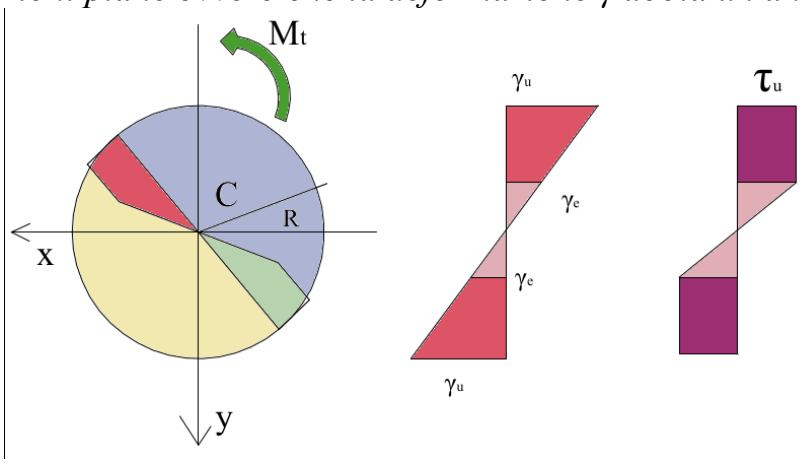
$M_{TPL} = \pi*\tau*R^3 = 2*\tau*W_{TPL}$ *dove il modulo di resistenza a torsione* $W_{TPL} = I_P/R$

$W_{TPL} = \pi*R^3/2$ $I_P = \pi*R^4/2$

L'andamento delle tensioni tangenziali o il flusso dello stato tensionale di travi con sezioni sollecitate da momento torcente viene studiato per analogia idrodinamica o di membrana, ovvero all'interno della sezione viene fatto circolare acqua dove le traiettorie definiscono le linee di flusso delle tensioni. Per sezioni circolari e a corona circolare tali curve sono delle circonferenze concentriche dove la tensione tangenziale va associata alla velocità che è maggiore sulla circonferenza di bordo. La ipotesi di elasticità lineare ci consente di considerare la legge di variazione della τ *lungo i, raggio lineare con diametro a farfalla. Possiamo considerare un diagramma elasto-plastico ideale*



Per la verifica della sezione si ipotizza valido il principio di conservazione delle sezioni piane ovvero che la deformazione γ abbia un andamento lineare



Per una sezione di acciaio dai criteri di resistenza $\tau = f_{yd}/\sqrt{3} = 391/\sqrt{3} = 225 N/mmq$

La max deformazione tangenziale $\gamma_U = 0{,}01*E/(\sqrt{3}*G) = 0{,}015$; $\gamma_E = 0{,}0028$

$G=E/[2*(1+1/m)] = 79230\ N/mmq$ *modulo di Poisson* $1/m = 0{,}3$ *per acciaio*

La distanza $d = R*0{,}0028/0{,}015 = 0{,}1867*R$ *; il momento torcente resistente*

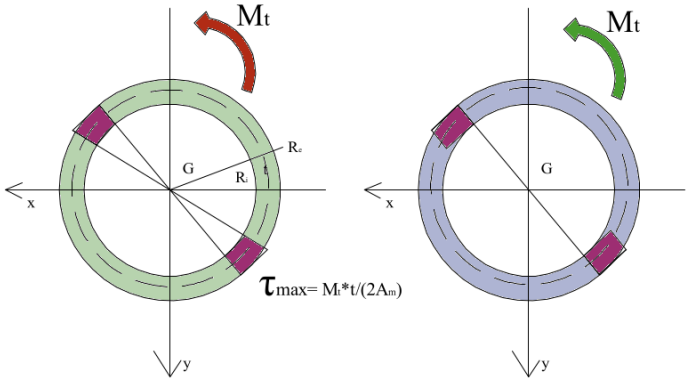
$$M_{TRD} = \tau_{RD} * d^2/3 *4/3*\pi*d + \tau_{RD}* \pi/2*(R-d)*[(R+d)]^2$$

Risultante $\tau_{RD} *d/2 + \tau_{RD} *(R-d)$
Distanza dal centro $2/3*d$ *triangolo* $R - (R-d)/2 = R/2+d/2$ *Rettangolo*
Teorema di Guldino
Circonferenza descritta dal baricentro $2*\pi*2/3*d$; $2*\pi* (R/2+d/2)$

$$M_{TRD} = 4\pi*\tau_{RD}*d^3 + \pi/2 *\tau_{RD}*(R-d)*[(R+d)]^2$$

tensione tangenziale ammissibile τ_{RD}

Sezione a corona circolare Bredt



*La sezione alla **bredt** è una sezione chiusa monoconnessa dove lo spessore ovvero la differenza tra raggio interno ed esterno della corona circolare è molto ridotto; la variazione lineare della tensione tangenziale lungo lo spessore t è insignificante*

Risultante $\tau * t$
Distanza dal centro R raggio linea media
Circonferenza descritta $2\pi R$

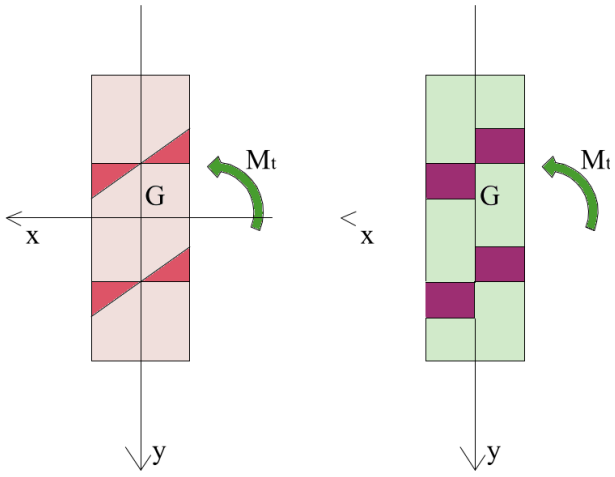
$M_{RD}=\tau*t*2*\pi*R^2=2*\tau*t*A_m$ formula di bredt $\tau=M_{TRD}/(2*t*A_m)$

L'angolo specifico di torsione $\theta' = \gamma*R = \tau/(G*R) = M_{TRD}/(G*I_P)$

$I_P=2*t*A_m*R$; il momento di inerzia polare sezione corona circolare

$I_P=\int R^2*dA = R^2*\int t*ds = R^2*\int t*ds = 2*t*R^3 =2*t*A_m*R$

Sezione rettangolare allungata



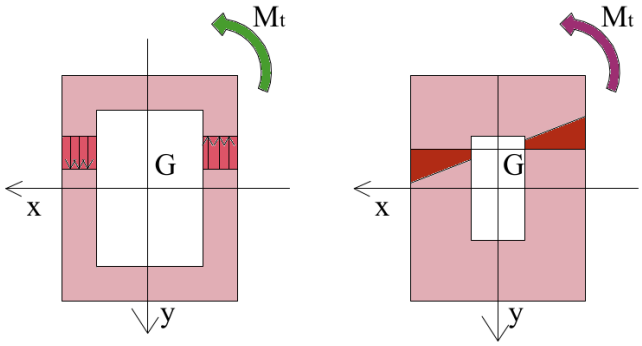
Per una sezione rettangolare allungata di spessore (base) t , si ipotizza dalla analogia idrodinamica che il diagramma delle tensioni sia a farfalla anche nei bordi estremi , dove il flusso delle tensioni è parallelo alla base del rettangolo.

Risultante $\tau * t/4$
Braccio $2/3*t$
$M_{RD}=\tau*H*t^2/6$ $\gamma=\tau/G$; $\gamma=\theta'*t/2$; $\theta'=2*\gamma/t$ °$= 2*\gamma/t = 3*M_T/(G*H*t^3)$

Per plasticizzazione della sezione e diagramma costante

Risultante $\tau * t/2$
Braccio $2/3*t$
$M_{RD}=\tau*H*t^2/3$

Sezione alla bredt



Il flusso delle tensioni è costante lungo la linea media per sezioni sottili $t << b,h$

Risultante $\tau^* t$ d distanza dal baricentro

$M_{RD} = \int \tau^* t^* d^* dA = \tau^* t^* \int d^* t^* ds = \tau^* t^2 * 2^*(b+h) = \tau^* t^* 2^* A_m$

$2^*(b+h)$ lunghezza linea media

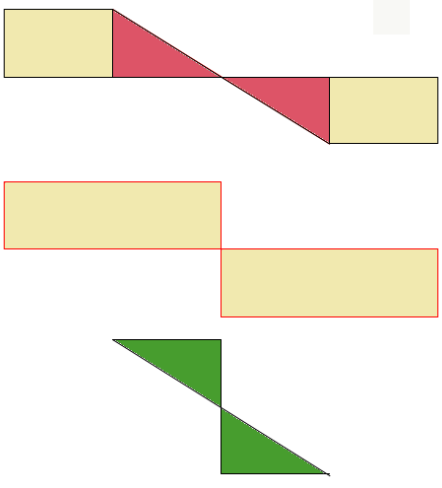
La tensione tangenziale $\tau = M_T /(2^* t^* A_m)$

Se lo spessore $t < b \approx h$ il momento torcente è immediato
Per ogni materiale è nota la max deformazione tangenziale γ_U , e la deformazione elastica γ_E , $G=E/[2^*(1+1/m)]$ modulo di Poisson 1/m

La distanza $d = R^* \gamma_E / \gamma_U$ il momento torcente resistente diagramma lineare
$M_{TRD} = \tau_{RD}{}^* H^* B^2/6^* - \tau_{RD}{}^*(H-2t)^*(B-t)^2/6 - = \tau_{RD}/6^*[H^* B^2-(H-2t)^*(B-t)^2]$

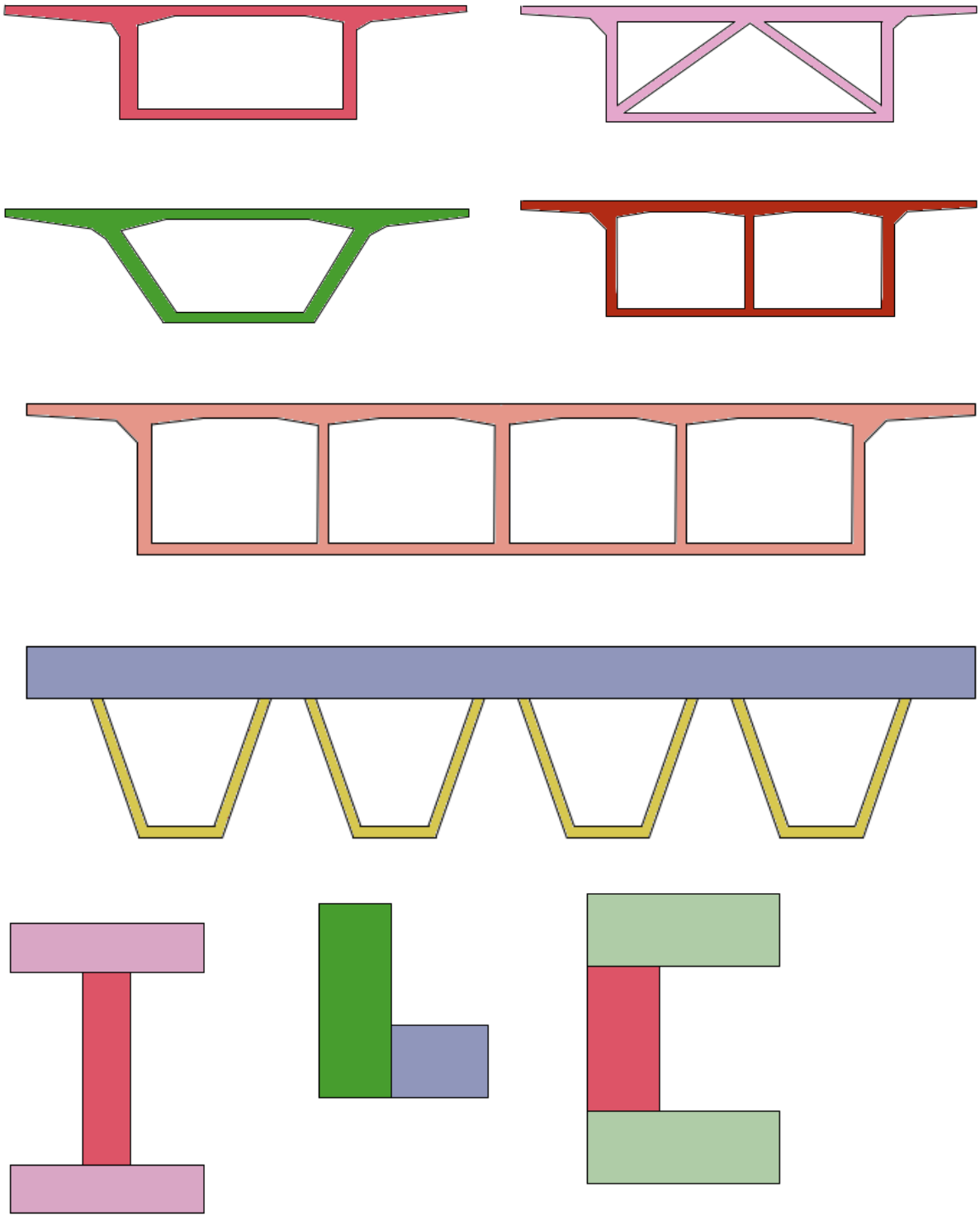
Per diagramma bilineare
$M_{TRD} = \tau_{RD}{}^* H^* B^2/4^* - \tau_{RD}{}^* H^* d^2/6 = \tau^* H/12^*[B^2 - d^2]$

Al momento dovuto al diagramma costante è stato sottratto quello derivante diagramma a farfalla



Sezioni chiuse e aperte sollecitate a taglio e torsione:impalcati a cassone dei ponti

Le verifiche a taglio e a torsione vengono eseguite per travi da ponte a cassone in calcestruzzo prefabbricato o acciaio, ed è questa la applicazione pratica della teoria sul taglio e torsione della scienza delle costruzioni ; per il calcolo a torsione di trave in cemento armato e sezioni tubolari in lega metallica si utilizza la formula di ***Bredt*** *, ,mentre per profilati e travi prefabbricate a doppi T le formule relative a sezioni sottili aperte.*

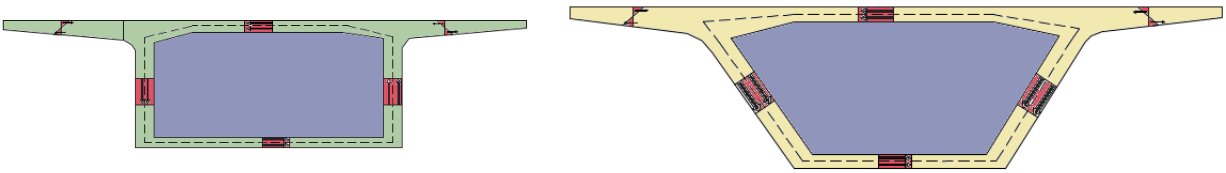


Per la sezione a cassone monoconnessa la verifica a torsione ed il calcolo della tensione tangenziale è immediato

$M_{TRD} = M_{T1} + 2*M_{T2}$

$M_{T1} = \tau_1 *(2*t*A_m)$ *sezione alla bredt*

$M_{T2} = \tau_2 *H*t^2/3$ *sezione rettangolare* $M_T = M_{T1} + 2*M_{T2}$



L'angolo specifico di torsione della sezione θ' è lo stesso sia per la sezione alla ***bredt*** *che per i rettangoli*

$\Theta' = M_T/C_T = M_{T1}/C_{T1} = M_{T2}/C_{T2}$ $M_T = \Theta'(C_{T1} + 2C_{T2})$

La rigidezza torsionale della sezione alla bredt e dei rettangoli

$\Theta' = M_T/(G*I_P)$; $C_{T1} = G*I_P$ $C_{T2} = G*H*t^3/3$

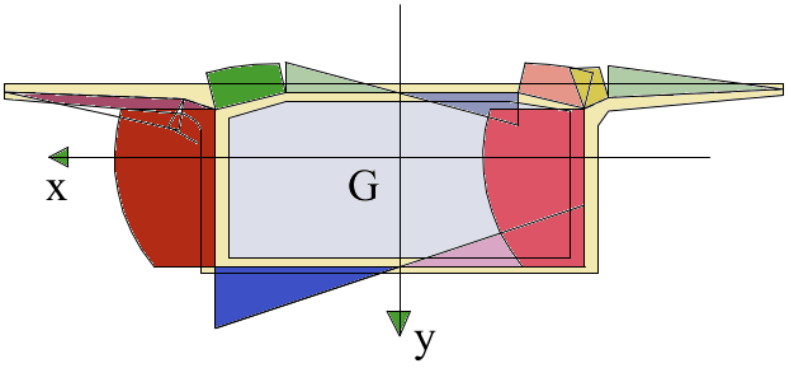
La rigidezza totale della sezione ; $C_T = \Theta'(C_{T1} + 2\,C_{T1})$

$M_{T1} = M_T*C_{T1}/C_T$; $M_{T2} = M_T*C_{T2}/C_T$;

Dalle aliquote dei momenti torcenti M_{T1} ; M_{T2} ; *le tensioni tangenziali da torsione*

$\tau_1 = M_{T1}/(2*t_1*A_m)$; $\tau_2 = 3*M_{T2}/(H*t^2)$

Per le tensioni tangenziali da taglio *si utilizza la formula di* ***Jourawsky*** *tenendo presente che il cassone è simmetrico e il taglio ovvero le tensioni tangenziali emisimmetrico con valore nullo sull'asse di simmetria* $\tau = T/I* S_n/b$



La tensione tangenziale varia con legge lineare nel tratto parallelo all'asse neutro e con legge quadratica negli altri tratti

$\tau = T * S(x)/(I*t)$ $S(x)= x*t^2*/2$ *momento statico rispetto alla corda*

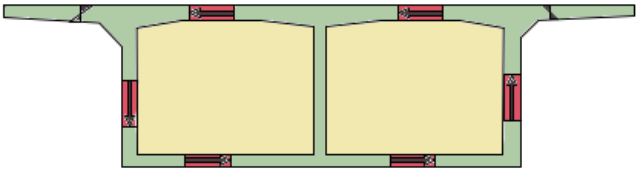
$\tau = T * S(y)/(I*t)$ $S(y)= t* y^2/2$ *momento statico rispetto alla corda*

Le verifica combinata a taglio a torsione puntuale

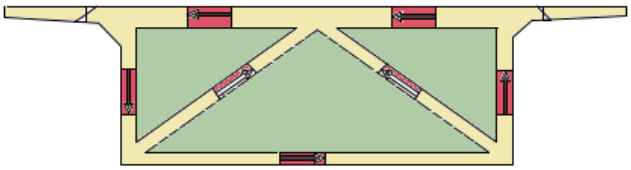
$$\tau_{TOT} = \tau_{TAGLIO} + \tau_{TORSIONE} \leq \tau_{RD}$$

Si può viceversa determinare V_{RD} *e* M_{TRD}

Impalcato con trave a cassone biconnessa



Le due sezioni per la torsione hanno un comportamento differente, essendo le tensioni tangenziali simmetriche per la sezione in alto nel setto centrale non vi è tensione, il calcolo è analogo per la torsione ala sezione a cassone monoconnessa . Ci limitiamo per la torsione al calcolo delle tensioni tangenziali per la sezione seguente:



La sezione è simmetrica si hanno 3 tensioni tangenziali incognite che per la equazione di continuità ovvero flusso costante : $\tau_1*t_1 = \tau_2*t_2 = \tau_3*t_3$ *ovvero :*

$\tau_2= \tau_1*t_1 /t_2$; $\tau_3= \tau_1*t_1 /t_3$; *nella ipotesi di uguale spessore*

Le 3 tensioni tangenziali sono uguali $\tau = \tau_2= \tau_1= \tau_3$
Il momento torcente della sezione calcolato rispetto al baricentro geometrico o centro di torsione $M_T = \tau*t*B*H + \tau*t*H*B + \tau*t*d* B/2*cos\alpha$

B larghezza cassone ; H altezza Cassone , t spessore , d lunghezza diagonale
α inclinazione diagonale
Vanno aggiunte le tensioni tangenziali dei rettangoli laterali , la ripartizione va eseguita in base alle rigidezza

L'angolo specifico di torsione della sezione θ' è lo stesso sia per la sezione a cassone che per i rettangoli

$\Theta' = M_T/C_T = M_{T1}/C_{T1} = M_{T2}/C_{T2} \quad M_T = \Theta'(C_{T1} + 2C_{T2})$

La rigidezza torsionale della sezione e dei rettangoli

$M_{T1} = \tau_{RC} * t * [2B*H + d* B/2*\cos\alpha] ; \quad \tau = M_{T1} /[2B*H*t + d*t* B/2*\cos\alpha]$

$\gamma = \tau/G = \Theta' * y_G \qquad y*\Theta' = M_{T1} /[G*B*(2H*t + d*t*\cos\alpha)] \qquad M_{TC} = C_{T1} * \Theta$

$C_{T1} = [G*B*(2H*t + d*t*\cos\alpha) *_{yG}] \qquad C_{T2} = G*H*t^3/3$

La rotazione torsionale avviene intorno al centro di torsione ovvero centro di taglio che si trova sull'asse di simmetria verticale baricentrico intersezione del taglio verticale e orizzontale ; il centro di torsione coincide con il baricentro geometrico della sezione;la rigidezza totale della sezione; $C_T = \Theta' * (C_{T1} + 2\, C_{T1})$

$M_{T1} = M_T * C_{T1} / C_T ; \quad M_{T2} = M_T * C_{T2} / C_T ;$

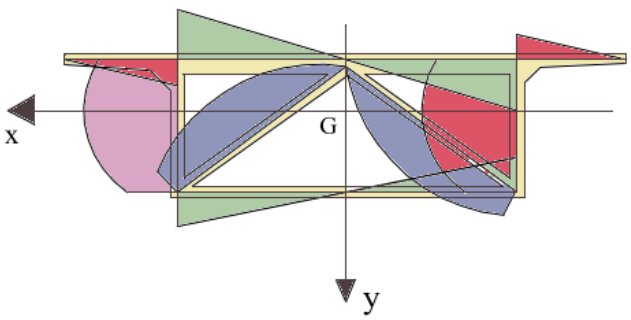
Dalle aliquote dei momenti torcenti M_{T1} ; M_{T2} ; *le tensioni tangenziali da torsione*

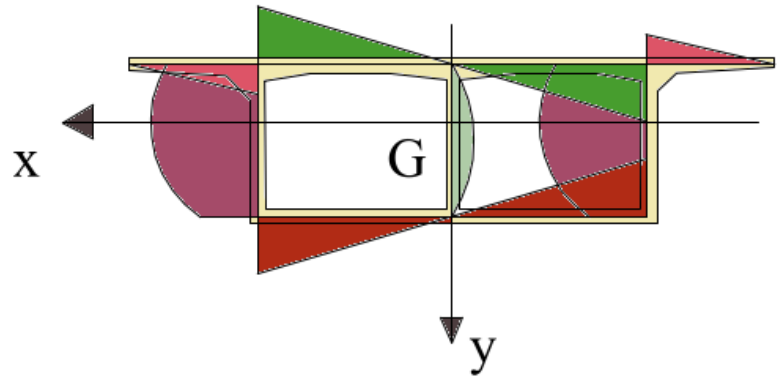
$\tau_1 = M_{T1}/[2B*H*t + d*t* B/2*\cos\alpha]; \qquad \tau_2 = 3*M_{T2} /(H*t^2)$

Per la verifica a taglio delle 2 sezioni , per la simmetria e la emisimmetria delle tensioni tangenziali risulta $\tau = 0$ *nel vertice superiore e inferiore .*

La tensione tangenziale varia con legge lineare nel tratto parallelo all'asse neutro e con legge quadratica nel tratto verticale nei tratti inclinati

$\tau = T * S(x)/(I*t) \qquad S(x) = x*t^2*/2$ *momento statico rispetto alla corda*
$\tau = T * S(y)/(I*t) \qquad S(y) = t* y^2/2$ *momento statico rispetto alla corda*
$\tau = T * S(y)/(I*t) \qquad S(y) = t*\cos\alpha* y^2/2$ *momento statico rispetto alla corda*





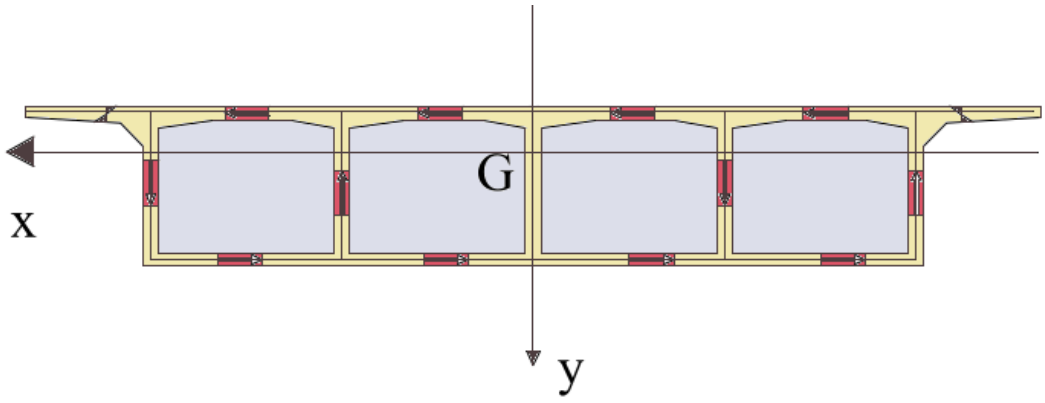
Le verifica combinata a taglio a torsione puntuale

$$\tau_{TOT} = \tau_{TAGLIO} + \tau_{TORSIONE} \leq \tau_{RD}$$

Si può viceversa determinare V_{RD} *e* M_{TRD}

L'impalcato a cassone pluriconnesso

Il calcolo della sezione pluriconnessa a torsione è semplice, le incognite sono le tensioni tangenziali che per la costanza del flusso lungo lo spessore



$$\tau_1 * t_1 = \tau_2 * t_2 = \tau_3 * t_3 = \tau_4 * t_4 = \tau_5 * t_5 = \tau_6 * t_6$$

$$\tau_2 = \tau_1 * t_1 / t_2 \; ; \quad \tau_3 = \tau_1 * t_1 / t_3 \; ; \quad \tau_4 = \tau_1 * t_1 / t_4 \; ; \quad \tau_5 = \tau_1 * t_1 / t_5 \; ; \quad \tau_6 = \tau_1 * t_1 / t_6 \; ;$$

Il momento torcente della sezione calcolato rispetto al baricentro geometrico o centro di torsione

$$M_{T1} = \tau * t * 4 * b * H + \tau * t * H * 2 * b + \tau * t * H * 4 * b = \tau * (10 * t * B * h)$$

H altezza linea media , b larghezza linea media maglia t spessore

L'angolo specifico di torsione della sezione θ' è lo stesso sia per la sezione pluriconnessa che per i rettangoli

$\Theta' = M_T/C_T = M_{T1}/C_{T1} = M_{T2}/C_{T2}$ $M_T = \Theta'(C_{T1} + 2C_{T2})$

La rigidezza torsionale della sezione e dei rettangoli

$M_{T1} = \tau*(10*t*B*h)$; $\tau = M_{T1}/[10*t*B*h]$

$\gamma = \tau/G = \Theta'*y_G$ $y*\Theta' = M_{T1}/[G*10*t*B*h]$ $M_{TC} = C_{T1}*\Theta$

$C_{T1} = [G*B*(2H*t+d*t*\cos\alpha)*y_G]$ $C_{T2} = G*H*t^3/3$

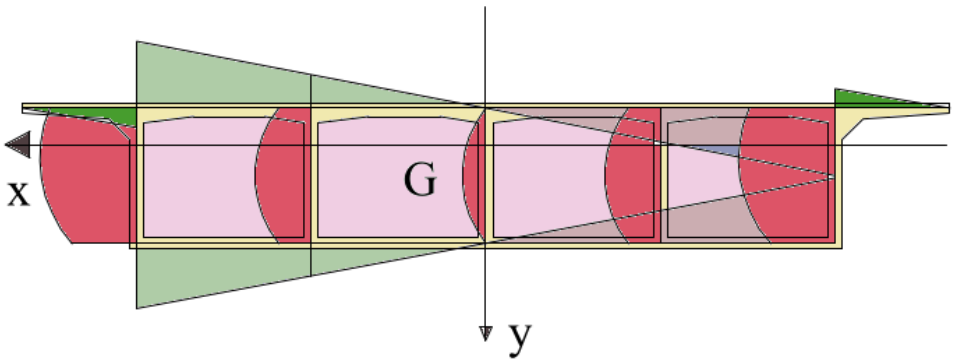
la rigidezza totale della sezione; $C_T = \Theta'*(C_{T1} + 2\,C_{T1})$

$M_{T1} = M_T*C_{T1}/C_T$; $M_{T2} = M_T*C_{T2}/C_T$;

Dalle aliquote dei momenti torcenti M_{T1} ; M_{T2} ; *le tensioni tangenziali da torsione*

$\tau_1 = M_{T1}/[10*t*B*h]$; $\tau_2 = 3*M_{T2}/(H*t^2)$

Verifica a taglio



Per la verifica a taglio della sezioni , per la simmetria e la emisimmetria delle tensioni tangenziali risulta $\tau = 0$ *nel vertice superiore e inferiore .*
La tensione tangenziale varia con legge lineare nel tratto parallelo all'asse neutro e con legge quadratica nel tratto verticale nei tratti inclinati

$\tau = T * S(x)/(I*t)$ $S(x) = x*t^2*/2$ *momento statico rispetto alla corda*
$\tau = T * S(y)/(I*t)$ $S(y) = t* y^2/2$ *momento statico rispetto alla corda*
$\tau = T * S(y)/(I*t)$ $S(y) = t*\cos\alpha* y^2/2$ *momento statico rispetto alla corda*

Le verifica combinata a taglio a torsione puntuale

$$\tau_{TOT} = \tau_{TAGLIO} + \tau_{TORSIONE} \leq \tau_{RD}$$

Si può viceversa determinare V_{RD} *e* M_{TRD}

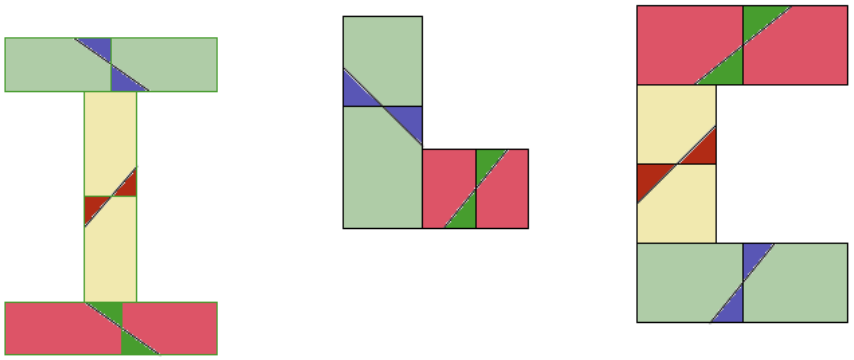
Le sezioni sottili aperte : i profilati e le travi in c.a.p

La verifica a torsione è immediata, la rigidezza totale

$C_T = C_{1T} + C_{2T} + C_{3T}$

$C_T = G*H_1*t_1^3/3 + G*H_2*t_2^3/3 + G*H_3*t_3^3/3$ *in generale per n rettangoli*

$C_T = \sum G*H_i*t_i^3/3 \quad i = 1.....n$

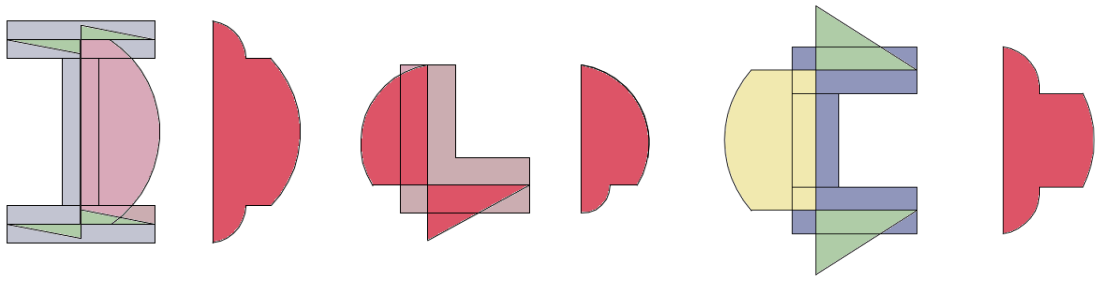


Il momento $M_{1T} = M_T*C_{1T}/C_T$; $M_{2T} = M_T*C_{2T}/C_T$; $M_{3T} = M_T*C_{3T}/C_T$;

La tensione tangenziale $\tau_1 = 6*M_{1T}/H_1*t_1^2$; $\tau_2 = 6*M_{2T}/H_2*t_2^2$; $\tau_3 = 6*M_{3T}/H_3*t_3^2$;

In generale $M_{iT} = M_T*C_{iT}/C_T$; $\tau_i = 6*M_{iT}/H_i*t_i^2$; $i = 1.....n$

Per la verifica a taglio *di sezioni sottili aperte ,*



Il centro di taglio è i, punto di intersezione delle risultanti degli sforzi tangenziali T_1 *e* T_2 *orizzontali e verticali ; la tensione tangenziale* $\tau = T * S(x)/(I*t)$ *, per i profilati di acciaio si considera il , contributo della sola anima con diagramma rettangolare*

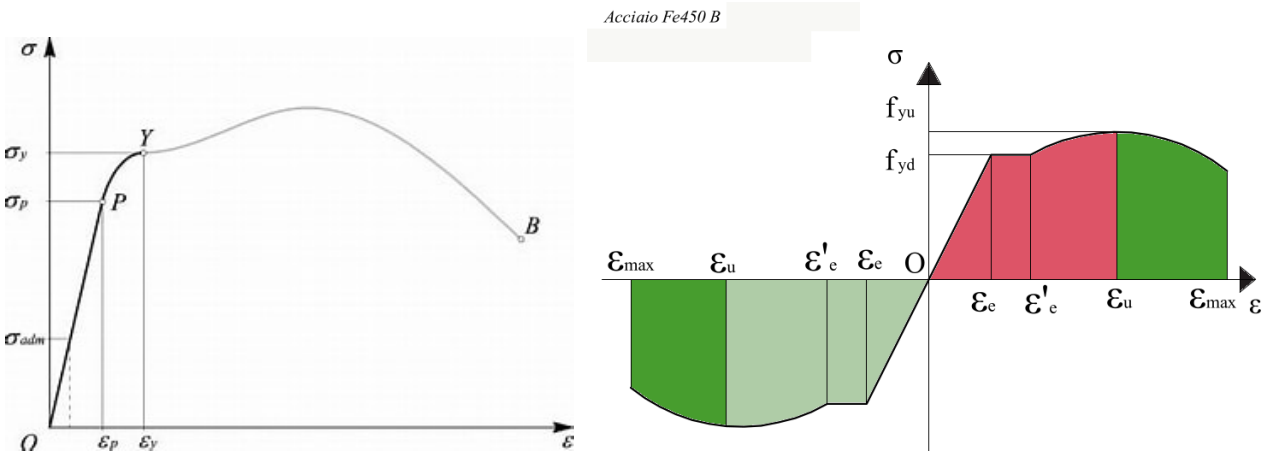
$V_{RD} = 0,6*fyd*A = fyd*A/\sqrt{3}$ *, A area dell'anima*

3-Diagrammi σ-ε dei materiali : rappresentazione polinomiale

La verifica delle sezioni è stata sempre eseguita nella ipotesi di comportamento elastico lineare o elastoplastico ideale , parabola rettangolo, sui vuole rimuovere tale ipotesi rappresentando la curva tensione deformazione con un polinomio cubico o di grado superiore.

Acciaio

Il diagramma tensione deformazione per l'acciaio risultato di una prova di trazione è ben noto , l'acciaio è un materiale isotropo che ha lo stesso comportamento sia a trazione che a compressione. Tale diagramma lo possiamo approssimare con un tratto lineare una fase plastica a tensione di snervamento costante e un tratto curvo.



Il modulo elastico dell'acciaio E_S = 206000 N/mmq , le deformazioni

$$\varepsilon_e = 391/206000 = 0{,}000189 \ ;$$

*Le **NTC 2018** per l'acciaio da cemento armato*

Tensione snervamento $f_{yd} = 450$ N/mmq
Tensione di rottura $f_{yr} = 540$ N/mmq
Allungamento a rottura $\varepsilon_{max} \geq 7{,}5\%$

Il coefficiente parziale per l'acciaio $\gamma_m = 1{,}15$

Per l'acciaio utilizziamo la seguente rappresentazione analitica

Lineare $\sigma = E^*\varepsilon$ $0 \leq \varepsilon \leq 0{,}00189$

Costante $\sigma = fyd = 391$ N/mmq $0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$

Quadratica $\sigma = a_1^*\varepsilon_s^{\,2} + a_2^*\varepsilon_s + a_3$ $0{,}01 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u$

Le costanti a_1 , a_2, a_3 *vanno determinate in funzione del diagramma ovvero di*

$$\varepsilon'_e = 0{,}01 \; ; \; \varepsilon_u = 0{,}02 \; ; \; f_{yr} = 540/1{,}15 = 470 \text{ N/mmq} \; ; \; f_{yd} = 391 \text{ N/mmq}$$

Per $\varepsilon'_e = 0{,}01$ $\quad 391 = a_1 * 0{,}01^2 + a_2 * 0{,}01 + a_3$

Per $\varepsilon'_u = 0{,}02$ $\quad 470 = a_1 * 0{,}02^2 + a_2 * 0{,}02 + a_3$

Per $\varepsilon'_u = 0{,}02$ $\quad d\sigma/d\varepsilon = 0 \quad 2 * a_1 * \varepsilon_s + a_2 = 0$;

La equazione la scriviamo per un arco di parabola e poi trasliamo il sistema di riferimento

$Y' = -a * X^2$ *per* $X = 0{,}01$ $Y' = (470-391) = 79$ $a = -790000$

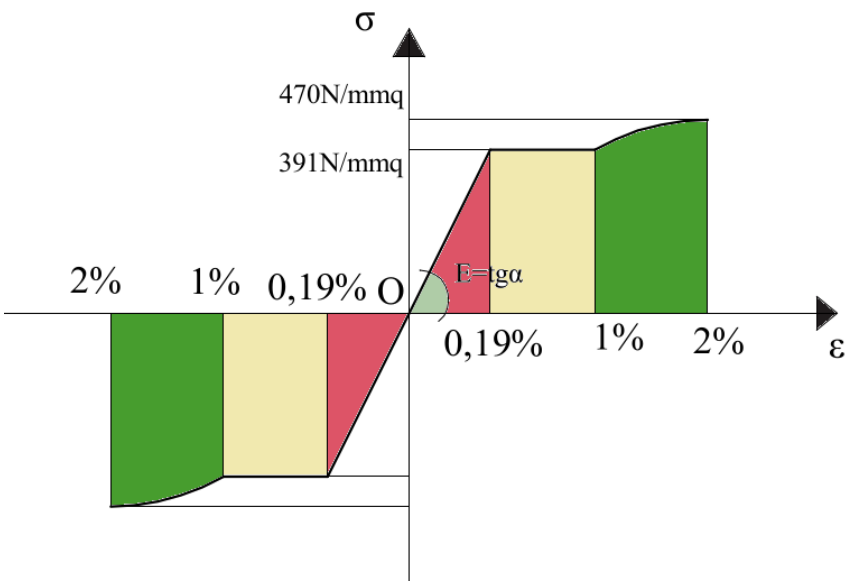
$Y' = (\sigma - 470)$; $X = (\varepsilon - 0{,}02)$; $(\sigma - 470) = -790000 * (\varepsilon - 0{,}02)^2$

$\sigma = -790000 * \varepsilon^2 + 31600 * \varepsilon + 470 - 316 = -790000 * \varepsilon^2 + 31600 * \varepsilon + 154$

Per $\varepsilon'_e = 0{,}01$ $\sigma = 391$ *N/mmq ; per* $\varepsilon'_u = 0{,}02$ $\sigma = 470$ *N/mmq ;*

La rappresentazione analitica del diagramma di calcolo per l'acciaio

Lineare	$\sigma = E * \varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000 * \varepsilon^2 + 31600 * \varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$



Calcestruzzo

Consideriamo il diagramma tensione deformazione riportato sull'eurocode 2 per la sola compressione

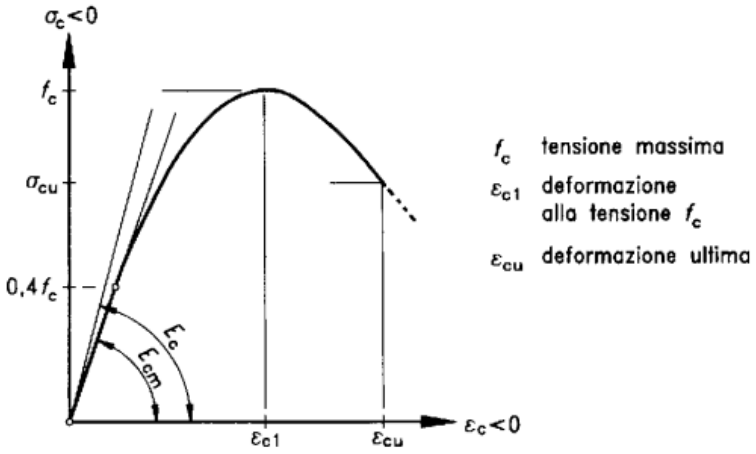


Fig. 3.1 – Diagramma tensioni-deformazioni per compressione monoassiale

Il diagramma come riportato in figura si compone di 3 tratti

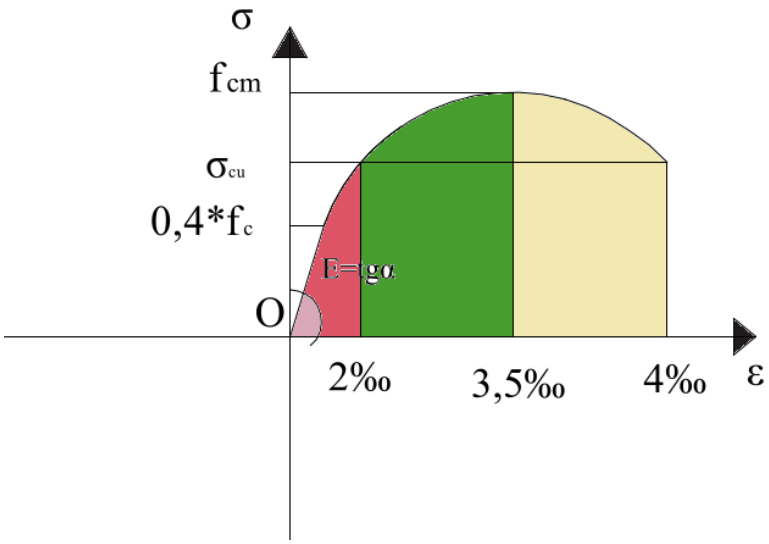
Rck 350 C35

Lineare $\sigma \leq 0{,}4 * f_{cm}$ $f_{ck} = 0{,}83*Rck$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37\ N/mmq$

Cubico $0{,}4 * f_{cm} \leq \sigma \leq \sigma_{cu}$ $\sigma_{cu} = fck/1{,}5$

Cubico $\varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_C \leq \varepsilon_{Cmax}$ $f_c = f_{cm}/1{,}5$

$\varepsilon_{c1} = 0{,}002$; $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$



$\sigma(\varepsilon_s) = a_1*\varepsilon_C{}^3 + a_2*\varepsilon_C{}^2 + a_3*\varepsilon_C + a_4$

Lineare $\sigma = E^*\varepsilon_C$ $\sigma \leq 0{,}4^*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$

$\sigma \leq 9{,}86$ *N/mmq* $E = 350000$ *daN/mmq*

Cubico $\sigma(\varepsilon_C) = a_1^*\varepsilon_C^3 + a_2^*\varepsilon_C^2 + a_3^*\varepsilon_C + a_4$

Le 4 costanti le ricaviamo dalle seguenti condizioni

$98{,}6 = a_1^*(0{,}0002817)^3 + a_2^*(0{,}0002817)^2 + a_3^*(0{,}0002817) + a_4$

$193{,}6 = a_1^*(0{,}002)^3 + a_2^*(0{,}002)^2 + a_3^*(0{,}002) + a_4$

$246{,}6 = a_1^*(0{,}0035)^3 + a_2^*(0{,}0035)^2 + a_3^*(0{,}0035) + a_4$

$193{,}6 = a_1^*(0{,}004)^3 + a_2^*(0{,}004)^2 + a_3^*(0{,}004) + a_4$

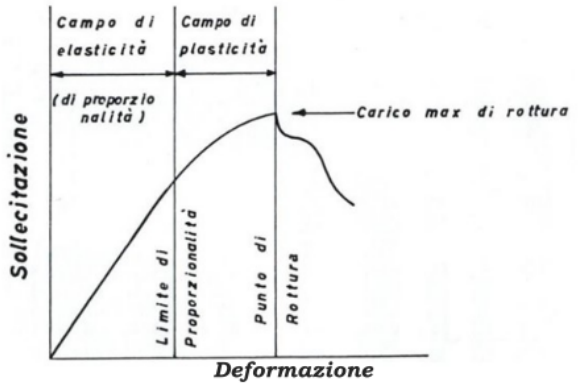
Il sistema lo risolviamo on line

$a_1 = -16622026177{,}93$; $a_2 = 87242582{,}02$; $a_3 = -58038{,}76$; $a_4 = 93{,}68$

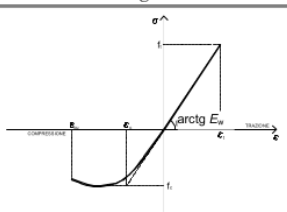
$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93^*\varepsilon_C^3 + 87242582{,}02^*\varepsilon_C^2 - 58038{,}76\ a^*\varepsilon_C + 93{,}68$

Legno

Una prova a compressione sul legno fornisce un diagramma tensione deformazione con un tratto elastico e uno plastico , mentre per la prova di trazione il diagramma è lineare.



3. Modello di O'Halloran

Definizione analitica	*Diagramma*
$\sigma = E_w \cdot \varepsilon$ per $0 < \varepsilon < \varepsilon_t$ $\sigma = A \cdot \lvert\varepsilon\rvert^n + E_w \cdot \varepsilon$ per $\varepsilon_{cu} < \varepsilon < 0$ Tra quelli qui riportati, il modello fornisce la migliore descrizione del comportamento reale del legno a fronte di una relativa maggiore complessità del ramo a compressione, la cui definizione richiede l'assegnazione dei due parametri $A>0$ e $n>0$.	

Per il diagramma tensione deformazione del legno utilizziamo il modello di Halloran elastico lineare a trazione ed elastoplastico a compressione con formulazione polinomiale. Per un legno di classe C24 i valori delle caratteristiche meccaniche riportate nelle Istruzioni CNR 2018 sono i seguenti

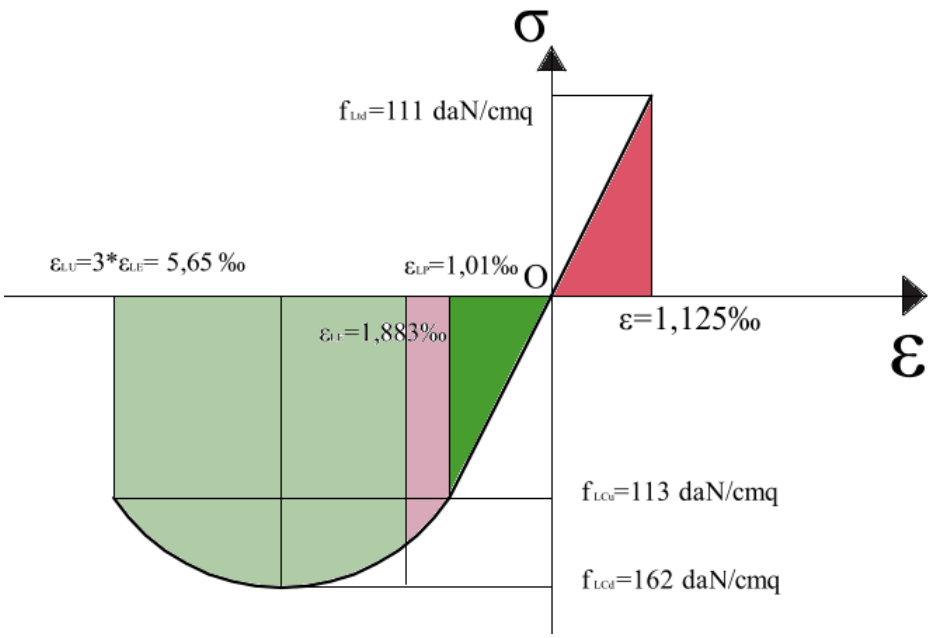
Legno di conifere e pioppo

Resistenza a flessione	f_{mk} = 240 daN/cmq
Resistenza a trazione	$f_{t,0k}$ = 145 daN/cmq parallela alla fibratura
Resistenza a trazione	$f_{t,90k}$ = 4 daN/cmq perpendicolare alla fibratura
Resistenza a compressione	$f_{c,ok}$ = 210 daN/cmq parallela alla fibratura
Resistenza a compressione	$f_{c,90k}$ = 25 daN/cmq perpendicolare alla fibratura
Resistenza a taglio	$f_{V,k}$ = 40 daN/cmq
Modulo di elasticità normale	E = 115000 daN/cmq valore medio
Modulo di elasticità tangenziale	G = 7200 daN/cmq valore medio

Per la trazione $\sigma = E*\varepsilon \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{UT}$

Per la compressione $\sigma(\varepsilon_C) = a_1*\varepsilon_C^3 + a_2*\varepsilon_C^2 + a_3*\varepsilon_C + a_4 \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ET}$

Il diagramma tensione deformazione tenendo conto dei coefficienti parziali
Legno massiccio $\gamma_M = 1{,}30$



$E_{LCU} = 3* E_{LCE}$ *; si è ipotizzato che la ampiezza della fase plastica sia il doppio di quella elastica*

Le tre condizioni il diagramma passa per l'origine $a_4 = 0$

$\sigma(\varepsilon_{LC}) = a_1*\varepsilon_{LC}^3 + a_2*\varepsilon_{LC}^2 + a_3*\varepsilon_{LC}$

$113=a_1*(0{,}00565)^3+a_2*(0{,}00565)^2+a_3*(0{,}00565)$

$113=a_1*(0{,}00101)^3+a_2*(0{,}00101)^2+a_3*(0{,}00101)$

$162=a_1*(0{,}00376)^3+a_2*(0{,}00377)^2+a_3*(0{,}00377)$

Risolvendo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite

$x_1=2759141162{,}34\ ;\quad x_2=-38177860{,}34\ ;\quad x_3=147626{,}23$

La funzione

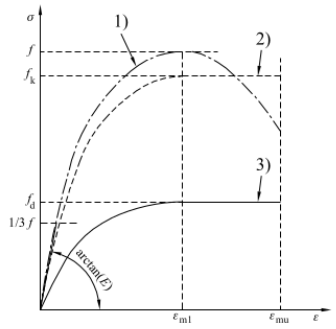
$\sigma(\varepsilon_{LC})=2759141162{,}34*\varepsilon_{LC}^3-38177860{,}34*\varepsilon_{LC}^2+147626{,}23*\varepsilon_{LC}$

$\sigma(\varepsilon_{LC})=2759141162{,}34*x^3-38177860{,}34*x^2+147626{,}23*x$

Muratura

Diagramma tensioni-deformazioni per la muratura in compressione

Legenda
1) Tipico
2) Diagramma ideale (parabola-rettangolo)
3) Diagramma di calcolo



Facciamo riferimento al diagramma tensione deformazione ***Eurocode 6***
Per la muratura la resistenza a compressione f_K , funzione del blocco lapideo sia esso laterizio, calcestruzzo normale e leggero, terra cruda pietra , tufo vulcanico e del tipo di malta. Il modulo di elasticità normale $E = 1000*f_K$, il modulo di elasticità tangenziale $G = 0{,}4*E$, mentre il coefficiente parziale $\gamma_M = 2{,}5$

Tab. 11.10.VI - *Valori di f_k per murature in elementi artificiali pieni e semipieni (valori in N/mm²)*

Resistenza caratteristica a compressione f_{bk} dell'elemento N/mm²	Tipo di malta			
	M15	M10	M5	M2,5
2,0	1,2	1,2	1,2	1,2
3,0	2,2	2,2	2,2	2,0
5,0	3,5	3,4	3,3	3,0
7,5	5,0	4,5	4,1	3,5
10,0	6,2	5,3	4,7	4,1
15,0	8,2	6,7	6,0	5,1
20,0	9,7	8,0	7,0	6,1
30,0	12,0	10,0	8,6	7,2
40,0	14,3	12,0	10,4	–

Assumiamo f_K = 70 daN/cmq per elementi artificiali , quali laterizio terra cruda cls

leggero ; per la curva tensione deformazione a compressione σ-ε, utilizziamo un a funzione cubica polinomiale , la curva passa per la origine

$\sigma(\varepsilon_{MC})=a_1*\varepsilon_{MC}^{\,3}+a_2*\varepsilon_{MC}^{2}+a_3*\varepsilon_{MC}$

Imponiamo le seguenti condizioni

$a_1*\varepsilon_{M1}^{\,3}+a_2*\varepsilon_{M1}^{2}+a_3*\varepsilon_{M1} = f_K / \gamma_M = 28\ daN/cmq$

$a_1*\varepsilon_{MU}^{\,3}+a_2*\varepsilon_{MU}^{2}+a_3*\varepsilon_{MU} = 20\ daN/cmq$

$3*a_1*\varepsilon_{MC}^{2}+2*a_2*\varepsilon_{MC}+a_3 = tg\alpha = E = 70000\ daN/cmq$ origine

$a_3 = 70000\ daN/cmq$

$a_1*\varepsilon_{M1}^{\,3}+a_2*\varepsilon_{M1}^{2}+70000*\varepsilon_{M1} = f_K / \gamma_M = 28\ daN/cmq$

$a_1*\varepsilon_{MU}^{\,3}+a_2*\varepsilon_{MU}^{2}+70000*\varepsilon_{MU} = 20\ daN/cmq$

$\varepsilon_{MU} = 0{,}004$; $\varepsilon_{M1} = 0{,}0035$

Risolvendo il sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite

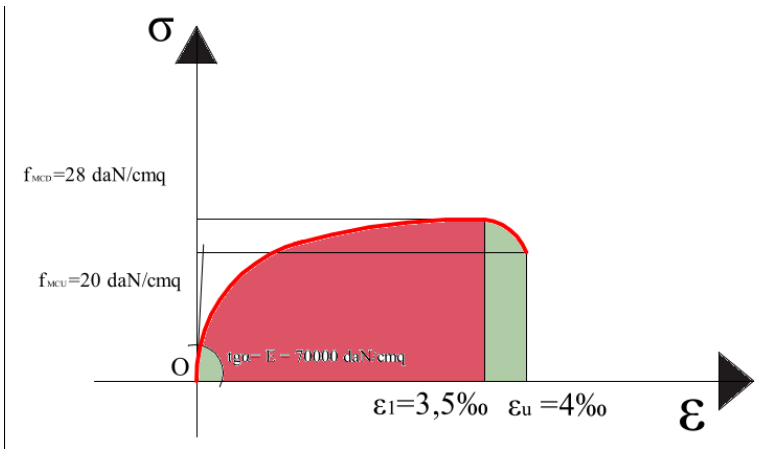
$a_1*(0{,}0035)^{3}+a_2*(0{,}0035)^{2} = -217$

$a_1*(0{,}004)^{3}+a_2*(0{,}004)^{2} = -260$

$a_1 = 2928571429$ $a_2 = -27964286$

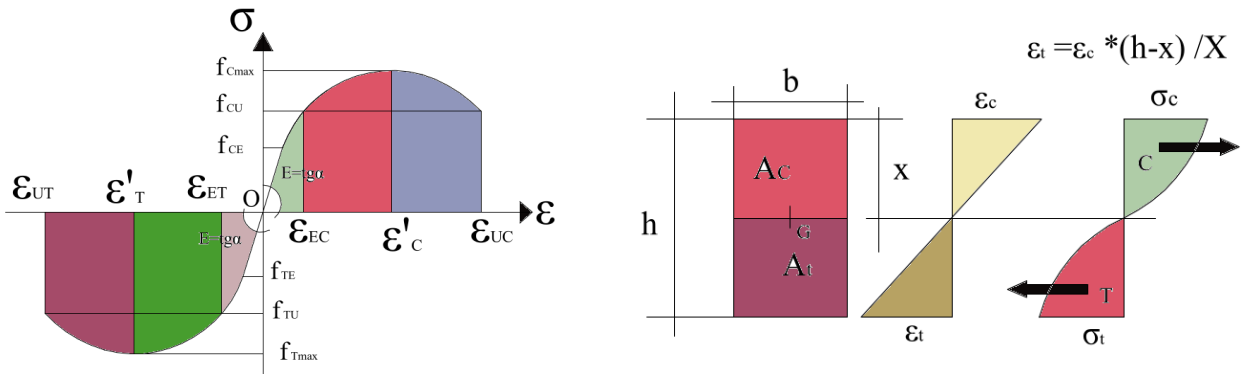
$\sigma(\varepsilon_{LC})=2928571429*\varepsilon_{MC}^{\,3}+-27964286*\varepsilon_{MC}^{2}+70000*\varepsilon_{MC}$

Il diagramma tensione deformazione per la muratura a compressione:



4-Flessione semplice

Le funzioni polinomiali che definiscono i legami costitutivi del materiale non sono delle astrazioni dalla realtà o dalla teoria, sono utili per la verifica di sezioni con il modello a fibre da implementare su software; nessuno esegue una verifica di sezioni calcolando integrali o con metodi iterativi , vengono eseguite con l'ausilio di programmi , non vanno neanche eseguite all'università dove gli studenti hanno conoscenze di linguaggi di programmazione per cui dalla teoria passano alla programmazione utilizzando il software per le verifiche a scopo didattico: per la attività professionale si utilizzano programmi commerciali, e le funzioni dei legami costitutivi sono già utilizzate in altri paesi quali Stati Uniti, Giappone e Arabia Saudita.
Nel seguente paragrafo e nei successivi ci occuperemo della verifica delle sezioni per sollecitazioni semplice partendo dalla flessione retta con diagramma tensione deformazione del materiale omogeneo e isotropo avente lo stesso comportamento a trazione e compressione , senza addentrarci nei calcoli ma scrivendo solo le equazioni di equilibrio alla traslazione e rotazione con legame costitutivo polinomiale.



$\sigma(\varepsilon)=a_1*\varepsilon^3+a_2*\varepsilon^2+a_3*\varepsilon$

Le 2 equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e alla rotazione

$\int\sigma(\varepsilon)dA_C - \int\sigma(\varepsilon)dA_T = 0$; $\int\sigma(\varepsilon)*ydA_C - \int\sigma(\varepsilon)*ydA_T = M$;

La risultante degli sforzi di compressione , il momento della sezione

$C = b*A_{\sigma c}$ $M = C*d$

braccio coppia interna $d = 2*Y_G$ *dove* Y_G *baricentro diagramma tensioni*
$A_{\sigma c}$ *area del diagramma delle tensioni di compressione cubica*

$\varepsilon(y) = 2*\varepsilon_c y/h$ *poniamo* $\xi = 2*\varepsilon_c/h$ $\varepsilon(y) = \xi*y$

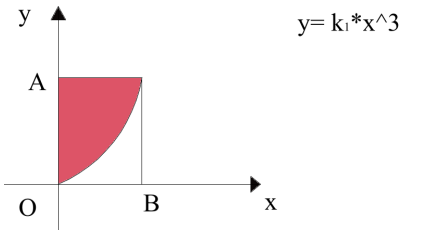
$\int\sigma(\varepsilon)dy = \int(a_1*\varepsilon^3+a_2*\varepsilon^2+a_3*\varepsilon)dy = 2*\varepsilon_c/h*\int(a_1*y^3+a_2*y^2+a_3*y)dy =$

$\xi*(a_1/4*y^4+a_2/3*y^3+a_3/2*y^2)$ *calcolato tra 0 e h/2*

Calcolo dell'area di una cubica

$\int k_1 * x^3 dx = k_1 * x^4/4 = A*B/4$

La area della parte tratteggiata $3/4*A*B$



Il baricentro dell'arco cubica

$Y_G = \int y*dA / \int dA$; $dA = dx*dy$; $Y_G = \iint y*dxdy / \int dxdy$;

$\iint Y\, dxdy$ *integrato tra* $k_1 * x^3$ *ed A per y*

$1/2 * \int [A^2 - k_1^2 * x^6]dx = A^2*B/2 - A^2*B/14 = 3/7*A^2*B$

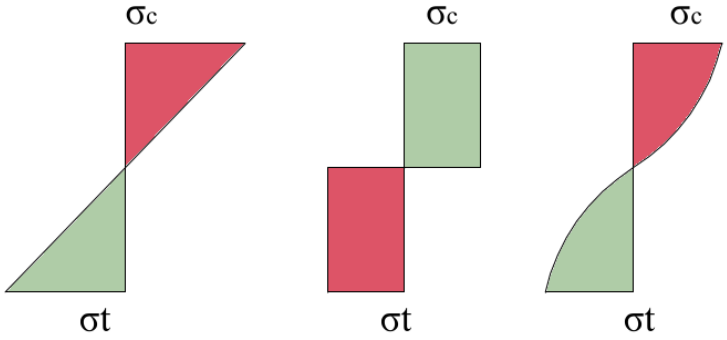
$Y_G = [3/7*A^2*B]/[3/4*A*B] = 4/7*A$

L'area del diagramma delle tensioni

$C = 3/8*b*h*\sigma_C$ $M = 3/8*b*h*\sigma_C * 4/7*h = 3/14*b*h^2*\sigma_C$

$\sigma_C = 14*M/(3*b*h^2)$ *la tensione di trazione è analoga* $\sigma_T = 14*M/(3*b*h^2)$

Se facciamo una analogia con la formula di ***Navier*** *e per comportamento* ***Plastico***
$\sigma_C = 6*M/(b*h^2)$; $\sigma_C = 4*M/(b*h^2)$; $\boldsymbol{\sigma_C = 4{,}67*M/(b*h^2)}$



$W_{EL} = (B*H/2)*H/3$; $W_{PL} = (B*H/2)*H/2$; $W_{PLC} = (B*H/2)*3H/7$;

Il modulo di resistenza è dato dal prodotto di metà dell'area per la distanza tra le due risultanti di trazione e compressione ovvero braccio della coppia interna
Il rapporto tra i moduli di resistenza
$W_{PL}/W_{EL} = 1{,}5$; $W_{PL}/W_{PLC} = 7/6 = 1{,}167$ $W_{PLC}/W_{EL} = 9/7 = 1{,}285$

Il principio di conservazione delle sezioni piane assicura la linearità della deformazione nella sezione

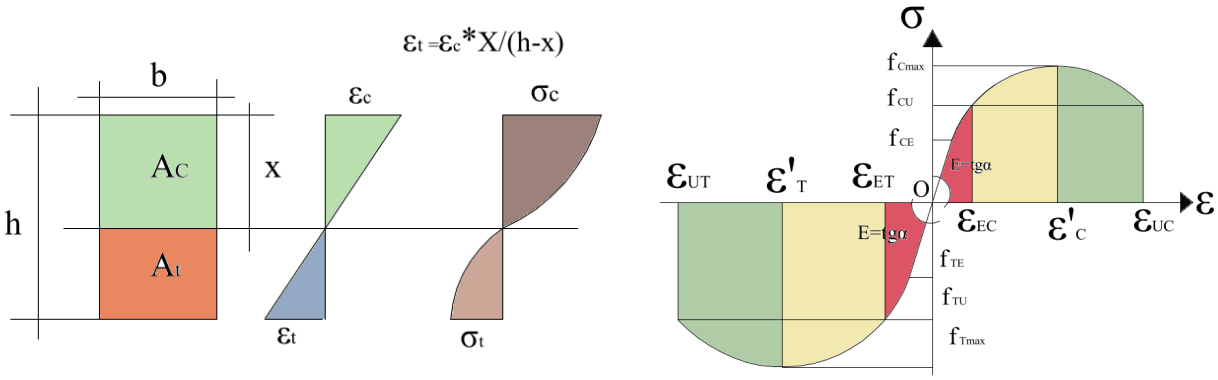
$\varepsilon(y)=2*y*\varepsilon_c/h$ *La curvatura della sezione* $\chi=\varepsilon_c/h$ *, la rotazione* $\Delta\varphi=\chi*\Delta z$

La deformazione al lembo compresso ε_c $\sigma_C=a_1*\varepsilon_C{}^3+a_2*\varepsilon_C{}^2+a_3*\varepsilon_C$,
nota la tensione di compressione si risolve la equazione di terzo grado che ha due radici complesse immaginarie ed una reale ε_c *. La legge di variazione della tensione di compressione e trazione deriva dal principio di conservazione delle sezioni piane*

$\varepsilon(y) = \pm 2*y*\varepsilon_C/h$;

$\sigma(y)=a_1*(2*y*\varepsilon_C/h)^3+a_2*(2*y*\varepsilon_C/h)^2+a_3*(2*y*\varepsilon_C/h)$ $\varepsilon(y) = \pm 2*y*\varepsilon_C/h$;

Per flessione semplice con comportamento differente a trazione e compressione



La incognita del sistema sono ξ *ed X*

$\xi = \varepsilon_C/X$; $\varepsilon_T=\varepsilon_C*X/(h-X)=\varepsilon_C/X*X(h/X-1)=X*\xi/(h/X-1)$

Ricavabili dalle due equazioni

$\int \sigma_N*dy = \int \sigma_T*dy$

$Q*L^2/8 = b*\int \sigma_N*y*dy + b*\int \sigma_T*y*dy$

Integrate da da 0 a x per C e da 0 a h-x per T Dove $\sigma_N=f(\varepsilon)$; $\sigma_T=f(\varepsilon)$;

se utilizziamo una espressione polinomiale lineare ,quadratica, cubica ect che definisce il diagramma tensione deformazione ben noto dato del problema tenendo conto delle disomogeneità della sezione e dei differenti parametri elastici della sezione composta

$\sigma_N= a_1*\varepsilon^3 + a_2*\varepsilon^2 + a_3*\varepsilon$

$\sigma_T= b_1*\varepsilon^3 + b_2*\varepsilon^2 + b_3*\varepsilon$

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε varia con legge lineare

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_c / X * y = \xi * y \quad \text{parte compressa tra zero e } X$$

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_c / X * y = -\xi * y \quad \text{parte compressa tra zero e } h-X$$

Gli integrali sono semplici da risolvere

$$\int \sigma_N * dy = \int [\, a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y)\,]\, dy$$

$$\int \sigma_T * dy = \int [\, b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y)\,]\, dy$$

$$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2$$

$$\int \sigma_T * dy = b_1 * [\xi * (h-x)]^3 + b_2 * [\xi * (h-x)]^2 + b_3 * [\xi * (h-x)]$$

La prima equazione:

$$a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2 =$$

$$b_1 * [\xi * (h-x)]^3 + b_2 * [\xi * (h-x)]^2 + b_3 * [\xi * (h-x)]$$

La seconda equazione alla rotazione intorno all'asse neutro

$$Q * L^2 / 8 = b * \int \sigma_N * y * dy + b * \int \sigma_T * y * dy$$

$$Q * L^2 / (8b) = \int [a_1 * \xi^3 * y^4 + a_2 * \xi^2 * y^3 + a_3 * \xi * y^2]\, dy +$$

$$+ \int [b_1 * \xi^3 * y^4 + b_2 * \xi^2 * y^3 + b_3 * \xi * y^2 / 2]\, dy$$

La soluzione degli integrali è immediata

$$Q * L^2 / (8b) = a_1 * \xi^3 * x^5 / 5 + a_2 * \xi^2 * x^4 / 4 + a_3 * \xi * x^3 / 3 +$$

$$b_1 * \xi^3 * (h-x)^5 / 5 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^4 / 4 + b_3 * a_3 * \xi * (h-x)^3 / 3$$

I coefficienti costanti sono noti dal diagramma tensione deformazione

$$b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4; \qquad a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4;$$

Il sistema di equazioni polinomiale

$$a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2 = b_1 * [\xi * (h-x)]^3 + b_2 * [\xi * (h-x)]^2 + b_3 * [\xi * (h-x)]$$

$$Q * L^2 / (8b) = a_1 * \xi^3 * x^5 / 5 + a_2 * \xi^2 * x^4 / 4 + a_3 * \xi * x^3 / 3 +$$

$b_1*\xi^3*(h-x)^5/5 + b_2*\xi^2*(h-x)^4/4 + b_3*a_3*\xi*(h-x)^3/3$

Il sistema di equazioni ha 8 soluzioni

ξ_1 ; ξ_2 ; ξ_3 ; x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5 ;

anche immaginarie , si sceglie la coppia di numeri reali (ξ; x) che definisce al meglio il diagramma delle tensioni. Al quale corrispondono le deformazioni al lembo teso e compresso

$\varepsilon_C = \xi*x$; $\varepsilon_T = \varepsilon_C*X/(h-X)$ *le tensioni di trazione e compressione*

$\sigma_C = a_1*\varepsilon_C^3 + a_2*\varepsilon_C^2 + a_3*\varepsilon_C$; $\sigma_T = b_1*\varepsilon_T^3 + b_2*\varepsilon_T^2 + b_3*\varepsilon_T$

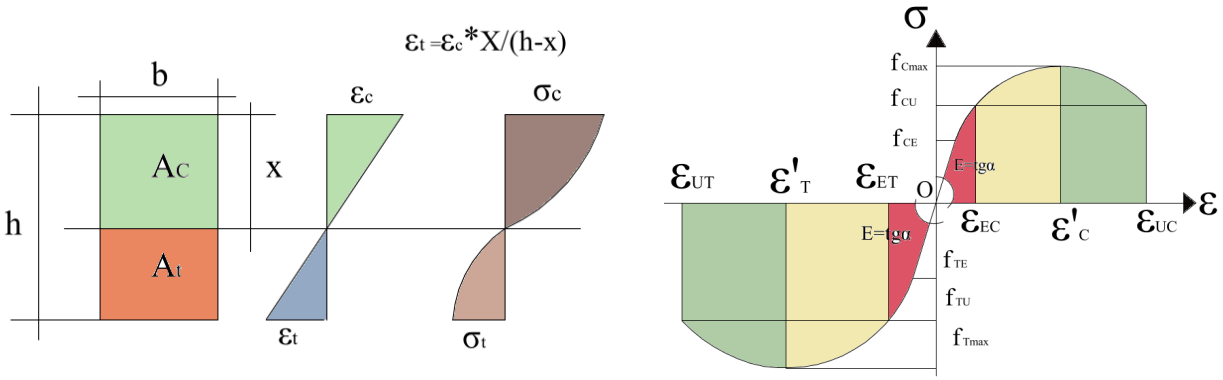
La legge di variazione della tensione di compressione e trazione deriva dal principio di conservazione delle sezioni piane

$\varepsilon(y) = \pm y*\varepsilon_C/x$; *asse y verticale origine nell' asse neutro*

$\sigma_C(y) = a_1*(\xi*y)^3 + a_2*(\xi*y)^2 + a_3*(\xi*y)$; $\sigma_T(y) = -[b_1*(\xi*y)^3 + b_2*(\xi*y)^2 + b_3*(\xi*y)]$

Verifica SLU : rottura per max deformazione alla fibra tesa o compressa

La verifica consiste nella determinazione del momento ultimo della sezione M_{RD}



Rottura della sezione per $\varepsilon_{CU} = \varepsilon'_C$ *dal diagramma tensione deformazione poichè al valore ultimo della* ε_c *corrisponde una tensione di compressione* $f_{cu} < f_{cmax}$

Il calcolo è molto più semplice , dalla equazione di equilibrio alla traslazione

$\int \sigma_N*dy = \int \sigma_T*dy$ *per max deformazione di compressione* ε_{cmax}

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε varia con legge lineare

$\varepsilon(y) = y*\varepsilon'_c/x = (\xi*y)$ *parte compressa tra zero e X*

$\varepsilon(y) = y*\varepsilon'_c/x = (\xi*y)$ *parte tesa tra zero e h-X*

$\sigma_N = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 \ (\xi * y)$

$\sigma_T = -[b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 \ (\xi * y) \ ]$

I due integrali sono immediati

$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2$

$\int \sigma_T * dy = b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)2^3/2$

Eguagliando le due risultanti trazione e compressione

$a_1 * \xi^3 * x^4 / 4 + a_2 * \xi^2 * x^3 / 3 + a_3 * \xi * x^2 / 2 =$

$= b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)^2/2 + b_4$

$\varepsilon_C = \xi * x \ ; \quad \xi = \varepsilon_C / x \quad \varepsilon_T = \varepsilon_C * (h-x)/x \quad (h-x) = \varepsilon_T * x / \varepsilon_C = \varepsilon_T / \xi \quad ; \ x = \varepsilon_C / \xi ;$

ε_{Cu} *valore di rottura noto funzione del materiale* $x = (\varepsilon'_C / \xi)$

$H-x = (h - \varepsilon'_C / \xi)$

La incognita della equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale è la sola ξ

$a_1 * \xi^3 * (\varepsilon'_c / \xi)^4/4 + a_2 * \xi^2 * (\varepsilon'_c / \xi)^3/3 + a_3 * \xi * (\varepsilon'_c / \xi)^2/2 + a_4 * (\varepsilon'_c / \xi) =$

$= b_1 * \xi^3 * (h - \varepsilon'_c / \xi)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h - \varepsilon'_c / \xi)^3/3 + b_3 * \xi * (h - \varepsilon'_c / \xi)^2/2 + b_4 * (h - \varepsilon'_c / \xi)$

Che può essere risolta con il teorema degli zeri o il software Effedix
La profondità dell' asse neutro $x = (\varepsilon'_c / \xi)$ *è un valore numerico calcolato*
Il momento resistente della sezione rispetto all'asse neutro

$Mrd = B * \int [a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 \ (\xi * y) * y * dy +$

$+ B * \int [b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 \ (\xi * y)] * y * dy$

$Mrd = B * \{ a_1 * \xi^3 * x^5 / 5 + a_2 * \xi^2 * x^4 / 4 + a_3 * \xi * x^3 / 3$

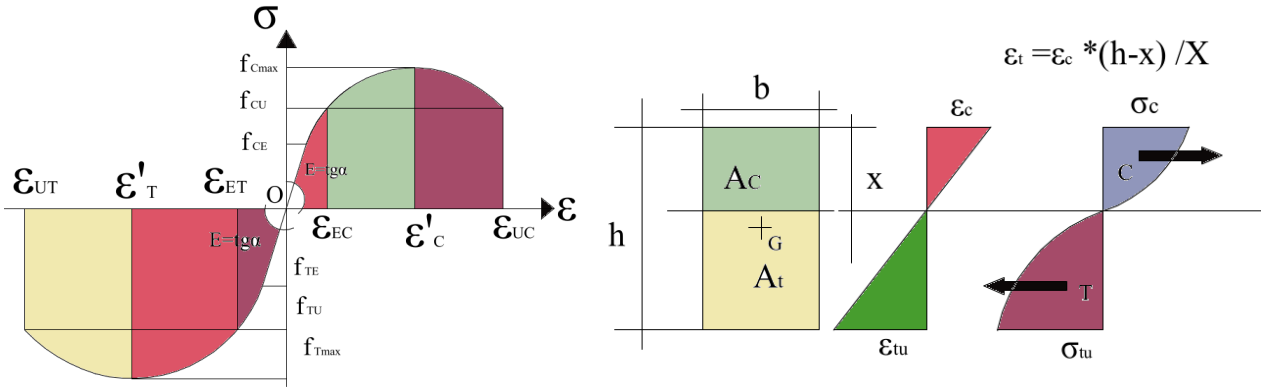
$+ b_1 * \xi^3 * (h-x)^5/5 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^4/4 + b_3 * \xi * (h-x)^3/3 \}$

Le tensioni lungo la sezione composta

$\sigma_C(y) = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 * (\xi * y)$

$\sigma_T(y) = -[b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 * (\xi * y) + b_4]$

Rottura della sezione per $\varepsilon_{TU} = \varepsilon'_T$ *dal diagramma tensione deformazione poichè al valore ultimo della* ε_T *corrisponde una tensione di compressione* $f_{TU} < f_{Tmax}$ *.Nella sezione la rottura per trazione avviene solo quando la deformazione ultima è minore di quella a compressione ovvero di materiale avente un comportamento no omogeneo a trazione e compressione.*



$\int \sigma_C * dy = \int \sigma_T * dy$ *per max deformazione di trazione* ε'_T

Per il principio di conservazione delle sezioni piane la ε *varia con legge lineare*

$$\varepsilon(y) = y * \varepsilon'_T / (h-x) = (\xi * y) \quad \text{parte compressa tra zero e } X$$

$$\varepsilon(y) = y * \varepsilon'_T / (h-x) = (\xi * y) \quad \text{parte tesa tra zero e } h-X$$

Mediante la posizione $\xi = \varepsilon_{tu}/(h-x)$

$$\sigma_N = a_1 * (\xi * y)^3 + a_2 * (\xi * y)^2 + a_3 (\xi * y)$$

$$\sigma_T = -[b_1 * (\xi * y)^3 + b_2 * (\xi * y)^2 + b_3 (\xi * y)]$$

I due integrali sono immediati

$$\int \sigma_N * dy = a_1 * \xi^3 * x^4/4 + a_2 * \xi^2 * x^3/3 + a_3 * \xi * x^2/2$$

$$\int \sigma_T * dy = b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)2^3/2$$

Eguagliando le due risultanti trazione e compressione

$$a_1 * \xi^3 * x^4/4 + a_2 * \xi^2 * x^3/3 + a_3 * \xi * x^2/2 =$$

$$= b_1 * \xi^3 * (h-x)^4/4 + b_2 * \xi^2 * (h-x)^3/3 + b_3 * \xi * (h-x)^2/2$$

$$\varepsilon'_T = \xi * (h-x); \quad \xi = \varepsilon'_T/(h-x) \quad \varepsilon_C = \varepsilon'_T * x/(h-x)$$

$(h-x) = \varepsilon'_T * x/\varepsilon_C$; $\varepsilon_C * (h-x) = \varepsilon'_T * x$

ε'_T valore di rottura noto funzione del materiale $h-x = (\varepsilon'_T/\xi)$

$(h-x) = (\varepsilon'_T/\xi)$; $x = h - (\varepsilon'_T/\xi)$

La incognita della equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale è la sola ξ

$$a_1*\xi^3*(h-(\varepsilon'_T/\xi))^4/4+a_2*\xi^2*(h-(\varepsilon'_T/\xi))^3/3+a_3*\xi*(h-(\varepsilon'_T/\xi))^2/2) =$$

$$= b_1*\xi^3*(\varepsilon'_T/\xi)^4/4 + b_2*\xi^2*(\varepsilon'_T/\xi)^3/3 + b_3*\xi*(\varepsilon'_T/\xi)^2/2)$$

Che può essere risolta con il teorema degli zeri o il software Effedix

La profondità dell'asse neutro $x=h-(\varepsilon'_T/\xi)$ è un valore numerico calcolato
Il momento resistente della sezione rispetto all'asse neutro

$$Mrd = B*\int[a_1*(\xi*y)^3+a_2*(\xi*y)^2+a_3(\xi*y)]*y*dy +$$

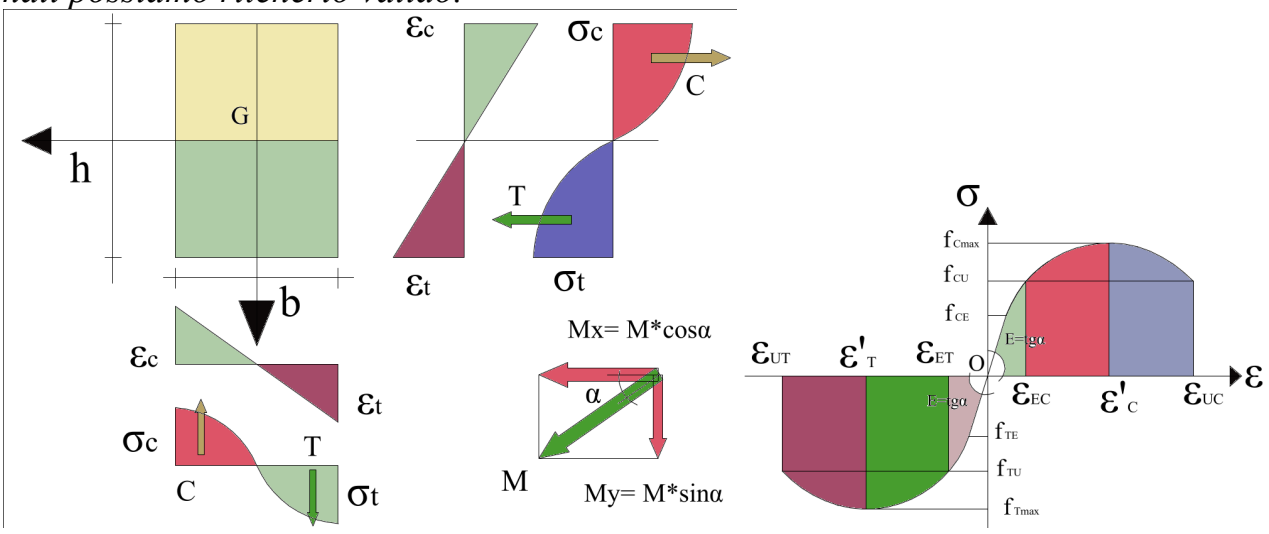
$$+B*\int[b_1*(\xi*y)^3+b_2*(\xi*y)^2+b_3(\xi*y)]*y*dy$$

$$Mrd = B*\{a_1*\xi^3*x^5/5+a_2*\xi^2*x^4/4+a_3*\xi*x^3/3+$$

$$b_1*\xi^3*(h-x)^5/5+b_2*\xi^2*(h-x)^4/4+b_3*\xi*(h-x)^3/3$$

5- La flessione deviata

Le formule per flessione deviata possiamo ottenerle dal principio di sovrapposizione degli effetti , sommando le tensioni normali per momento flettente agente direzione x e y; il principio di sovrapposizione degli effetti è valido nella ipotesi di elasticità lineare facendo riferimento ai carichi applicati, stiamo sommando delle tensioni normali possiamo ritenerlo valido.



$Y_G = [3/7*A^2*B]/[\ 3/4*A*B\ ] = 4/7*h/2$ *Momento secondo X*

$Y_G = [3/7*A^2*B]/[\ 3/4*A*B\ ] = 4/7*b/2$ *Momento secondo Y*

L'area del diagramma delle tensioni

$C_X = 3/8*b*h*\sigma_C$; $C_Y = 3/8*b*h*\sigma_C$;

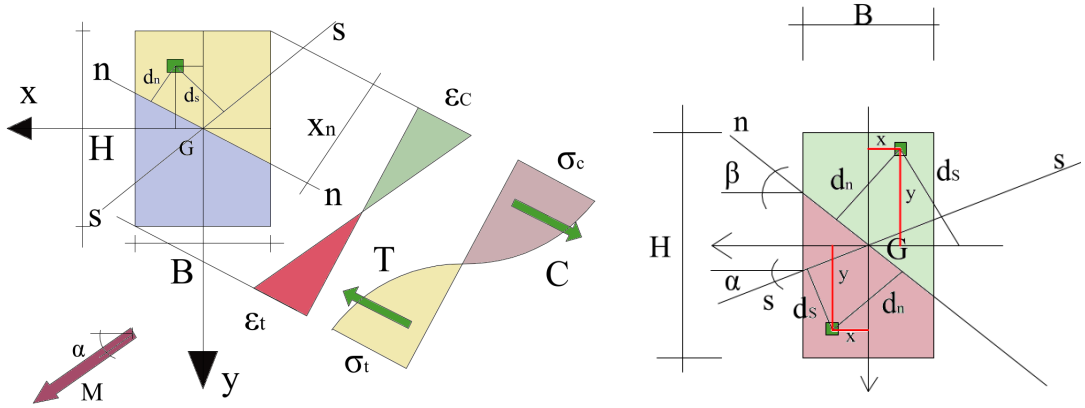
$M_X = 3/8*b*h*\sigma_C*4/7*h = 3/14*b*h^2*\sigma_C$;

$M_Y = 3/8*b*h*\sigma_C*4/7*b = 3/14*b^2*h*\sigma_C$;

$\sigma_C = 14*M_X/(3*b*h^2)+14*M_Y/(3*b^2*h) = 4{,}66*(M_X+M_Y)/[b*h*(b+h)]$

$\sigma_T = 14*M_X/(3*b*h^2)+14*M_Y/(3*b^2*h) = 4{,}66*(M_X+M_Y)/[b*h*(b+h)]$

La verifica a flessione deviata senza sovrapposizione degli effetti , la si esegue nella ipotesi di comportamento omogeneo e isotropo a trazione e compressione , le incognite sono due ; la distanza X_n e la inclinazione β dell'asse neutro $X_n = H/(2*\sin\beta)$



La equazioni a disposizione è la traslazione orizzontale

$\int \sigma_C*dA = \int \sigma_T*dA$; *e' un integrale doppio il dominio*

$-B/2 \le x \le B/2$ $y = x*tg\beta$ *in un sistema di riferimento di assi x e y*

area compressa $x_n*tg\beta \le y \le H/2$ *area tesa* $-H/2 \le y \le x*tg\beta$

$d_n = (y-x*tg\beta)*\sin\beta$; $H_n = (H-B*tg\beta)*\sin\beta/2$;

$\varepsilon(y) = 4*\varepsilon_c*\sin\beta^2*(y-x*tg\beta)/H$ $\int\sigma(\varepsilon)dA = \iint(a_1*\varepsilon^3+a_2*\varepsilon^2+a_3*\varepsilon)dxdy =$

$= \iint\{a_1[4*\varepsilon_c*\sin\beta^2*(y-x*tg\beta)/H]^3+a_2[4*\varepsilon_c*\sin\beta^2*(y-x*tg\beta)/H]^2+$

$+a_3*[4*\varepsilon_c*\sin\beta^2*(y-x*tg\beta)/H]\}dxdy = 0$

Estremi di integrazione

Zona tesa $-B/2 \le x \le B/2$; $-H/2 \le y \le x_n * tg\beta$

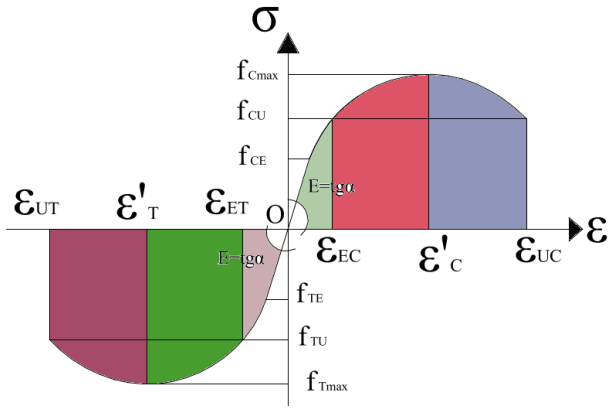
Zona compressa $-B/2 \le x \le B/2$; $x_n * tg\beta \le y \le H/2$

Integrale doppio con incognita angolo β , da risolvere con software di analisi matematica . Il momento rispetto all'asse neutro:

$$M_{RD}=\int \sigma(\varepsilon) d_N * dA = \iint (a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon) * d_N * dxdy =$$

$$= \iint \{a_1[4 * \varepsilon_c * sin\beta^2 * (y - x * tg\beta)/H]^3 + a_2[4 * \varepsilon_c * sin\beta^2 * (y - x * tg\beta)/H]^2 + a_3[4 * \varepsilon_c * sin\beta^2 * (y - x * tg\beta)/H]\}(y - xtg\beta) sin\beta \, dxdy ;$$

La rottura avviene in modo simmetrico essendo il materiale omogeneo la deformazione da considerare è quella corrispondente al valore massimo della tensione ε'_c



Gli integrali calcolati in zona tesa e compressa vanno sommati i valori numerici sono tutti noti l'angolo β calcolato in precedenza , la deformazione ultima ε'_c *funzione del materiale., la base B e l'altezza H della sezione.*

La curvatura della sezione , rispetto asse x e y

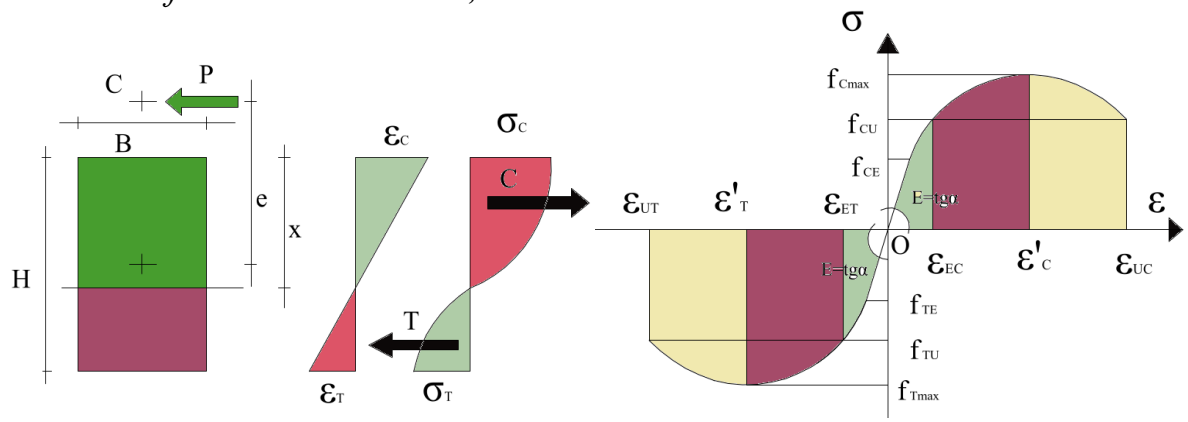
$\chi_X = \varepsilon_c / h$, *la rotazione* $\Delta\varphi_X = \chi_X * \Delta z$ $\chi_Y = \varepsilon_c / h$ *la rotazione* $\Delta\varphi_Y = \chi_Y * \Delta z$

6-Pressoflessione retta e deviata

La verifica a pressoflesione retta è immediata , l'asse neutro è orizzontale può esre ricavata dalla equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

$$\int \sigma_C * dA - \int \sigma_T * dA = P$$

Dove P è lo sforzo normale di compressione applicato nel centro di sollecitazione C sull'asse di simmetria della sezione a distanza e dal baricentro geometrico G
Il momento flettente $M = P * e$,



Il comportamento del materiale è omogeneo a trazione e compressione isotropo

$$\sigma(\varepsilon) = a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon$$

La equazione di equilibrio alla traslazione

$$3/4 * b * x * \sigma_C - 3/4 * b * (h-x) * \sigma_T = P$$

La tensione $\sigma_T = a_1 * \varepsilon^3_T + a_2 * \varepsilon^2_T + a_3 * \varepsilon_T$ *la deformazione al lembo teso*

$$\varepsilon(y) = y * \varepsilon_C / X \qquad \varepsilon_T = (H-x) * \varepsilon_C / x$$

$$\sigma_T = a_1 * [(H-x) * \varepsilon_C / x]^3 + a_2 * [(H-x) * \varepsilon_C / x]^2 + a_3 * [(H-x) * \varepsilon_C / x]$$

$$\sigma_C = a_1 * \varepsilon_C^3 + a_2 * \varepsilon_C^2 + a_3 * \varepsilon_C$$

Se vogliamo determinare il momento di rottura della sezione (è per compressione poichè il materiale ha un comportamento omogeneo ,dalla equazione di equilibrio determiniamo la x

$$3/4 * b * x * \sigma_C - 3/4 * b * (h-x) * \sigma_T = P$$

$$3/4 * b * x * (a_1 * \varepsilon_C^3 + a_2 * \varepsilon_C^2 + a_3 * \varepsilon_C) +$$

$$-3/4 * b * (h-x) * \{ a_1 * [(H-x) * \varepsilon_C / x]^3 + a_2 * [(H-x) * \varepsilon_C / x]^2 + a_3 * [(H-x) * \varepsilon_C / x] \} = P$$

Il momento di rottura M_{RD} calcolato rispetto al baricentro geometrico

$M_{RD} = C*d_C + T*d_T$

$d_C = 4/7*x - H/2$; $d_T = 3/7*X - H/14$

$d_T = H/2-(H-X)) + 4/7*(H-X) = -H/2 + X + 4/7*H-4/7*X = 3/7*X - H/14$

$M_{RD} = 3/4*b*x*\sigma_C*(4/7*x - H/2) - 3/4*b*(h-x)*\sigma_T*(3/7*X - H/14)$

$\sigma_C = a_1*\varepsilon_C^3 + a_2*\varepsilon_C^2 + a_3*\varepsilon_C$;

$\sigma_T = a_1*[(H-x)*\varepsilon_C/x]^3 + a_2*[(H-x)*\varepsilon_C/x]^2 + a_3*[(H-x)*\varepsilon_C/x]$

Se vogliamo determinare l'andamento delle tensioni all'interno della sezione basta risolvere le due equazioni nelle incognite ε_C ed x tramite un semplice di software di matematica

$P*e = 3/4*b*x*\sigma_C*(4/7*x - H/2) - 3/4*b*(h-x)*\sigma_T*(3/7*X - H/14)$;

$P = 3/4*b*x*\sigma_C - 3/4*b*(h-x)*\sigma_T$;

$\sigma_C = a_1*\varepsilon_C^3 + a_2*\varepsilon_C^2 + a_3*\varepsilon_C$;

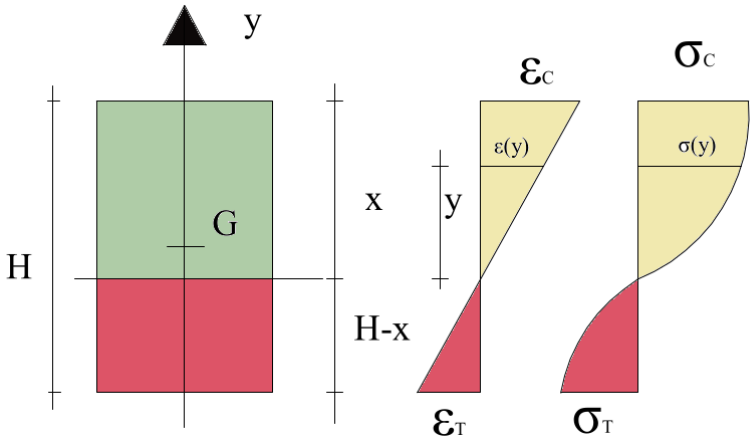
$\sigma_T = a_1*[(H-x)*\varepsilon_C/x]^3 + a_2*[(H-x)*\varepsilon_C/x]^2 + a_3*[(H-x)*\varepsilon_C/x]$;

$\varepsilon(y) = y*\varepsilon_C/x$ $\varepsilon_T = (H-x)*\varepsilon_C/x$

L'andamento delle tensioni lungo la sezione

$\sigma(y) = a_1*(y*\varepsilon_C/x)^3 + a_2*(y*\varepsilon_C/x)^2 + a_3*(y*\varepsilon_C/x)$

La curvatura $\chi = (\varepsilon_C + \varepsilon_T)/H$ *; la rotazione* $\Delta\varphi = \chi * \Delta z$



La verifica e pressoflessione deviata

La verifica a pressoflessione deviata possiamo eseguirla come sovrapposizione di due pressoflessioni rette direzione x e y .

Il comportamento del materiale è omogeneo a trazione e compressione isotropo

$$\sigma(\varepsilon)= a_1 *\varepsilon^3 + a_2 *\varepsilon^2 + a_3 *\varepsilon$$

La equazione di equilibrio alla traslazione

$$3/4*b*x*\sigma_{CX} - 3/4*b*(h-x)*\sigma_{TX} = P$$

$$3/4*h*y*\sigma_{CY} - 3/4*b*(b-y)*\sigma_{TY} = P$$

Per determinare la x e la y occorrono altre equazioni di equilibrio e congruenza

$$\varepsilon_C =\varepsilon_{CX} +\varepsilon_{CY} \quad ; \quad \varepsilon_T =\varepsilon_{TX} +\varepsilon_{TY} \quad ;$$

La tensione nel vertice teso

$$\sigma_{TX} = a_1 *\varepsilon^3_{TX}+ a_2 *\varepsilon^2_{TX}+ a_3*\varepsilon_{TX} \quad ; \quad \sigma_{TY} = a_1 *\varepsilon^3_{TY} + a_2 *\varepsilon^2_{TY}+ a_3*\varepsilon_{TY} \quad ;$$

la deformazione nel vertice teso

$$\varepsilon(x,y) = y*\varepsilon_{CX}/X + x*\varepsilon_{CY}/Y \qquad \varepsilon_{TX} = (H-x)*\varepsilon_{CX}/X \; ; \quad \varepsilon_{TY} = (B-y)*\varepsilon_{CY}/Y \; ;$$

$$\varepsilon_T = (H-x)*\varepsilon_{CX}/X + (B-y)*\varepsilon_{CY}/Y \; ;$$

$$\sigma_{TX} = a_1*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/X]^3+a_2*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/X]^2+ a_3*(H-x)*\varepsilon_{CX}/X$$

$$\sigma_{CX} = a_1*\varepsilon_{C X}^3+a_2*\varepsilon_{C X}^2+ a_3*\varepsilon_{CX}$$

$$\sigma_{TY} = a_1*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y]^3+a_2*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y]^2+ a_3*(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y$$

$$\sigma_{CY} = a_1*\varepsilon_{C Y}^3+a_2*\varepsilon_{C Y}^2+ a_3*\varepsilon_{CY}$$

Dalle due equazioni indipendenti ricaviamo

$$3/4*b*x*[a_1*\varepsilon_{C X}^3+a_2*\varepsilon_{C X}^2+ a_3*\varepsilon_{CX}]\sigma_{CX} +$$

$$-3/4*b*(h-x)*\{a_1*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/X]^3+a_2*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/X]^2+ a_3*(H-x)*\varepsilon_{CX}/X \}\sigma_{TX} = P$$

$$3/4*h*y*[a_1*\varepsilon_{C Y}^3+a_2*\varepsilon_{C Y}^2+ a_3*\varepsilon_{CY}]\sigma_{CY} +$$

$$-3/4*b*(b-y)*\{ a_1*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y]^3+a_2*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y]^2+a_3*(B-y)*\varepsilon_{CY}/Y \}\sigma_{TY} = P$$

Il momento di rottura in direzione x e y ; M_{XRD} ,M_{YRD} , calcolati rispetto al baricentro geometrico

$M_{XRD} = C_X*d_{CX} + T_X*d_{TX}$; $M_{YRD} = C_Y*d_{CY} + T_Y*d_{TY}$;

$d_{CX} = 4/7*x - H/2$; $d_{TX} = 3/7*X - H/14$; $d_{CY} = 4/7*y - B/2$; $d_{TY} = 3/7*Y - B/14$;

$M_{XRD} = 3/4*b*x*\sigma_{CX}*(4/7*x - H/2) - 3/4*b*(h-x)*\sigma_{TX}*(3/7*X - H/14)$

$M_{YRD} = 3/4*h*y*\sigma_{CY}*(4/7*y - B/2) - 3/4*h*(b-y)*\sigma_{TY}*(3/7*y - b/14)$

Dove x e y profondità asse neutro direzione x e y le tensioni

$\sigma_{CX} = a_1*\varepsilon_{CX}^3 + a_2*\varepsilon_{CX}^2 + a_3*\varepsilon_{CX}$;

$\sigma_{TX} = a_1*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/x]^3 + a_2*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/x]^2 + a_3*[(H-x)*\varepsilon_{CX}/x]$

$\sigma_{CY} = a_1*\varepsilon_{CY}^3 + a_2*\varepsilon_{CY}^2 + a_3*\varepsilon_{CY}$;

$\sigma_{TY} = a_1*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/y]^3 + a_2*[(B-y)*\varepsilon_{CY}/y]^2 + a_3*[(B-y)*\varepsilon_{CYC}/y]$

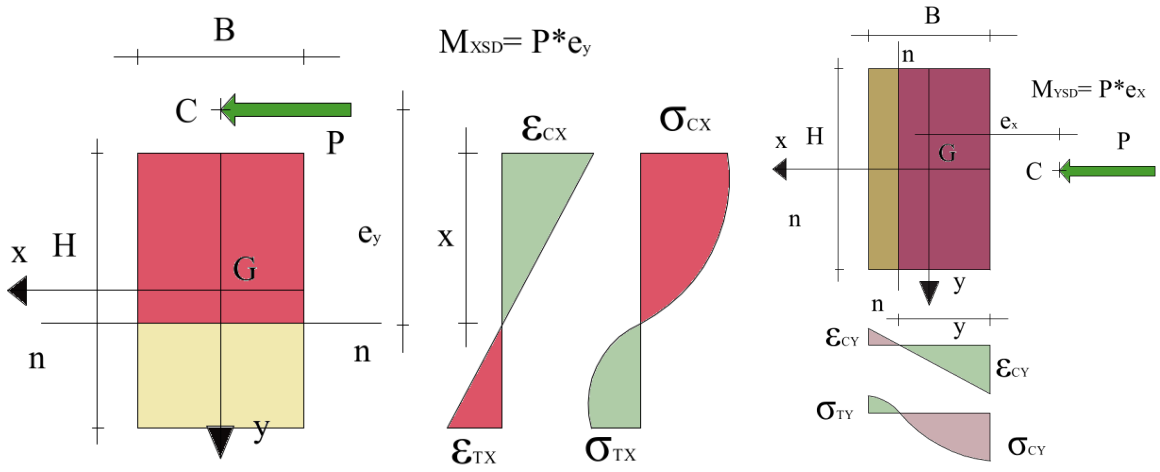
Poichè non conosciamo la ripartizione degli sforzi normali e deformazioni

$\varepsilon_C = \varepsilon_{CX} + \varepsilon_{CY}$; $\varepsilon_T = \varepsilon_{TX} + \varepsilon_{TY}$; $P = P_X + P_Y$

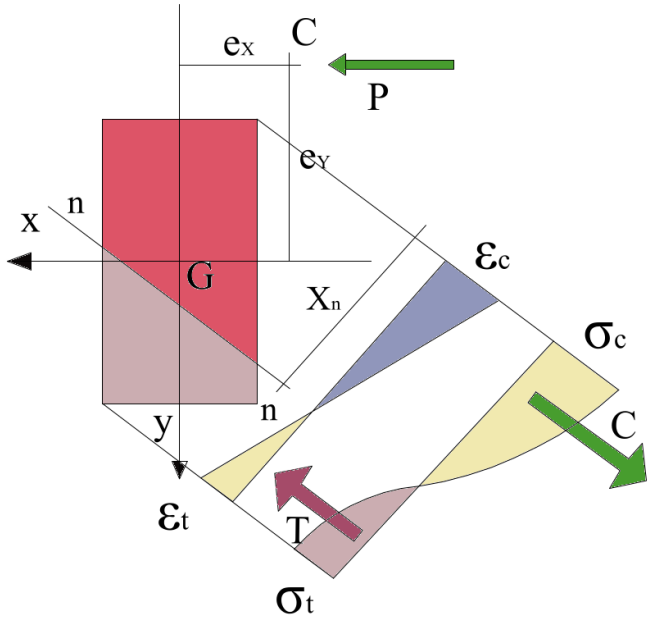
il calcolo dei momenti resistenti è stato eseguito separatamente per la verifica a pressoflessione è opportuno combinare i momenti resistenti

$P = P_X = P_Y$; $\varepsilon_C = \varepsilon_{CX} = \varepsilon_{CY}$; $\varepsilon_T = \varepsilon_{TX} = \varepsilon_{TY}$

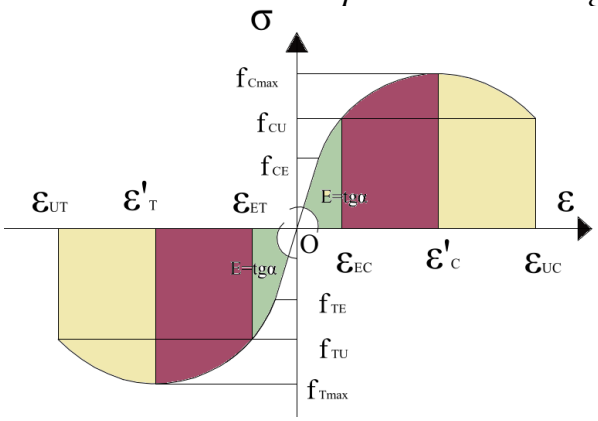
$$M_{XRD}/M_{XSD} + M_{YRD}/M_{YSD} \leq 1$$



La verifica a pressoflessione deviata la eseguiamo considerando lo sforzo normale P applicato nel centro di sollecitazione C di coordinate e_X;e_Y;



Il materiale ha un comportamento omogeneo e isotropo a trazione e compressione



*La incognita è la retta y = m*x+n ovvero la equazione dell'asse neutro dove*

tgβ = m coefficiente angolare $n = X_n - H/(2\sin\beta)$

Le incognite sono l'angolo β e la profondità X_n

Le equazioni sono due traslazione delle tensioni normali e rotazione rispetto all'asse di sollecitazione

$P = \int \sigma_c \, dA - \int \sigma_T \, dA$

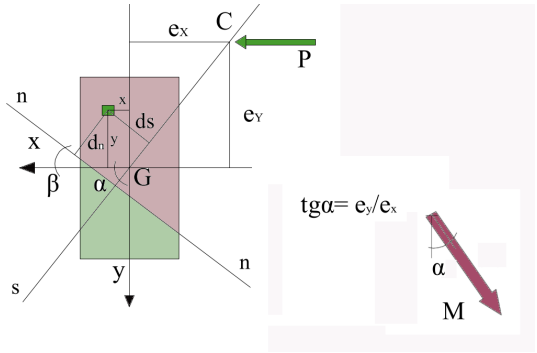
$0 = \int \sigma_c * d_s * dA - \int \sigma_T * d_s * dA$

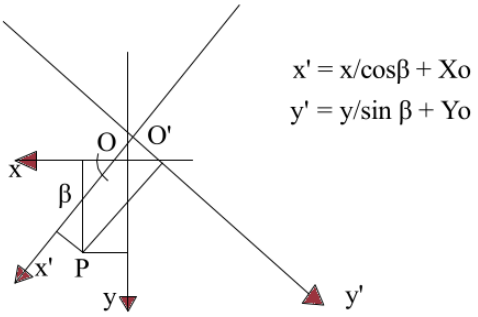
Ipotizzando che la rottura sia per compressione al vertice si raggiunge la deformazione ε'_C *corrispondente al valore max della tensione* f_{cmax}

$\varepsilon(x,y) = d_N * \varepsilon_C / X_N \qquad \varepsilon_T = (H/\cos\alpha - X_N) * \varepsilon_C / X_N$;

Le distanze d_N; d_S e le coordinate del punto O' intersezione tra l'asse neutro e l asse di sollecitazione soluzione del sistema di equazioni

$Y_n = X_n * tg\beta + n_S$: $Y_S = X_S * tg\alpha + n_S$:





$d_s = Y/sin\alpha + Yo$ $d_n = x/cos\beta + Xo$ $\varepsilon(x,y) = d_N * \varepsilon_C / X_N$

$Xo = [n-(e_x * M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$
$Yo = [n-(e_x * M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X] * tg\beta + n$

$\lambda_N = X/cos\beta + [n-(e_x * M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$;
$\lambda_S = Y/sin\alpha + [n-(e_x * M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X] * tg\beta + n$

Per la tensione la solita formulazione polinomiale

$\sigma(\varepsilon) = a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon$

$P = \int \sigma(\varepsilon) dA = \iint (a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon) dxdy$

$P = \int \sigma(\varepsilon) dA = \iint [a_1 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^3 + a_2 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^2 + a_3 * d_N * \varepsilon_C / X_N)] dxdy$

Gli estremi di integrazione per il dominio

Zona compressa $-B/2 \le x \le B/2$; $x * tg\beta + X_n - H/(2sin\beta) \le y \le H/2$

Zona tesa $-B/2 \le x \le B/2$; $-H/2 \le y \le x * tg\beta + X_n - H/(2sin\beta)$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno ad s

$\int \sigma(\varepsilon) * d_s \, dA = \iint d_s * (a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon) dxdy = 0$

$\int \sigma(\varepsilon) * d_s \, dA = \iint d_s * [a_1 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^3 + a_2 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^2 + a_3 * d_N * \varepsilon_C / X_N)] dxdy = 0$

Si hanno due equazioni nelle due incognite β ,X_n *da risolvere mediante software di analisi matematica*
Il calcolo del momento resistente rispetto all'asse neutro

$M_{RD} = \int \sigma(\varepsilon) * d_N * dA$;

$M_{RD} = \iint d_N * [a_1 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^3 + a_2 * (d_N * \varepsilon_C / X_N)^2 + a_3 * d_N * \varepsilon_C / X_N)]\, dxdy$

Il dominio di integrazione è sempre lo stesso i due integrali relativi alla zona tesa e compressa vanno sommati

Zona compressa $-B/2 \le x \le B/2 \quad ; \quad x*tg\beta + X_n - H/(2\sin\beta) \le y \le H/2$

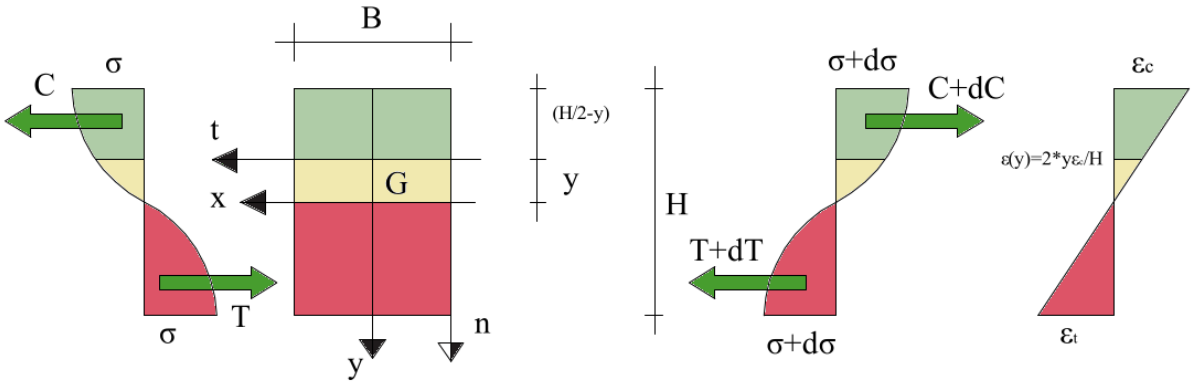
Zona tesa $-B/2 \le x \le B/2 \quad ; \quad -H/2 \le y \le x*tg\beta + X_n - H/(2\sin\beta)$

La verifica consiste nel confronto tra $M_{RD} \ge M_{SD}$

Gli integrali vanno calcolati come sommatoria attraverso la modellazione a fibre anche per sezioni di forma qualsiasi e implementati su foglio elettronico o software che vedremo nel paragrafo 13 assieme ai domini di rottura per flessione e pressoflessione semplice e deviata .

7-Taglio

La trattazione del taglio la eseguiamo inizialmente per sezione rettangolare e poi per sezione a T per tener conto della variazione della corda nel caso di flessione semplice retta ; il procedimento è analogo a quello di Jourawsky tramite l'equilibrio dell'incremento di tensioni normali con la forza di scorrimento risultante del tensioni tangenziale per un tronco di trave di lunghezza ΔZ.



La tensione normale $\sigma = a_1 * \varepsilon^3 + a_2 * \varepsilon^2 + a_3 * \varepsilon$; *dove* $\varepsilon(y) = 2 * y * \varepsilon_C / H$

$$\sigma(y) = a_1 * (2 * y * \varepsilon_C / H)^3 + a_2 * (2 * y * \varepsilon_C / H)\varepsilon^2 + a_3 * (2 * y * \varepsilon_C / H)$$

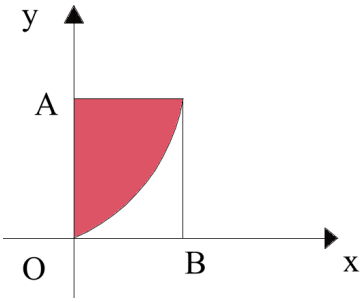
Per l'equilibrio alla traslazione orizzontale

$$S = \tau * B * \Delta Z = b * \int d\sigma * dy$$

Dalla trattazione della flessione semplice nella ipotesi di elasticità lineare

$\sigma = M/I*y$ *la formula era immediata* $\tau = V/I*S/b$

La area della parte tratteggiata $3/4*A*B$



$\int k_1*x^3 dx = k_1*x^4/4 = A*B/4$

La area della parte tratteggiata $3/4*A*B$

$Y_G = [3/7*A^2*B]/[\ 3/4*A*B\ ] = 4/7*A$

L'area totale del diagramma delle tensioni

$C = 3/8*b*h*\sigma_C$ $\quad M = 3/8*b*h*\sigma_C*4/7*h = 3/14*b*h^2*\sigma_C$

La risultante relativa alla sola corda

$C = 3/8*b*h*\sigma_C - 3/4*b*y*\sigma(y) = 3/4*b*(h*\sigma_C/2 - y*\sigma(y))$

La tensione $\sigma(y)$ *in funzione del tensione al lembo compresso* σ_C

$$\sigma(y) = a_1*(2*y*\varepsilon_C/H)^3 + a_2*(2*y*\varepsilon_C/H)\varepsilon^2 + a_3*(2*y*\varepsilon_C/H)$$

$$\sigma_C = a_1*\varepsilon_C^3 + a_2*\varepsilon_C^2 + a_3*\varepsilon_C$$

$$\sigma(y) = \sigma_C*[(2y/H)^3 + (2y/H)^2 + (2*y/H)] = 2*y/H*\sigma_C*[(2y/H)^2 + (2y/H) + 1]$$

$$\sigma(y) = 2*y/H*\sigma_C*[(2y/H)^2 + (2y/H) + 1] \ ; \ \sigma_C = \sigma(y)*H/[((2y/H)^3 + (2y/H)^2 + (2y/H)]$$

$$M = 3/14*b*h^2*\sigma_C = 3/14*b*H^3*\sigma(y)/[((2y/H)^3 + (2y/H)^2 + (2y/H)]$$

$$\sigma(y) = 14*M*[((y/H/2)^3 + (y/H/2)^2 + (y/H/2)]/(3*B*H^3)$$

La tensione si compone di 3 aliquote $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$$\sigma_1 = 112*M*(y/H)^3/I + 56*M*(y/H)^2/I + 28*M*(y/H)/I$$

I momento di inerzia della sezione rispetto alla base B

$S = \tau*B*\Delta Z = b*\int d\sigma*dy$ *La tensione tangenziale sull'asse neutro è immediata*

$\Delta C = 3/8*b*h*\Delta\sigma_C = \tau*B*\Delta Z \qquad \Delta\sigma_C = 4{,}66*\Delta M/(b*h^2)$

$3/8*b*h*4{,}66*\Delta M/(b*h^2) = \tau*B*\Delta Z \qquad ; 3/8*b*h*4{,}66*V/(b*h^2) = \tau*B$

$V = \Delta M/\Delta Z \quad ; \qquad \tau = 3{,}48*V/(b*h) \quad \Delta M/\Delta Z = Q*L/4$ *valore medio del taglio*

Nella ipotesi di elasticità lineare $\tau = 1{,}5*V/(b*h) < \tau \approx 3{,}5*V/(b*h)$

La legge di variazione della tensione tangenziale lungo la sezione

$\tau(y)*B*\Delta Z = 3/4*b*(h*\Delta\sigma_C/2 - y*\Delta\sigma(y)) =$

$\Delta\sigma(y) = \Delta\sigma_C*[(2y/H)^3+(2y/H)^2+(2*y/H)]$

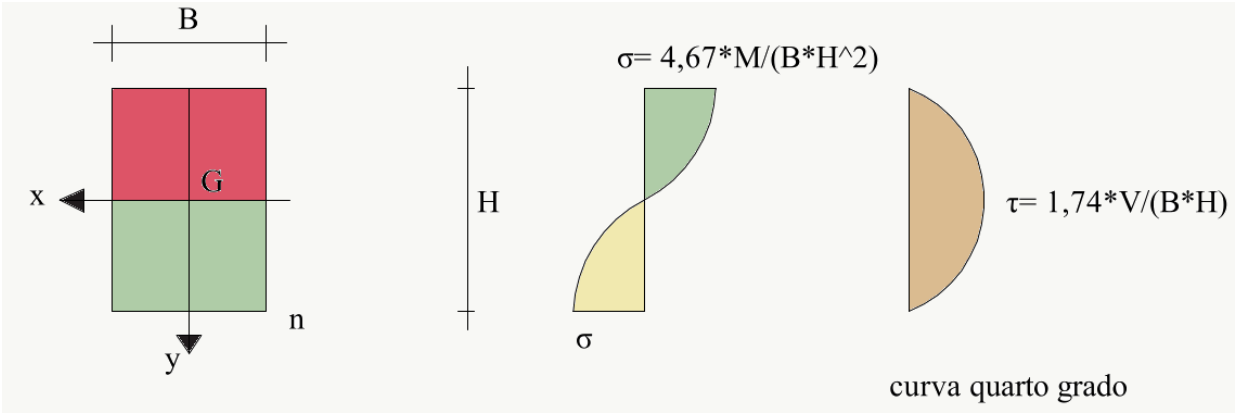
$\tau(y)*B*\Delta Z = 3/4*b*\Delta\sigma_C*\{h/2 - y*[(2y/H)^3+(2y/H)^2+(2y/H)]\}$

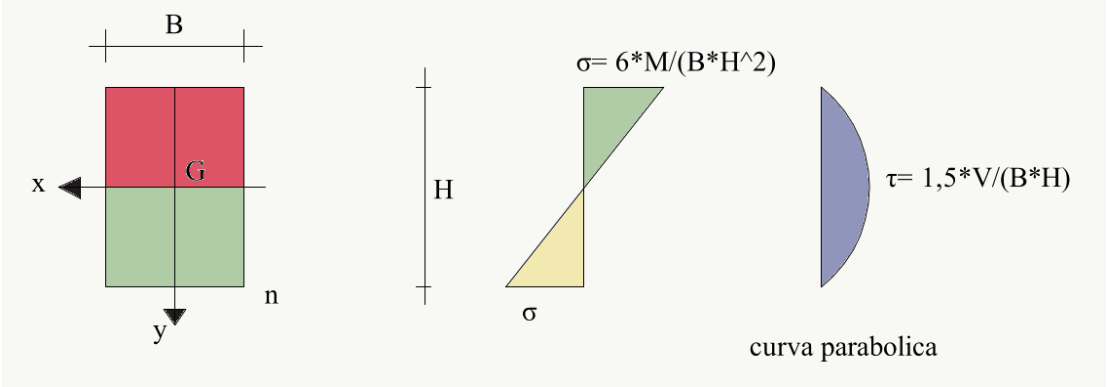
$\Delta\sigma_C = 4{,}66*V/(b*h^2)$

$\tau(y) = 3{,}495*V/(b*h^2)*\{H/2 - y*[(2y/H)^3+(2y/H)^2+(2y/H)]\}$

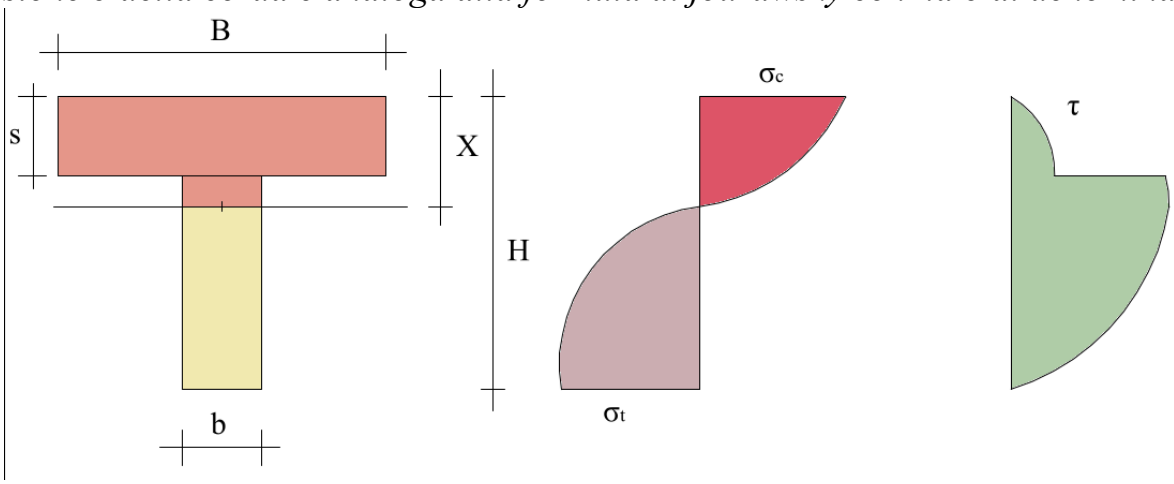
$\tau(y) = 1{,}74*V/(b*h) - 3{,}495*V/(b*h^2)\ y*[(2y/H)^3+(2y/H)^2+(2y/H)]$

Per diagramma delle tensioni lineare la variazione della tensione tangenziale era parabolica ,ora per diagramma delle tensioni cubico la legge di variazione è del quarto ordine





Per una sezione a T la variazione della tensione tangenziale in funzione alla dimensione b della corda è analoga alla formula di jourawsky con la b al denominatore

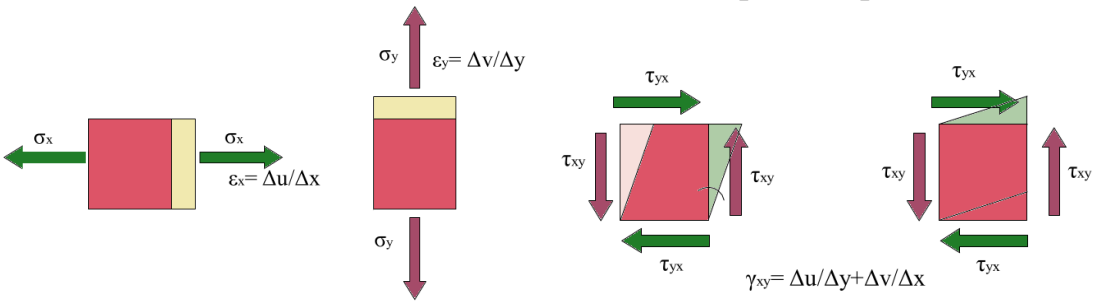


Per il diagramma tensione deformazione per il materiale si adotta una funzione polinomiale

$$\tau(\gamma)=a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma$$

Da ricavare per alcuni materiali in analogia al diagramma delle tensioni normali , per l' acciaio $\tau_{yd}= f_{yd}/\sqrt{3}$.

La deformazione per uno stato tensionale bidimensionale definite come rapporto tra l'allungamento e la dimensione indeformata anche per comportamento non lineare



La deformazione $\gamma_{XY}= du/dy + dv/dx = \varepsilon_X *dx/dy+ \varepsilon_Y *dydx$

Dove dy/dx e dx/dy non è altro che il rapporto tra i lati dell'intorno elementare bidimensionale che assume la forma indeterminata 0/0 ; passando dall'infinitesimale al finito comunque piccolo per Δx *e* $\Delta y << 1 = 10^{-10}$ $\Delta x = \Delta y = 1$

$\gamma_{XY}=\varepsilon_X+\varepsilon_Y$; $\gamma_{XZ}=\varepsilon_X+\varepsilon_Z$ $\gamma_{YZ}=\varepsilon_Y+\varepsilon_Z$

La deformazione a taglio dalla teoria elastica per materiale omogeneo, isotropo ad elasticità lineare $\tau = \gamma*G$ $\gamma= \tau /G$ $\gamma= \chi*V/(G*A)$

Lo spostamento $\Delta v= \gamma*\Delta x$; $\tau(\gamma)=a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma$ $\tau= \chi*V/(GA)$

Nella formulazione polinomiale la rigidezza a taglio $\tau= 1{,}74 *V/A$

$\tau(\gamma)=a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma = 1{,}74*V/(A)$ *da questa equazione III grado ricaviamo* γ

Lo spostamento orizzontale a taglio $\Delta v= \gamma*L$ *, ponendo* $V = 1$ *otteniamo la*

$a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma = 1{,}74*V*A$ *Rigidezza a taglio* $k =V/\Delta v= 1/(\gamma*L)$

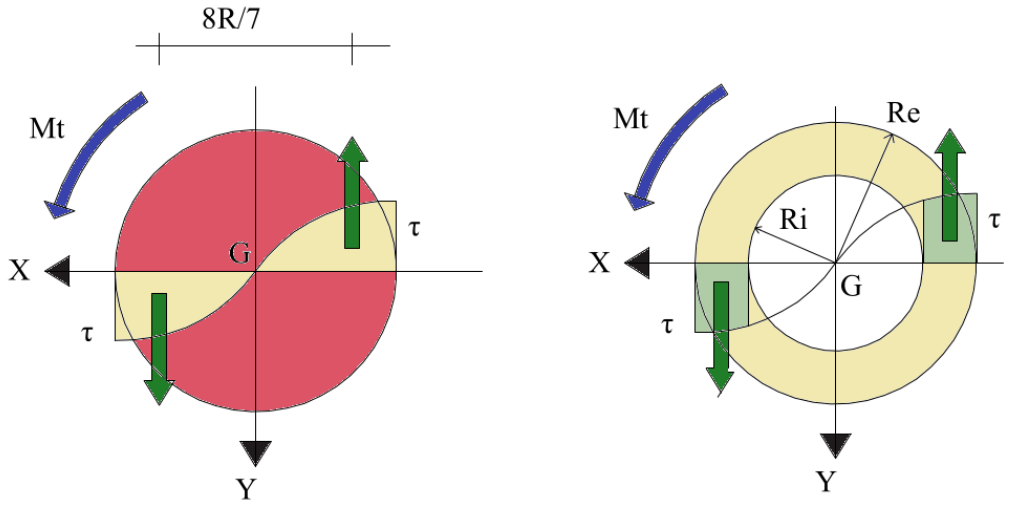
Nella teoria elastica $\Delta v= \chi*V*L/(G*A)$ $k =V/\Delta v=(G*A)/(\chi*L)$

8-Torsione

Per la torsione l'approccio matematico è lo stesso, per sezione circolare, quadrata rettangolare, corona circolare, rettangolare allungata e alla ***Bredt****.*

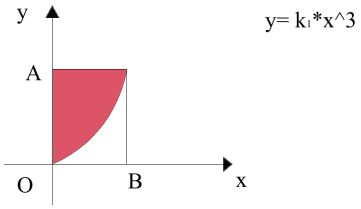
$\tau(\gamma)=a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma$

Ovviamente per sezioni sottili chiuse ovvero di spessore ridotto si considera un diagramma rettangolare e la trattazione è analoga a quella vista in precedenza; viceversa per sezioni sottili aperte si modifica la rigidezza torsionale che approssimiamo a quella plastica .Dal flusso delle tensioni tangenziali con analogia idrodinamica



Per la sezione circolare $M_T = F_T*b*\pi*b$

$F_T = 3/4*\tau*R$ *forza risultante tensioni tangenziali*
Braccio della coppia $b = D/7 = 8R/7$
Teorema di Guldino semicirconferenza descritta dalla forza $2\pi*R/7$



$\int k_1*x^3dx = k_1*x^4/4 = A*B/4$ *L'area campita* $3/4*A*B$ $Y_G = 4*A/7$

$M_T = 3/4 * \tau_{MAX} * R * 8R/7 * 8 * \pi * R/7 = 192\pi/196 * \tau_{MAX} * R^3 = 0{,}979\pi * \tau_{MAX} * R^3 \approx \pi * \tau_{MAX} * R^3$

$\gamma_{MAX} = R * \theta'$ $\quad \tau_{MAX} = a_1 * \gamma_{MAX}^3 + a_2 * \gamma_{MAX}^2 + a_3 * \gamma_{MAX}$ $\quad M_T = \pi * \tau_{MAX} * R^3$

Noto il momento torcente risolvendo la equazione di terzo grado

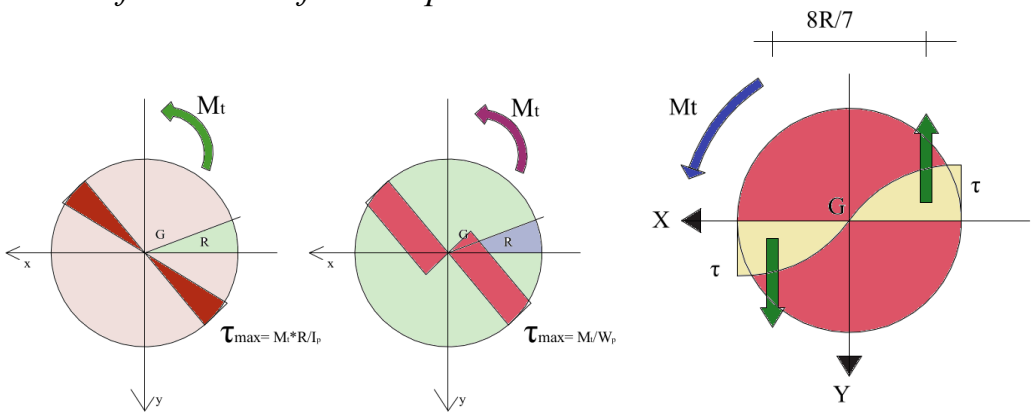
$M_T = \pi * (a_1 * \gamma_{MAX}^3 + a_2 * \gamma_{MAX}^2 + a_3 * \gamma_{MAX}) * R^3$

$a_1 * \gamma_{MAX}^3 + a_2 * \gamma_{MAX}^2 + a_3 * \gamma_{MAX} - 7 * M_T/(3\pi * R^3) = 0$

la equazione deve avere due radici immaginarie e una reale.

Ricaviamo γ_{MAX} *e l'angolo specifico di torsione* $\theta' = \gamma_{MAX}/R$

Dal confronto delle formule per la torsione



$M_T = 4/9 * \pi * \tau * R^3$; $\quad M_T = \pi * \tau * R^3$; $\quad M_T = 0{,}979 * \pi * \tau_{MAX} * R^3$

Per la corona circolare $M_T = M_{T1} - M_{T2}$;
M_{T1} *sezione circolare* R_e ; M_{T2} *sezione circolare* R_i ;

$M_T = \pi * \tau_e * R_e^3 - 3\pi/7 * \tau_i * R_i^3 = \pi * [\tau_e * R_e^3 - \tau_i * R_i^3]$
Per la tensione tangenziale $\tau(\gamma) = a_1 * \gamma^3 + a_2 * \gamma^2 + a_3 * \gamma$

Al solito ipotizziamo sia valido il principio di conservazione delle sezioni piane , l'angolo specifico di torsione θ' *costante e la deformazione* $\gamma = r * \theta'$

$M_T = \pi * [\tau_e * R_e^3 - \tau_i * R_i^3]$

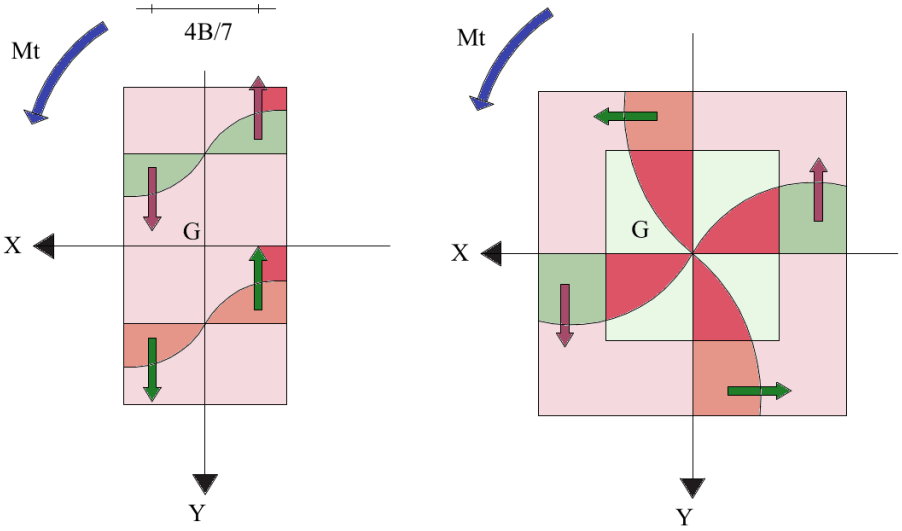
Possiamo determinare il momento torcente di rottura ipotizzando che sulla circonferenza esterna $\tau_{max}(\gamma) = a_1 * \gamma^3 + a_2 * \gamma^2 + a_3 * \gamma$ *con* $\gamma = \gamma'_T$

La $\gamma = r * \theta'$ $\quad \gamma'_T/R_e = \gamma_I/R_I$; $\quad \gamma_I = \gamma'_T * R_I/R_e$

$\tau_I = a_1 * (\gamma'_T * R_I/R_e)^3 + a_2 * (\gamma'_T * R_I/R_e)^2 + a_3 * (\gamma'_T * R_I/R_e)$

$M_{RDT}=\pi*\{[(a_1*\gamma'_T{}^3+a_2*\gamma'_T{}^2+a_3*\gamma'_T)*R_e^3-[a_1*(\gamma'_T*R_I/R_e)^3+a_2*(\gamma'_T*R_I/R_e)^2+a_3*(\gamma'_T*R_I/R_e)]R_i^3]\}$

Il momento ultimo a torsione della sezione lo possiamo calcolare in funzione della deformazione $\gamma=\gamma'_T$; *l'angolo specifico di torsione* $\theta'=\gamma'_T/R$
Per sezione rettangolare e sezione cava



Per la sezione rettangolare

$M_T = h*F_T*4*B/7= 3/4*\tau*B/2 *h*4*B/7=3/14*\tau_{MAX} *H*B^2$

$F_T = 3/4*\tau*B/2$ *forza risultante tensioni tangenziali*

Braccio della coppia $4*B/7$

$\tau_{MAX} = 4,66*M_T/(H*B^2);$

la deformazione corrispondente γ_{MAX} *soluzione equazione di III grado*
$\tau_{max}(\gamma)=4,66*M_T/(H*B^2)=a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma$

$a_1*\gamma^3+a_2*\gamma^2+a_3*\gamma -4,66*M_T/(H*B^2)= 0$

L'angolo specifico di torsione $\theta'= 2*\gamma_{MAX}/b$, *la rigidezza torsionale*

$M_T = Ct*\theta';$ $C_T=b/(2\gamma_{MAX})$

Per la sezione cava il momento
$M_T = T_1*h + T_2*b$ *dove* $2*(h+b)$ *non è il perimetro della linea media , ma del rettangolo descritto dal baricentro del diagramma delle tensioni*

$Y_G = 2/7*[\tau_1*H^2- \tau_2*(H-s)^2]/[\tau_1*H-\tau_2*(H-s)]$ *s spessore*

Volendo determinare il momento torcente di rottura della sezione che si attinge sul bordo estremo per $\gamma = \gamma'_T$;

$\gamma = B/2*\theta'$ $\quad \gamma_I = 2*\gamma'_T*H*(B/2-s)/B^2$ $\qquad \gamma = H/2*\theta'$ $\quad \gamma_I = 2*\gamma'_T*(H/2-s)/s$

$$\tau_{MAX} = a_1*\gamma_{MAX}^3 + a_2*\gamma_{MAX}^2 + a_3*\gamma_{MAX} \;\; ; \;\; per\ H > B$$

$$\tau_{2H} = a_1*[\ 2*\gamma'_T*(H/2-s)/s\ ]^3 + a_2*[\ 2*\gamma'_T*(H/2-s)/s\ ]^2 + a_3*[\ 2*\gamma'_T*(H/2-s)/s\ ];$$

$$\tau_{1B} = a_1*[\ \gamma'_T*H/B\ ]^3 + a_2*[\gamma'_T*H/B]^2 + a_3*[\ \gamma'_T*H/B\ ];$$

$$\tau_{2B} = a_1*[2*\gamma'_T*H*(B/2-s)/B^2]^3 + a_2*[2*\gamma'_T*H*(B/2-s)/B^2\ ]^2 + a_3*[2*\gamma'_T*H*(B/2-s)/B^2\ ];$$

$$T_1 = 3/4*\tau_{HMAX}*H/2 \ - 3/4*\tau_{2H}*(H/2-s\ )$$

$$T_2 = 3/4*\tau_{1B}*B/2 - 3/4*\tau_{2B}*(B/2-s)$$

Il momento torcente

$$M_{RDT} = [3/4*\tau_{HMAX}*H/2 - 3/4*\tau_{2H}*(H/2-s\ )]*h + [3/4*\tau_{1B}*B/2 - 3/4*\tau_{2B}*(B/2-s)\ ]*b$$

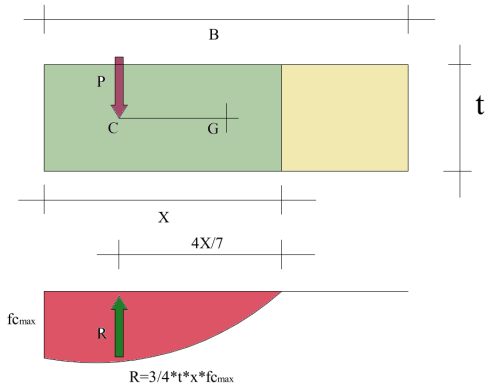
$$h = 2/7*[\tau_{MAXH}*H^2 - \tau_{2H}*(H-s)^2]/[\tau_{MAXH}*H - \tau_{2H}*(H-s)]\ ;$$

$$b = 2/7*[\tau_{1B}*B^2 - \tau_{2B}*(B-s)^2]/[\tau_{1B}*B - \tau_{2B}*(B-s)]$$

Dal diagramma delle tensioni tangenziali si vede che per sezioni sottili conviene considerare costante la tensione tangenziale ovvero comportamento plastico.

9- I materiali non reagenti a trazione

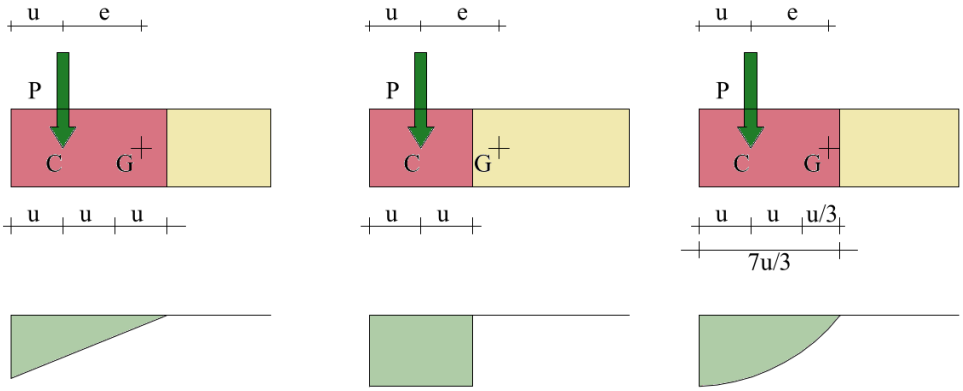
I materiali non reagenti a trazione sono il terreno la muratura il calcestruzzo non armato , facciamo riferimento alla sola sezione rettangolare che si usa più frequentemente e l'obiettivo è trovare la sezione reagente. Al solito la tensione normale è data dalla relazione $\sigma = a_1*\varepsilon^3 + a_2*\varepsilon^2 + a_3*\varepsilon$; *dove* $\varepsilon(y) = 2*y*\varepsilon_C/B$
La rottura si attinge quando al bordo estremo $\varepsilon_C = \varepsilon_{Cmax}$ *per cls e muratura 0,0035*



L'equilibrio alla traslazione orizzontale $3/4*f_{CMAX}* x * t = P$
P sforzo normale , f_{cd} *tensione max di compressione*

$X = P /(3/4*f_{CMAX}*t)$ $u = B/2-e$

zona reagente $X = B/2-e + 4/7*X$; $\boldsymbol{X = 7u/3}$



Il momento ultimo calcolato rispetto al baricentro geometrico

$M_{RD} = 3/4*f_{CMAX}* 7u/3 * t *[4u/3 -(7u/3-B/2)]= 3/4*f_{CMAX}* 7u/3 * t *(B/2-u)$
$M_{RD}=7/4*f_{CMAX}*t*u*(B/2-u);$ $u = B/2- M/P$

La sezione reagente è pari a $\boldsymbol{X =2,33*u}$

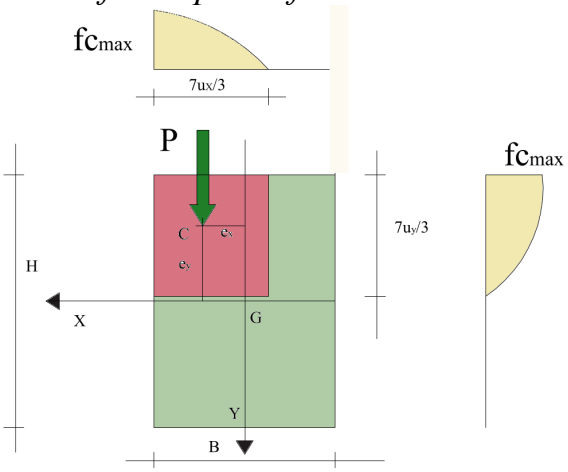
Per pressoflessione deviata e sezione rettangolare

$X = P /(3/4*f_{CMAX}*H)$ $u_x = B/2-e_x$ $Y = P /(3/4*f_{CMAX}*b)$ $u_y = H/2-e_y$
$e_X = M_{XSD}/P$; $e_Y = M_{YSD}/P$;

zona reagente rettangolo di lati X e Y $X = 7u_x/3;$ $Y = 7u_Y/3;$

$M_{XRD}=7/4*f_{CMAX}*H*u_X*(B/2-u_X);$; $M_{XRD}=7/4*f_{CMAX}*B*u_Y*(H/2-u_Y);$

La verifica a pressoflesione deviata $M_{XRD}/M_{XSD} +M_{YRD}/M_{YSD} \leq 1$



10- Le sezioni in cemento armato

I primi elementi strutturali in cemento armato risalgono alla fine del 1800 e inizi 1900 realizzati Francia dove si ebbe la intuizione di far assorbire gli sforzi di trazione nel conglomerato ad armature metalliche ; la statica del cemento armato si fonda sulle ipotesi seguenti :

- Principio di conservazione delle sezioni piane
- Stesso coefficiente di dilatazione termica per acciaio e cls α= 0,00001
- Aderenza perfetta tra barre di acciaio e cls senza scorrimenti relativi $\varepsilon_C = \varepsilon s$

Il calcolo progetto e verifica di sezioni in cemento armato per molti anni in Italia fino al 1996 con la introduzione del DM 16 gennaio è stato eseguito con il metodo alle tensioni ammissibili nella ipotesi di elasticità lineare, in questo paragrafo ci occuperemo della verifica di sezioni rettangolari e a T in cemento armato con il metodo agli stati limite ultimi come definite nelle NTC 2018 , per poi eseguire la verifica con formulazione cubica del diagramma tensioni deformazioni per il cls come da eurocode 2 e per l'acciaio come visto nel paragrafo 3. Il calcolo del momento di fessurazione per flessione e pressoflessione lo eseguiremo nella ipotesi di elasticità lineare e per formulazione cubica. Nell'ultimo paragrafo riporteremo le verifiche alle tensioni ammissibili attraverso la statica grafica come si facevano negli anni 60 prima dell'avvento delle macchine calcolatrici
Riportiamo i diagrammi dei materiali:
NTC 2018

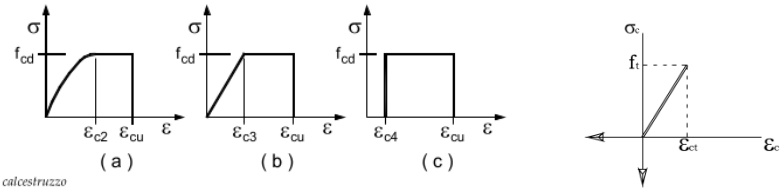


Fig. 4.1.1 – *Modelli σ-ε per il calcestruzzo*

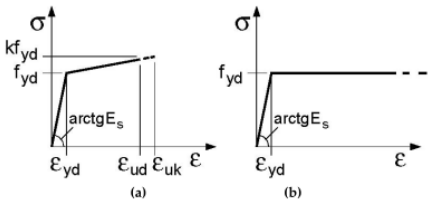
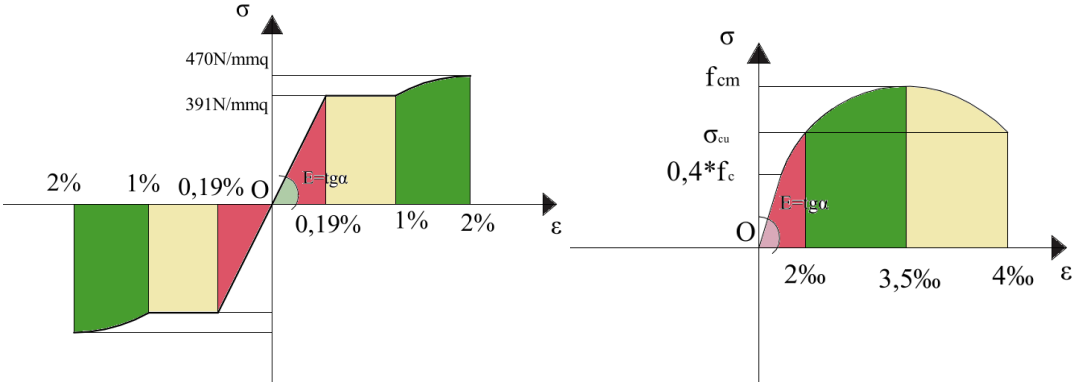


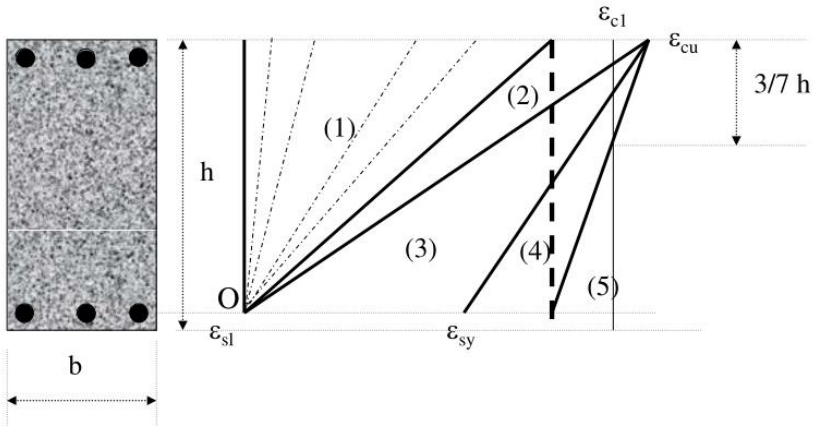
Fig. 4.1.3 – *Modelli σ-ε per l'acciaio*

Acciaio -cls , per la trazione comportamento lineare



Verifica SLU NTC 2018

Le verifiche allo stato limite ultimo per sezioni rettangolari in cemento armato sono essenzialmente a flessione e pressoflessione e sono comprese nelle regioni 2 , 3, 4 , per la tensoflessione , trazione e compressione si fa riferimento alle regione 1 e 5



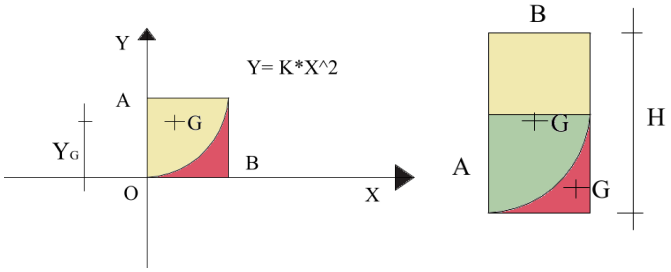
Le verifiche sono molto semplici fondate al solito su due equazioini di equilibrerio per sollecitazioni semplici :

Traslazione $b*\int\sigma dy - \sum\sigma_s*A_{si} + \sum\sigma_s*A'_{si} = P$

Da questa equazione si ricava la posizione dell'asse neutro e il momento di rottura della sezione rispetto al baricentro geometrico G

Rotazione $M_{RD}= b*\int\sigma*ydy + \sum\sigma_s*A_{si} *(H/2-c)+ \sum\sigma_s*A'_{si} (H/2-c)$

Il diagramma utilizzato per il cls è parabola rettangolo è opportuno fare delle considerazioni sull'area e baricentro.



L'area campita in rosso dell'arco sotteso dalla parabola $Y=k*x^2$

$\int k*x^2*dx = k*x^3/3 = A*B/3$; *superficie gialla* $S= 2AB/3$; $Y_G = 0{,}45A$

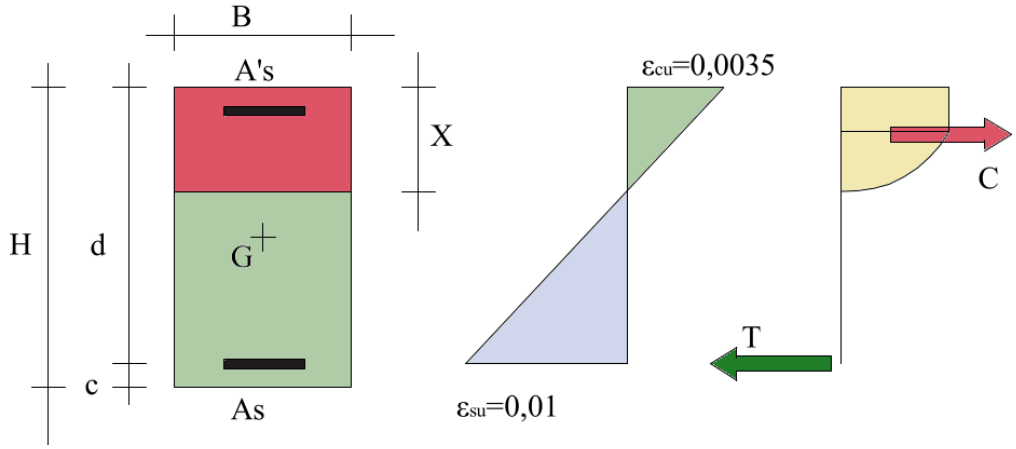
area parabola rettangolo $B*H-A*B/3$

Il baricentro $Y_G = \int k^2*x^4*dx /area = 3/5*A$ *area sottesa* $= AB/3$

$Y_G = (A*B*A/2- 3/5*A*AB/3)/(2/3*A*B) = A*(1/2-1/5)*3/2 = 0{,}45*A$

*Verifica a flessione rottura bilanciata x = 0,259*h*

Il metodo delle tensioni ammissibili era fondato sulla verifica puntuale delle tensioni di calcolo che dovevano essere nel rispetto della normativa inferiori alla tensione ammissibile utilizzato nella verifica allo stato limite di esercizio dove si confrontano le frecce le frequenze di vibrazione le tensioni la apertura delle fessure con valori ammissibili. Nella verifica allo stato limite ultimo la rottura si attinge per superamento della max deformazione nel cls pari a 0,0035 o nell'acciaio pari a 0,01 , la rottura bilanciata prevede per flessione e pressoflessione la max deformazione sia nell'acciaio teso che nella fibra superiore di cls secondo il diagramma riportato in figura.



Dalla similitudine tra triangoli 0,01/(d-x)= 0,0035/x

*0,01*x = 0,0035*d-0,0035*x ; x = 0,0035/(0,01+0,0035)= 0,2593d*

Dal diagramma parabola rettangolo 0,002/m = 0,0035/0,2593d m = 0,14817d

La risultante degli sforzi di compressione per il cls

*C = 2/3*fcd *b*0,14817d + fcd *b*(0,2593-0,14817)*d = 0,20991*fcd *b*d*

*Il coefficiente Ψ tabellato Ψ= 0,8095 C= Ψ*fcd*b*x*

Il momento dovuto alla sola compressione

M_{CRD} *= 2/3*fcd *b*(0,14817d)² *4/5+ fcd *b*0,11113*d²*(0,2593-0,11113/2)=*

*= 0,03727*fcd*b*d²*

La distanza del baricentro degli sforzi di compressione dall'asse neutro

*(1- λ)*x = 0,684x λ= 0,416*

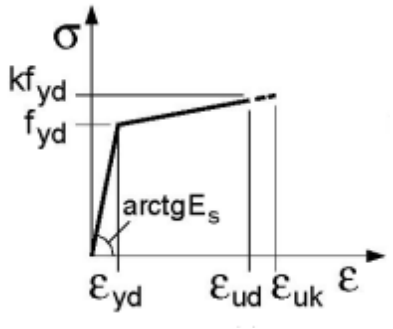
Il momento di rottura della sezione

$M_{RD} = 0,03727*fcd*b*d^2 + f_{yd}*A_s*(d-x) + f_{yd}*A'_s*(x-c) =$

$M_{RD} = 0,03727*fcd*b*d^2 + 0,7407\, f_{yd}*A_s + 0,2093\, f_{yd}*A'_s$

*Il copriferro 2 -3 cm pari a 0,05*d*

Per rottura bilanciata le armature sono entrambe snervate ; se utilizziamo il,diagramma tensione deformazione per l'acciaio bilineare con k pari al rapporto di sovraresistenza $k = (f_T/f_Y) = (540/450) = 1,2 \approx 1,25$ *come da NTC*



La tensione di calcolo allo snervamento

$f_{yd} = 450/1,15 = 391 N/mmq \qquad k*f_{yd} = 488 \approx 490 N/mmq$

La deformazione $\varepsilon_{YD} = 0,00189$; $\varepsilon_{UD} = 0,01$; $\varepsilon_{UD} = 0,0125 = 1,25\%$

Per la armatura compressa $E_{S2} = 12207 N/mmq$.

La tensione $\sigma_S = f_{yd} + E_{S2}*(\varepsilon_S - 0,00189) \qquad \varepsilon_S/(0,2093*d) = 0,0035/0,2593d$

$\varepsilon_S = 0,00282 \qquad \sigma_S = f_{yd} + E_{S2}*(\varepsilon_S - 0,00189) = 402 N/mmq$

$M_{RD} = 0,03727*fcd*b*d^2 + 0,7407\, f_{yd}*A_s + 0,2093*1,028*f_{yd}*A'_s$

In rottura bilanciata possiamo eseguire il progetto della sezione a flessione semplice determinando la altezza , e le armature in trazione e compressione

$M = M_O + \Delta M \quad ; d = r*\sqrt{M/b} \quad A_S = M_O/(0,9*d*k*f_{yd})$ *armatura tesa*

$\Delta M = A'_s*(d-c)$ *Armatura tesa* $(A_S + A'_s)$ *, Armatura compressa* A'_s

Si esegue prima il progetto per sezione a semplice armatura per una aliquota del momento M pari a $M_O = (50\% - 80\%)M$ *e poi si aggiunge armatura in trazione e compressione per il momento* $\Delta M = (50\% - 20\%)M$

Per sezione a semplice armatura

$M = C*d' = T*d'$

dove d' braccio della coppia interna $d' = d - 0{,}10786*d = 0{,}9*d$

$T = As*k*f_{yd}$; $A_S = M_O/(0{,}9*d*k*f_{yd})$

Per la compressione $C = \Psi*fcd*b*x$; $\Psi = 0{,}8095$

$M = 0{,}9*\Psi*fcd*b*0{,}2593*d^2$

La altezza utile della sezione $d = [M/(\Psi*fcd*b*0{,}2593*0{,}9)]^{1/2} = r*\sqrt{M/b}$

Dove $r = 1/[\Psi*fcd*0{,}2593*0{,}9]^{1/2}$ $fcd = 0{,}85*0{,}83*rck/1{,}5$

La resistenza caratteristica del cls C25/30; C30/35; C35/40; C40/45

Il primo valore corrisponde alla resistenza cubica $fcd = 0{,}85*rck/1{,}5$

Il secondo a quella cilindrica $fcd = 0{,}85*0{,}83*rck/1{,}5$ $\gamma_C = 1{,}5$ *coefficiente parziale*

Possiamo tabellare i valori di r in funzione di f_{cd} *o utilizzare direttamente la formula*

C	fcd	r
30	141	0,193
35	164	0,179
40	188	0,1678
45	212	0,158
50	235	0,150
55	259	0,142

$r = 1/[0{,}8095*141*0{,}2593*0{,}9]^{\wedge}(1/2)$ *Per* $M = 800*5^2/12 \approx 1670$ *daN*m*

$d = 0{,}193*\sqrt{(167000/20)} = 17{,}63$ *cm ;*

Per la armatura in compressione se il momento di calcolo

$M = M_O + \Delta M = 0{,}6*M + 0{,}4*M = 16000$ *daN*m trave sezione 30x50 cm*

$As = 96000000/(0{,}9*391*1{,}25*470) = 464$ *mmq* 3ϕ *14*
$A's = 64000000/(391*1{,}25*440) = 297$ *mmq* $= 2\phi$ *14*

Armatura superiore 2ϕ *14 , Armatura inferiore* 5ϕ *14*

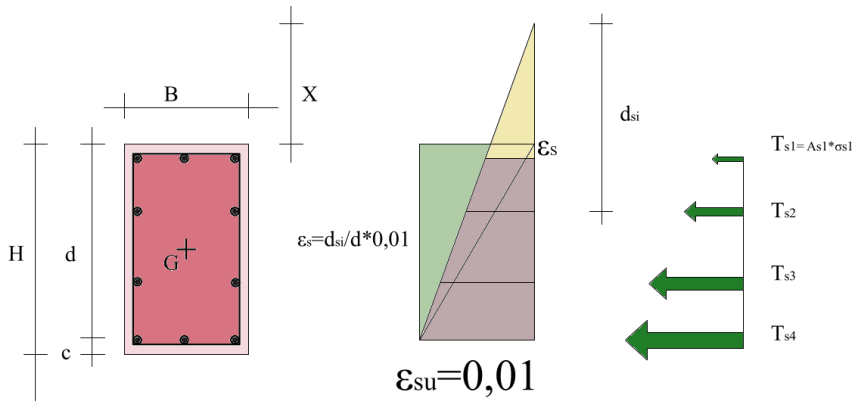
Eseguiamo le verifiche partendo dalla prima regione

Tensoflessione I regione

$\sum\sigma_{SI} * A_{SI} = T$ *equilibrio traslazione* $M_{RD} = \sum\sigma_{SI} * A_{SI} * d_{GI}$

Per trazione semplice la armatura metallica $A_S = T/(1{,}25 * f_{yd})$

$N_{RD} = A_S * 1{,}25 * f_{yd} \geq N_{SD}$



La rottura si attinge per max deformazione nell'acciaio al bordo inferiore $\varepsilon_{su} = 1\ \%$

Per $\varepsilon_S \leq 0{,}001898$ $\sigma_{SI} = 206000 * \varepsilon_S$

$0{,}001898 < \varepsilon_S \leq 0{,}01$ $\sigma_S = f_{yd} + 12207 * (\varepsilon_S - 0{,}00189)$

La equazione di equilibrio alla traslazione

$$\sum([206000 * \varepsilon_{SI} * A_{SI} + (f_{yd} + 12207 * (\varepsilon_{SI} - 0{,}00189)] = T \qquad (A)$$

La incognita è la deformazione dell'acciaio al bordo superiore ovvero la x

La deformazione nel livello di armatura i-mo $\varepsilon_{SI}/d_{SI} = 0{,}01/(d+c+x)$

$\varepsilon_{SI} = 0{,}01 * d_{SI}/(d+c+x) = 0{,}01 * (x + d_{GI})/(d+c+x) =$ $d_{SI} = x + d_{GI}$

Nella equazione di primo grado (A) l'unica incognita è la x

$$\sum([206000 * 0{,}01 * (x + d_{GI}) * A_{SI} + (f_{yd} * (d+c+x) + 12207 * (0{,}01 * (x + d_{GI}) - 0{,}00189)] =$$

$$= T(d+c+x)$$ *al solito* $0{,}00189/d_{SI} = 0{,}01/(d+c+x)$

$d_{SI} = (d+c+x) * 0{,}189$ *I tentativo* $0 < x < 0{,}2d$

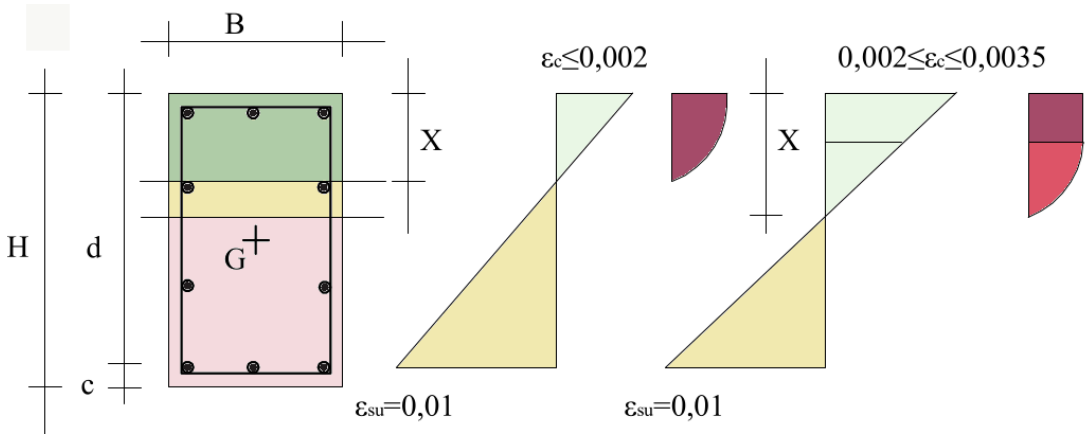
per $d_{SI} \geq (d+c+x) * 0{,}189$ $\sigma_S = f_{yd} + 12207 * (\varepsilon_S - 0{,}00189)$

$d_{SI} < (d+c+x) * 0{,}189$ $\sigma_S = 206000 * \varepsilon_S$

Nota la x il momento di rottura calcolato rispetto al baricentro G

$M_{RD} = \sum \sigma_{SI} * A_{SI} * d_{GI}$ *dove* d_{GI} *distanza dei tondini dalla fibra baricentrica*

Verifica a flessione II Regione



La rottura avviene sempre nell'acciaio teso per il quale $\varepsilon_S = 0{,}01$
La incognita è la x ovvero la profondità dell'asse neutro $\xi = x/d$

$\varepsilon_C/x = 0{,}01/(d-x)$; $\varepsilon_C = 0{,}01*x/(d-x)$; $\varepsilon_C = 0{,}01*\xi/(1-\xi)$;

$\varepsilon'_S = 0{,}01*(x-c)/(d-x) = 0{,}01*\xi/(1-\xi) - c/d*0{,}01/(1-\xi)$
$2/3*b*x*\sigma_c - 1{,}25*f_{yd}*A_S + E_S*\varepsilon_S*A'_S = 0$

$2/3*b*\xi*d*\sigma_c - 1{,}25*f_{yd}*A_S + A'_S*E_S*[0{,}01*\xi/(1-\xi) - c/d*0{,}01/(1-\xi)] = 0$

La tensione $\sigma_C = 1000*|\varepsilon_C|*(-250*\varepsilon_C+1)*\alpha*f_{cd}$

$\sigma_C = 1000*|0{,}01*\xi/(1-\xi)|*[-250*0{,}01*\xi/(1-\xi)+1]*\alpha*f_{cd}$

La equazione diventa

$2/3*b*\xi*d*1000*|0{,}01*\xi/(1-\xi)|*[-250*0{,}01*\xi/(1-\xi)+1]*\alpha*f_{cd} +$

$-1{,}25*f_{yd}*A_S + A'_S*E_S*[0{,}01*\xi/(1-\xi) - c/d*0{,}01/(1-\xi)] = 0$

La unica incognita è ξ *e la equazione è di facile soluzione* $x = \xi * d$

Se $\varepsilon_C = 0{,}01*\xi/(1-\xi) \leq 0{,}002$ *la soluzione è esatta si può calcolare* M_{RD}

Se invece $\varepsilon_C = 0{,}01*\xi/(1-\xi) > 0{,}002$ *si risolve un altra equazione con diagramma delle tensioni parabola rettangolo e incognita sempre* ξ

$0{,}002/m = 0{,}01/(d-x)$ $x = \xi * d$

$C=2/3*fcd*b*0,14817*\xi*d+f_{CD}*b*[\xi*d-0,2*(d-\xi*d)]$

L'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali $C + T = 0$

Per $\varepsilon_C>0,002$ $\varepsilon'_S =0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi)> 0,00189$

$2/3*fcd*b*0,14817*\xi d+f_{CD}*b*[\xi d-0,2*(d-\xi d)]+$

$-1,25*f_{yd}*A_S +\{f_{yd}+12207*[(0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi))-0,00189]\}*A'_S =0$

La incognita è sempre $\xi= x/d$ *, la equazione può essere risolta co software di matematica*

Il momento ultimo M_{RD} *della sezione per flessione rispetto all'asse neutro*

$M_{RD} = C* d_C + T *d_T + C'*d'_T$

Distanza baricentro armatura tesa dall'asse neutro $d_T = d-x= d*(1-\xi)$

Distanza baricentro armatura compressa dall'asse neutro $d'_T = x-c=\xi*d -c$

Distanza baricentro tensioni normali di compressione dall'asse neutro

$d_C = 0,45*\xi*d$ *se* $\varepsilon_C \leq 0,002$ *viceversa se* $\varepsilon_C > 0,002$ $C*d_C =C* d_{C1} +C*d_{C2}$

dove $d_{C1} =0,45*0,14817*\xi*d =0,06667*\xi d$ $d_{C2} = 0,64817\xi d$

se $\varepsilon_C \leq 0,002$

$M_{RD} = 2/3*b*\xi*d*1000*|0,01*\xi/(1- \xi)|*[-250*0,01*\xi/(1- \xi) +1]*\alpha*f_{cd}*0,45*\xi*d$

$+1,25*f_{yd}*A_S*d*(1-\xi)+ A'_S*E_S*[0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi)]*(\xi d -c)$

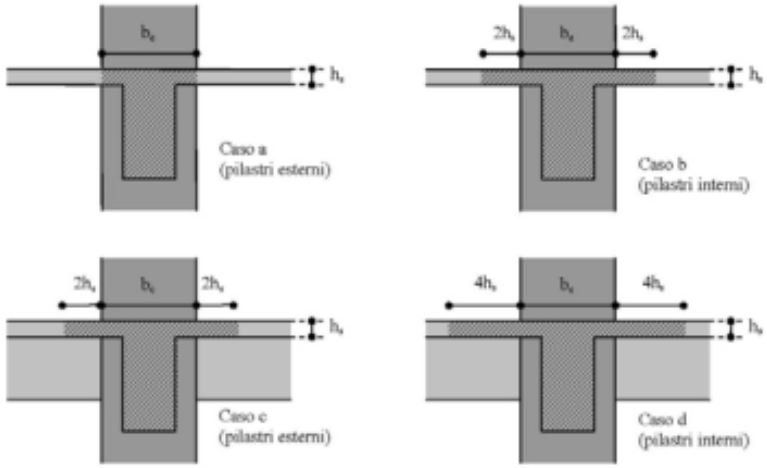
se $\varepsilon_C > 0,002$

$M_{RD}=2/3*fcd*b*0,14817*\xi*d*0,06667*\xi d +f_{CD}*b*[\xi*d-0,2*(d-\xi*d)]* 0,64817\xi d$

$+1,25f_{yd}*A_S*d(1-\xi)+\{f_{yd}+12207[(0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi))-0,00189]\}*A'_S *(\xi d -c)$

Progetto e verifica flessione sezione a T

Nelle strutture di edifici in cemento armato si utilizzano sempre sezioni rettangolari occasionalmente si utilizzano sezione a T , in generale per travi rettangolari con soletta di solaio collaborante; come al solito per il progetto e la verifica determiniamo la altezza e le armature metalliche nella ipotesi di rottura bilanciata. Le NTC 2018 per la flessione prescrivono per la larghezza collaborante di solaio

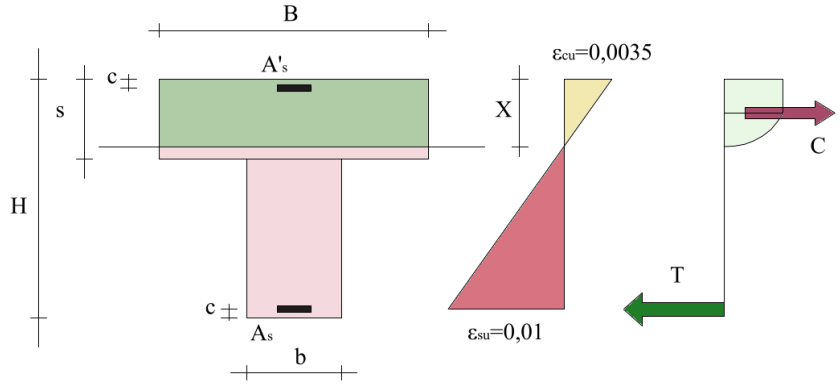


- due volte l'altezza della soletta da ciascun lato, nel caso di travi confluenti in pilastri interni ; $B = b + 2*h$

- due o quattro volte l'altezza della soletta da ciascun lato in cui è presente una trave trasversale di altezza simile, nel caso di travi confluenti rispettivamente in pilastri esterni o interni . $B = b + (2 \div 4)*h$

Nel caso di travi perimetrali si considera unicamente la soletta collaborante dal lato interno; in tal caso si ha una sezione ad L sollecitata a flessione deviata .
La altezza del solaio è di solito 25 cm , la base inferiore della trave 30 cm volendo eseguire la progettazione nella ipotesi di rottura bilanciata l'asse neutro deve tagliare b la soletta altrimenti la altezza della trave sarebbe eccessiva

$x = 0{,}2593*h$ $h = 25/0{,}2593 = 96$ cm $x < 25$ cm



Il progetto della sezione lo si esegue con le stesse formule utilizzate per la sezione rettangolare

$M = M_O + \Delta M$; $d = r*\sqrt{M/b}$ $A_S = M_O/(0{,}9*d*k*f_{yd})$ *armatura tesa*

$\Delta M = A'_s*(d-c)$ *Armatura tesa* $(A_S + A'_s)$, *Armatura compressa* A'_s

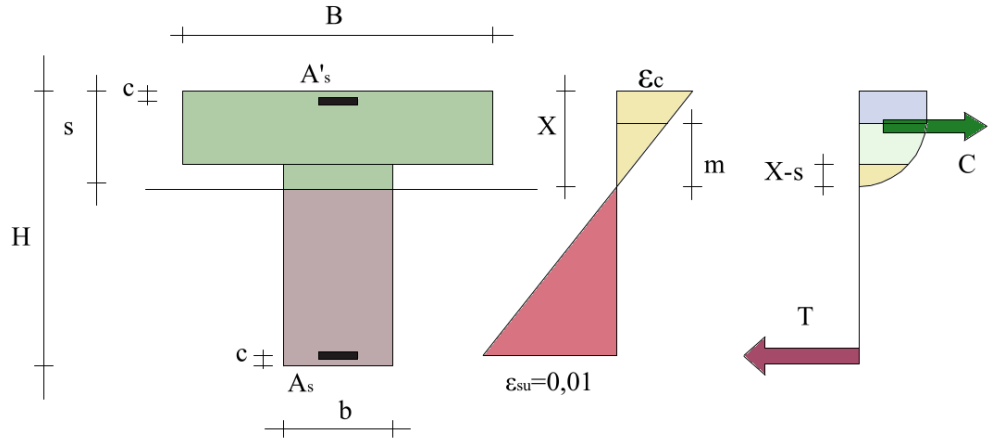
$$f_{cd} = 0{,}85*0{,}83*rck/\gamma_C \qquad \gamma_C = 1{,}5 \qquad r = 1/[\Psi*fcd*0{,}2593*0{,}9]^{1/2}$$

Si esegue prima il progetto per sezione a semplice armatura per una aliquota del momento M pari a M_O *=(50% -80%)M e poi si aggiunge armatura in trazione e compressione per il momento* ΔM *=(50% -20%)M*

C	fcd	r
30	141	0,193
35	164	0,179
40	188	0,1678
45	212	0,158
50	235	0,150
55	259	0,142

$r = 1/[0.8095*fcd*0.2593*0.9]^{1/2}$

Il progetto per flessione deviata di una sezione a T è semplice in analogia alla sezione rettangolare si determina il momento di rottura quando l'asse neutro taglia la soletta. Per asse neutro x > s



La risultante degli sforzi di compressione nel cls

$C = C_1 + C_2 + C_3 = B*f_{cd}*(s-m) + 2/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(x-s) +$
$+\{B*fcd*[m-(x-s)] + b*fcd*(x-s)\} - \{1/3*B*fcd*[m-(x-s)] - 1/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(x-s)\}$

Le deformazioni nel cls $\varepsilon_{C1}/(x-s) = 0{,}01/(d-x)$; $\varepsilon_{C1} = 0{,}01*(x-s)/(d-x)$

$0{,}002/m = 0{,}01/(d-x)$; $m = 0{,}2*d*(\xi-1)$ *al solito per* $x = \xi*d$

$\varepsilon_C = 0{,}01*x/(d-x)$; $\varepsilon_C = 0{,}01*\xi/(1-\xi)$; $\varepsilon'_S = 0{,}01*(x-c)/(d-x) > 0{,}001898$

La equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale

$$B*f_{cd}*(s-m) + 2/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi*d -s)+\{B*fcd*[m-(\xi*d -s)] +b*fcd*(\xi*d -s)\}+ -\{1/3*B*fcd*[m-(\xi*d -s)]-1/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi*d -s)\}-1,25*f_{yd}*A_S +\{f_{yd}+12207*[(0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi))-0,00189]\}*A'_S =0$$

$$\sigma_C=1000*|\varepsilon_C|*(-250*\varepsilon_C+1)*\alpha*f_{cd} \qquad \varepsilon_{C1}=0,01*(\xi-s/d)/(1-\xi)$$

$$\sigma_c(\varepsilon_{c1})=1000*|0,01*(\xi-s/d)/(1-\xi)|*(-250*0,01*(\xi-s/d)/(1-\xi)+1)*\alpha*f_{cd}$$

Ricavato dalla equazione ξ *e quindi* $x =\xi*d$ *possiamo determinare il momento di rottura . E' evidente che la altezza utile della trave d > 100 cm , 120-150 cm cm soletta avente uno spessore di circa 20 cm poiché*

$$\varepsilon_C < 0,0035 \qquad d > 20/0,2593 \approx 80 \text{ cm}$$

Il Momento M_{RD} *per la sezione a T calcolato rispetto all'asse neutro*

$$M_{RD} = C*d_C + T*d_T + T'*d_T$$

$$T =1,25*f_{yd}*A_S ; \qquad d_T = d(1-\xi) ; \qquad \text{copriferro } c = d*3\% = 0,03d$$

$$T'=\{f_{yd}+12207*[(0,01*\xi/(1-\xi)-c/d*0,01/(1- \xi))-0,00189]\}*A'_S \qquad d_T=d*(\xi-0,03)$$

$$C=B*f_{cd}*(s-m) + 2/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi*d -s)+\{B*fcd*[m-(\xi*d -s)] +b*fcd*(\xi*d -s)\}+ -\{1/3*B*fcd*[m-(\xi*d -s)]-1/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi*d -s)\}$$

$$C*d_C= C_1*d_{C1}+C_2*d_{C2}+C_3*d_{C3} \qquad C_1=Bf_{cd}*(s-m) ; \qquad d_{C1}=[\xi d -(s-m)] ;$$

$$C_2=\{Bfcd*[m-(\xi d-s)]+bfcd*(\xi d -s)\}-\{1/3Bfcd*[m-(\xi d -s)]-1/3b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi d -s)\}$$

$$d_{C2}=\{Bfcd*0,5*[m-(\xi d-s)]^2+bfcd*0,5*(\xi d-s)^2\}-\{1/3Bfcd*0,6*[m-(\xi d -s)]^2-1/3b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*0,6(\xi d -s)^2\}/ /\{Bfcd*[m-(\xi d-s)]+bfcd*(\xi d -s)\}-\{1/3Bfcd*[m-(\xi d -s)]-1/3b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi d -s)\}$$

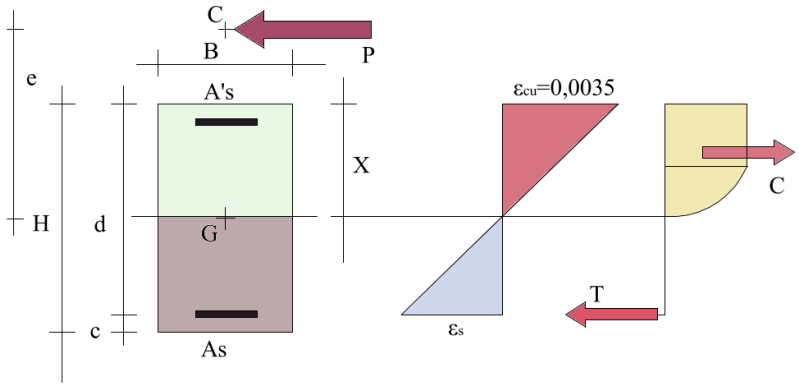
$$C_3=2/3*b*\sigma_c(\varepsilon_{c1})*(\xi d-s); \qquad d_{C3}=0,45(\xi d-s);$$

La determinazione del momento ultimo della sezione a T per flessione retta la si esegue con software inutile addentrarci in calcoli neanche complessi ma assurdi con la calcolatrice più razionale implementare un software in visual basic.

III regione Pressoflessione

La sezione usuale per elementi strutturali in cemento armato sollecitati a pressoflessione quali pilastri è rettangolare , quadrata , la sezione circolare per porticati o per ambienti molto ampi quali sale conferenze , ristoranti hall di ingresso ect . Eseguiremo sia il progetto che la verifica di pilastri rettangolari determinano, la altezza e le armature , mente per la sezione circolare il diametro e la armatura distribuita.

Progetto a pressoflessione sezione rettangolare .



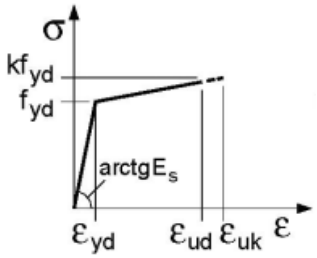
La rottura per pressoflessione avviene sempre nelle terza e quarta regione per i,m raggiugimento della max deformazione del cls compresso pari a 0,0035 ; La armatura è simmetrica ovvero As= A's , per un valore della deformazione dell'acciaio teso compreso tra 0,01 ÷ 0,00198, $\varepsilon_S = 0,0065$; $\varepsilon_S/(d-x) = \varepsilon_C/x$; $x=\xi*d$; $\xi= 0,35d$

Il progetto della sezione lo eseguiamo facendo assorbire il momento flettente alla armatura ,metallica e lo sforzo normale di compressione al cls. Nella ipotesi di comportamento elasto plastico ideale per l'acciaio

$$\Psi*fcd*0,35d*b = P \quad ; \quad d = P/(\Psi*fcd*0,35*b) \qquad \Psi= 0,8095$$

$$As = A's = M/[fyd*(H-2c)]$$

Utilizzando il rapporto di sovraresistenza per l'acciaio ovvero diagramma



Dobbiamo determinare $\varepsilon'_S = 0,0065$; $\varepsilon_S/(d-x) = \varepsilon'_S/(x-c)$;

$$\varepsilon_S/(d-0,35d) = \varepsilon'_S/(0,35d-0,025d) ; \qquad \varepsilon'_S= 0,5*\varepsilon_S = 0,00325$$

La tensione $\sigma_S = f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon_S- 0,00189)$; $\sigma'_S = f_{yd}+E_{S2}*(0,5*\varepsilon_S- 0,00189)$;

Il momento M_O $As = A's = M_O /[\sigma'_s*(H-2c)]$; $M_O + \Delta M$

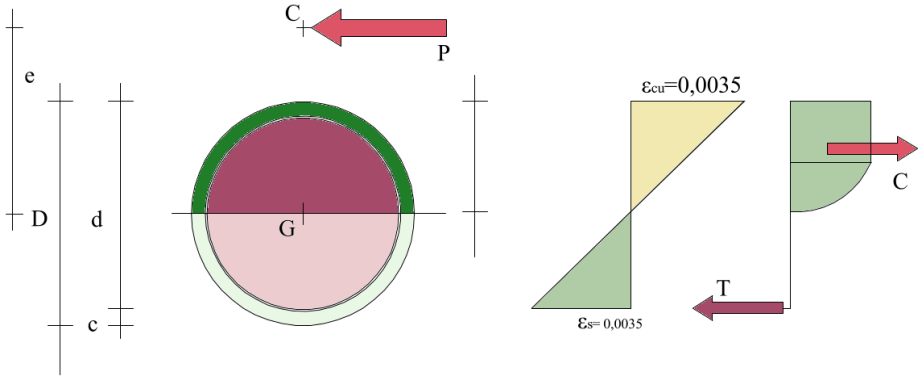
La altezza della sezione $d_O - \Delta d$;

$$d_O = P/(\Psi*fcd*0{,}35*b) \qquad \Delta d = [E_{S2}*(0{,}5*\varepsilon_S - 0{,}00189)]/(\Psi*fcd*0{,}35*b)$$

$$\Delta M = [E_{S2}*(0{,}5*\varepsilon_S - 0{,}00189)]*[(H/2-c)-0{,}45*(d_O - \Delta d)]$$

Il progetto della sezione circolare

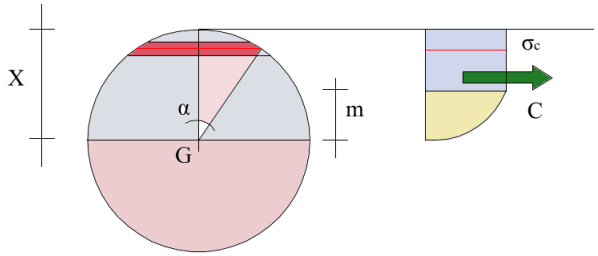
Il progetto della sezione circolare lo possiamo eseguire rapidamente e con formule semplici se ipotizziamo che la deformazione al lembo compresso sia uguale a quella al lembo teso ovvero che $x = \xi*d = R$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_s = 0{,}0035$
Ipotesi accettabile per la pressoflessione e per valori elevati dello sforzo normale P



L'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali :
$C+C'- T = P$ nella ipotesi di uguale deformazione $C = P$ poichè $C'- T = 0$

La risultante della compressione nel cls la calcoliamo con il teorema di guldino

$$C = \Omega*fcd*\pi*R^2/2 \qquad \text{dove } \Omega = \int\sigma dA/fcd*\pi*R^2/2$$



$0{,}002/m = 0{,}0035/R$ $m = 0{,}5714* R$

$$C = fcd*R*(1- 0{,}5714)*\pi R(1- 0{,}5714)/2+2/3*fcd*0{,}5714* R*0{,}45* 0{,}5714*\pi R =$$

$$= 0{,}2143\ fcd*\pi R^2+0{,}0979\ fcd*\pi*R^2 = 0{,}3122*fcd*\pi*R^2 \qquad \Omega = 0{,}6244$$

La altezza utile ovvero il raggio R del pilastro

$R = [P/(0{,}3122*fcd*\pi)]^{1/2}$

La armatura per unità di lunghezza ovvero a cm $a_s = A_S/[2*\pi*(R-c)]$

$M = a_s*\sigma_{MC}*\pi*(R-c)*d'c + a_s*\sigma_{MT}*\pi*(R-c)*dt$ *risulta*

$d'c = dt$; *distanza risultante sforzi di trazione dal centro del pilastro*
$\sigma_{MC} = \sigma_{MT}$ *valore medio della tensione armatura* $\sigma_{MC} = \int\sigma(\varepsilon)ds/[\pi(R-c)]$

$ds = r*d\alpha$ $\sigma_{MC} = R*\int\sigma(\varepsilon)d\alpha/[\pi(R-c)]$

la tensione nell'acciaio

$\sigma(\varepsilon) = f_{yd} + E_{S2}*(\varepsilon_S - 0{,}00189)$; *per* $\varepsilon_S > 0{,}00189$

$\sigma(\varepsilon) = E_S*\varepsilon_S$ *per* $\varepsilon_S \leq 0{,}00189$

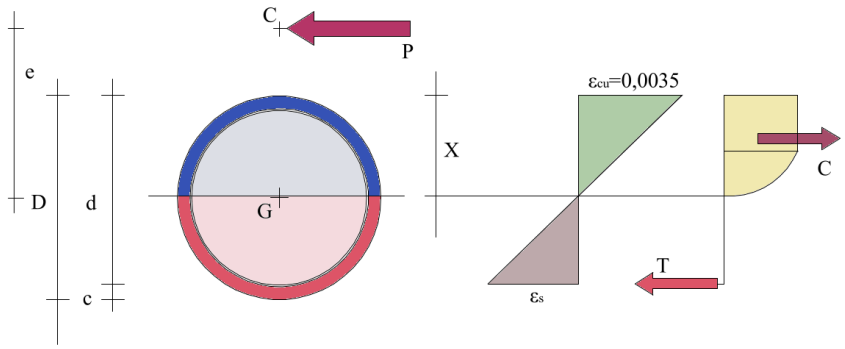
$\varepsilon'_S(y) = y*0{,}0035/R$; $\varepsilon_S(y) = y*0{,}0035/R$; a_s *area di ferro a cm lineare*

La area di ferro linearizzata $a_s = M/[2(\sigma_{MC}*\pi*(R-c)*d_T)]$

Il numero di barre $n = a_s*2\pi*(R-c)/$ *area tondino* *area tondino* $= \pi*\phi^2/4$
Con l'ausilio di un software implementando gli integrali il progetto della sezione può essere eseguito all'interno della III regione determinando $R_O - \Delta R$ *tenendo conto della differenza tra lo sforzo di trazione e compressione nella armatura; è complicato risolvere l' integrale doppio per il volume delle tensioni e l'integrale curvilineo per le armature. La risoluzione degli integrali è utile per la verifica di sezioni di forma qualsiasi senza utilizzare tabelle obsolete e metodi iterativi umilianti per gli studenti (sezione rettangolare), facendo ricorso a programmi di analisi matematica free reperibili on-line.*

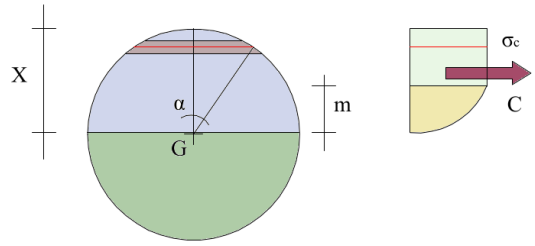
Verifica pilastro circolare a pressoflessione M e P

La rottura di un elemento strutturale sollecitato a pressoflesione avviene sempre per compressione ovvero max deformazione nel cls , per momenti flettenti ovvero eccentricità esterne al nocciolo centrale di inerzia della sezione e comunque dell'ordine di grandezza delle dimensioni della sezione la rottura avviene nella terza regione delimitata dalla profondità $X = 0{,}2593*d$ *corrispondente alla rottura bilanciata e la profondità* $X = 0{,}648*d$ *corrispondente allo snervamento dell'armatura tesa* $\varepsilon_S > 0{,}00189$
Definiamo una area di ferro a cm lineare $a_s = A_S/[\pi*(D-2c)]$, *la verifica la eseguiamo con diagramma delle tensioni parabola rettangolo e profondità asse neutro* $x =$



$C = \int \sigma dA$ *dove* $dA = D(y)*dydx$ $D(y) = 2*D*\sin\alpha$

$Y = D*\cos\alpha$ $dy = D*\sin\alpha d\alpha$ $C = -\int 2*D^2*\sin\alpha^2\ \sigma(y)dxd\alpha$



L'integrale va suddiviso in due $0,0035/x = 0,002/m$ $m = 0,5714*\xi d$

$C = -\int 2*D^2*\sin\alpha^2\ \sigma(y)dxd\alpha = -f_{cd}*2D^2*\int \sin\alpha^2\ dxd\alpha - 2D^2\int \sin\alpha^2\ \sigma(y)dxd\alpha$

dominio di integrazione

$0 \leq y \leq \xi*d$ $0 \leq \alpha \leq \arccos[(R-\xi d)R]$ $R*(1-\cos\alpha) = \xi d$ $\cos\alpha = (R-\xi d)R$

dalla risoluzione dell'integrale doppio la risultante degli sforzi di compressione nel cls

$C = \Omega*fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha]$ *dove* $\Omega = \int \sigma dA/\{fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha]\}$

Ω è il rapporto tra il volume delle tensioni di compressione e la parte di cilindro di altezza fcd definita dall'angolo α $V = \{fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha]\}$

l'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali :

$\Omega*fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha] + a'_s*\sigma(\varepsilon)*L_c - a_s*\sigma(\varepsilon)*L_T = P$

la risultante delle tensoni di compressione nella armatura $a'_s*\sigma(\varepsilon)*L_c$ *in realtà*

$C' = \int a_s\sigma(\varepsilon)dL$ *dove* $L_C = \alpha*D$ *lunghezza arco di armatura compressa*

$T = \int a_s\sigma(\varepsilon)dL$ *dove* $L_T = (\pi-\alpha)D$ *lunghezza arco di armatura tesa*

la tensione nell'acciaio

$\sigma(\varepsilon) = f_{yd} + E_{S2}*(\varepsilon_S - 0{,}00189)$; per $\varepsilon_S > 0{,}00189$

$\sigma(\varepsilon) = E_S*\varepsilon_S$ per $\varepsilon_S \leq 0{,}00189$

$\varepsilon'_s(y) = y*0{,}0035/\xi d$; $\varepsilon_S(y) = y*0{,}0035/\xi d$; a_s area di ferro lineare

Definendo una tensione media nella armatura tesa e compressa

$$\Omega*fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha] + a'_s*\sigma_{MC}*L_c - a_s*\sigma_{MT}*L_T = P$$

$\sigma_{MC} = \int\sigma(\varepsilon)dL/L_c$ valore medio della tensione armatura compressa

$\sigma_{MT} = \int\sigma(\varepsilon)dL/L_T$ valore medio della tensione armatura tesa

Possiamo risolvere la equazione

$\Omega*fcd*[\alpha*R^2 - (R-\xi d)*R*\sin\alpha] + a'_s*\sigma_{MC}*L_c - a_s*\sigma_{MT}*L_T = P$ e determinare $x = \xi d$

dal quale risalire al momento ultimo della sezione per pressoflessione calcolato rispetto al baricentro geometrico

$M_{RD} = C*d_C + C'*d'c + T*dt$

baricentro delle tensioni nel cls dal centro del cerchio $d_C = \int\sigma y dA / \int\sigma dA$

baricentro tensioni armatura compressa dal centro $d'_C = \int\sigma(\varepsilon)*ydL / \int\sigma(\varepsilon)dL$

baricentro tensioni armatura compressa dal centro $d'_T = \int\sigma(\varepsilon)*ydL / \int\sigma(\varepsilon)dL$

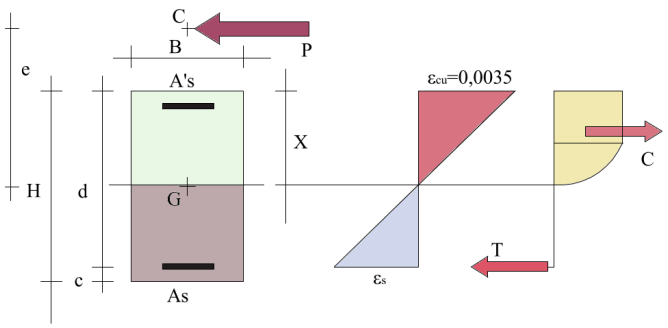
Il calcolo degli integrali va eseguito con l'ausilio di un software di analisi matematica , nella pratica professionale programmi free e commerciali consentono di eseguire la verifica senza problemi determinando anche il momento di rottura ; sono degli approfondimenti teorici molto distanti dalla pratica professionale noto lo sforzo normale e il momento flettente il dimensionamento del pilastro è immediato.

*P = 120000 daN ; M = 30000 DaN*m e = M/P = 25 cm D=70 cm ;*

As= 20ϕ16 ovvero 1ϕ16/10 cm in alternativa As= 12ϕ20 ovvero 1ϕ20/18 cm

$R = [P/(0{,}3122*fcd*\pi)]^{1/2} = 27$ cm ; $a_s = M/[2(\sigma_{MC}*\pi*(R-c)*d_T)]$

La verifica a pressoflessione per sezione rettangolare nella III Regione



*La rottura per pressoflessione avviene sempre nelle terza regione per il raggiugimento della max deformazione del cls compresso pari a 0,0035; la armatura è simmetrica ovvero As= A's ; al solito la incognita è la x= ξ*d , la deformazione nell'acciaio teso è compresa tra 0,01 ÷ 0,00198, $\varepsilon_S/(d-x) = \varepsilon_C/x$; x=ξ*d ;*

$$\varepsilon_S = 0{,}0035*(d-x)/x = 0{,}0035*(1-\xi^*)/\xi \;;\; \varepsilon'_S = 0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d \quad \Psi = 0{,}8095$$

$$\Psi * f_{cd} * \xi d * b - A_S[f_{yd} + E_{S2}(0{,}0035(1-\xi)/\xi - 0{,}00189)] + A'_S[f_{yd} + E_{S2}(0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d - 0{,}00189)] = P$$

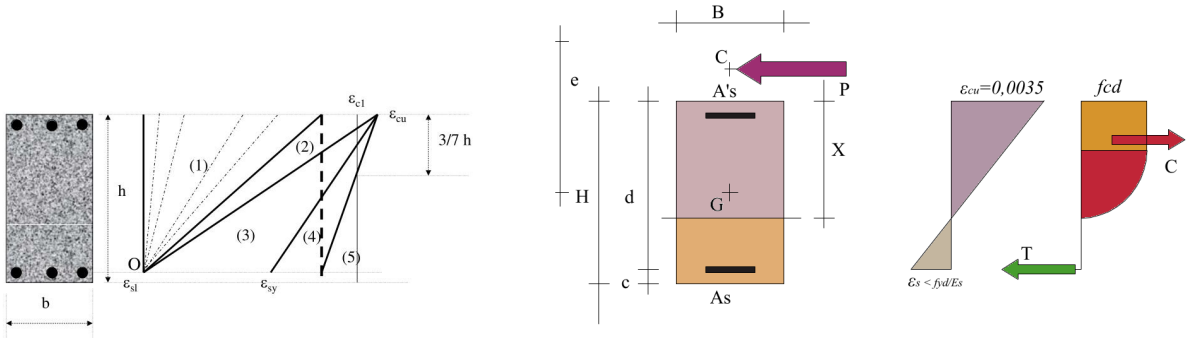
La incognita è ξ che può essere determinata facilmente attraverso la risoluzione della equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

Il momento ultimo della sezione calcolato rispetto al baricentro geometrico

$$M_{RD} = \Psi * f_{cd} * (\xi d)^2 * b + \{A_S[f_{yd} + E_{S2}(0{,}0035(1-\xi)/\xi - 0{,}00189)]$$

$$+ A'_S[f_{yd} + E_{S2}(0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d - 0{,}00189)]\} * (H/2-c)$$

Pressoflessione nella quarta regione



Nella quarta regione buona parte della sezione del pilastro è compressa l'acciaio in-zona tesa è in fase elastica con deformazione pari a $0 < \varepsilon_S \leq 0{,}00189$. La verifica a pressoflessione è immediata

$$\Psi * fcd * \xi d * b - A_S * E_S * \varepsilon_S + A'_S * [f_{yd} + E_{S2} * (\varepsilon'_S - 0{,}00189)] = P$$

$$\varepsilon'_S = 0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d \qquad \Psi = 0{,}8095 \qquad \varepsilon_S = 0{,}0035*(1-\xi^*)/\xi$$

$$\Psi * fcd * \xi d * b - A_S * E_S * 0{,}0035*(1-\xi^*)/\xi + A'_S * [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d - 0{,}00189)] = P$$

Calcolata la incognita x= ξd ; il momento di rottura della sezione

$$M_{RD} = \Psi f_{cd} * (\xi d)^2 * b + \{A_S E_S * [0{,}0035(1-\xi)/\xi] + A'_S[f_{yd} + E_{S2}(0{,}0035*(\xi d - c)/\xi d - 0{,}00189)]\} * (H/2-c)$$

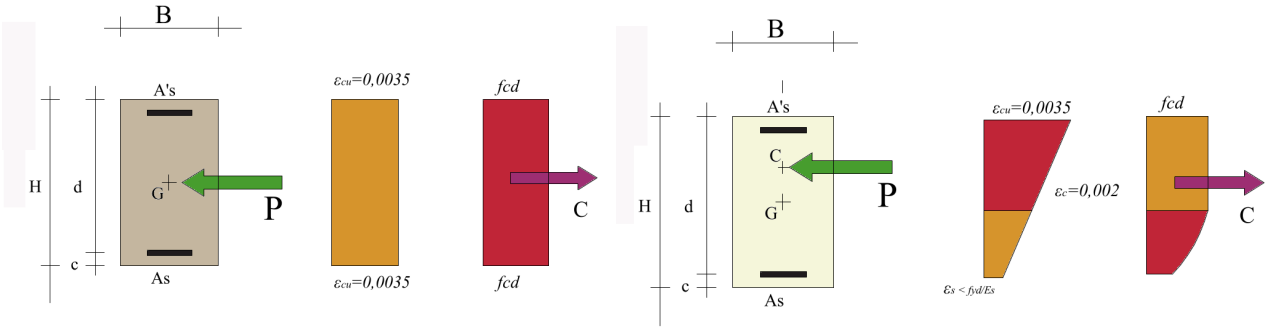
Pressoflessione:sezione interamente reagente

Se la sezione è sollecitata a compressione semplice centrata :

$$P_{RD}= fcd*d*b +A_s*[f_{yd}+E_{S2}*(0,0035- 0,00189)] +A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(0,0035- 0,00189)]$$

$$[f_{yd}+E_{S2}*(0,0035- 0,00189)]= (f_{yd}+20) = 1,05*f_{yd}$$

$$P_{RD} = fcd*d*b+A_s*1,05*f_{yd} +A'_s*1,05*f_{yd} \leq P_{SD}$$



Se nella sezione vi è un momento flettente M tale da non parzializzare la sezione Le deformazioni nell'acciaio teso e compresso

$$\varepsilon_S=0,0035*\xi d/d \qquad \varepsilon'_S=0,0035*\xi d/(\xi d-c) \qquad x=\xi d \ ; \text{con} \quad \xi>1$$

La equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

$$\Psi*fcd*d*b +A_s*E_S*\varepsilon_S -A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon'_S- 0,00189)]= P$$

$$\Psi*fcd*d*b+A_s*E_S*0,0035*\xi d/d -A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(0,0035*\xi d/(\xi d-c)- 0,00189)]=P$$

Ψ è un coefficiente pari a $\Psi=b*\int\sigma\, dy/(fcd*d*b)$

Rapporto tra l'area del diagramma delle tensioni normali e il rettangolo di lati d e fcd



$$C=b*X*\alpha*fcd*[0,80953 -2/3*(1-H/X)]$$

Il rapporto tra l'area parabola rettangolo e l'area rettangolare ψ =0,80953, all'area degli sforzi di compressione va sottratta l'area marrone -2/3(1-H/X)*

$\psi = 0{,}80953 - 2/3*(1-H/X)$ *Il momento di rottura della sezione rispetto al baricentro*

$$M_{RD}=\Psi f_{cd}*d*b*(H/2-\lambda_G)+\{A_s*E_S*0{,}0035*\xi d-A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}0035*\xi d/(\xi d-c)-0{,}00189)]\}*(H/2-c)$$

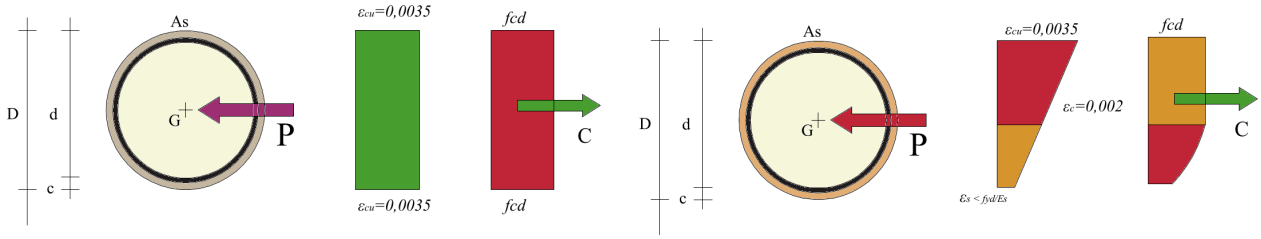
λ_G *distanza del punto di applicazione della risultante delle compressioni dal bordo superiore*

$$\lambda_G=b*\int\sigma*ydy/(fcd*d*b)$$

la distanza del punto di applicazione degli sforzi di compressione dal bordo superiore compresso

$$\lambda_G=[0{,}3367*X^2-0{,}26733*(X-H)^2+2/3*(X-H)*H)]/\ [0{,}80953\ X-2/3*(X-H)]$$

La verifica di un pilastro circolare a compressione semplice o il progetto della sezione



Se la sezione è sollecitata a compressione semplice centrata :

$P_{RD}= fcd*\pi*R^2 + 2*\pi*R*a_s*1{,}05*f_{yd}$ *il rapporto di armatura* $\rho = 2*\pi*R*a_s/\pi*R^2$

$[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}0035-0{,}00189)]= (f_{yd}+20) = 1{,}05*f_{yd}$ $\qquad 0{,}005<\rho<0{,}015$

Se lo sforzo normale è eccentrico con $e \approx\leq H/6$ *con sezione interamente reagente*
Le deformazioni nell'acciaio teso e compresso

$$\varepsilon_S=0{,}0035*\xi d/d \qquad \varepsilon'_S=0{,}0035*\xi d/(\xi d-c) \qquad x=\xi d\ ;\ con \quad \xi>1$$

La equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

$$\Psi* fcd*\pi*R^2+\int\sigma_{S1}*a_s*dL\ +\int\sigma_{S2}*a_s*dL = P$$

per $\varepsilon_S \leq 0{,}00189 = fyd/206000$ $\qquad \sigma_{S1}=A_s*E_S*0{,}0035*\xi d/d$

per $\varepsilon_S > 0{,}00189$ $\qquad \sigma_{S2} =A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}0035*\xi d/(\xi d-c)-0{,}00189)]$

Ψ *è un coefficiente pari a* $\qquad \Psi=\int\sigma\, dA/(fcd*\pi*R^2)$

Rapporto tra il volume delle tensioni normali e il volume del cilindro $V= fcd*\pi*R^2$

Gli estremi di integrazione dipendono per l 'acciaio dalla distanza s dal bordo più compresso $0{,}00198/s = 0{,}0035/\xi*D \qquad x = \xi*D \quad con \quad \xi > 1 \quad s = 0{,}56567*\xi*D$

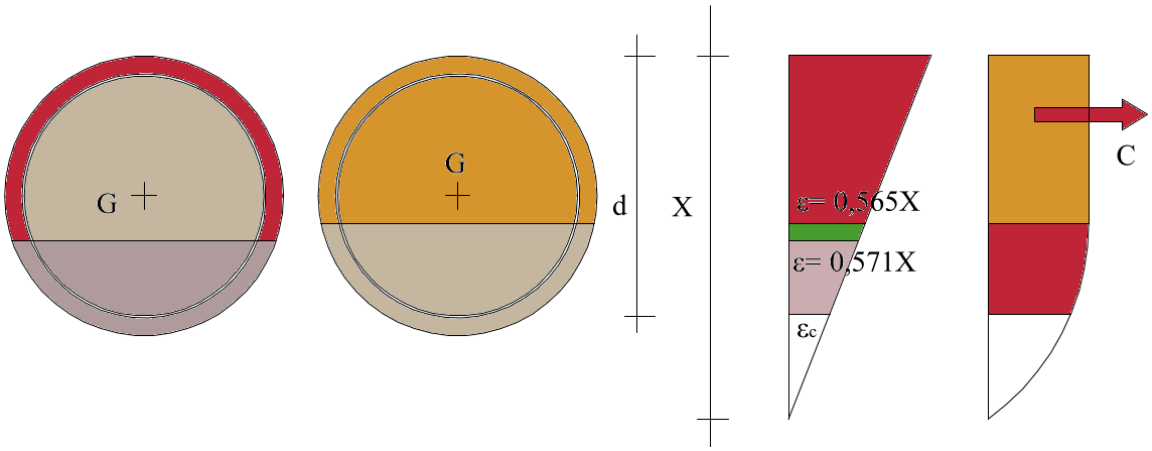
E per il cls dipendono dalla distanza m dal bordo più compresso

$0{,}002/m = 0{,}0035/\xi*D \qquad x = \xi*D \quad con \quad \xi > 1 \quad m = 0{,}5714*\xi*D$

$$\Psi=[fcd*A_1 + \int \sigma \, dA_2]/(fcd*\pi*R^2)$$

Le aree A_1 *e* A_2 *definiscono le due zone della sezione a tensione costante e variabile*

$\sigma_C=1000*|\varepsilon_C|*(-250*\varepsilon_C+1)*\alpha*f_{cd} \qquad \varepsilon_C= y*0{,}0035/(\xi*D)$



La area di un segmento circolare $A = 0{,}666*c*f$ *c corda f freccia*
La lunghezza di un arco circolare $L = R*\alpha \qquad \alpha = 2arctg\,[2(f-R)/c]$

Il momento di rottura della sezione rispetto al baricentro

$$M_{RD}=\Psi*fcd*\pi*R^2*(R-\lambda_G)+ [\int \sigma_{S1}*a_s*dL_1*\lambda_{S1}+\int \sigma_{S2}*a_s*dL_2*\lambda_{S2}$$

λ_G *distanza del punto di applicazione della risultante delle compressioni dal bordo superiore*

$$\lambda_G=\int \sigma*ydA/(fcd*d*b)$$

la distanza del punto di applicazione degli sforzi di compressione dal bordo superiore compresso

λ_{S1} *e* λ_{S2} *rispettivamente le distanze*

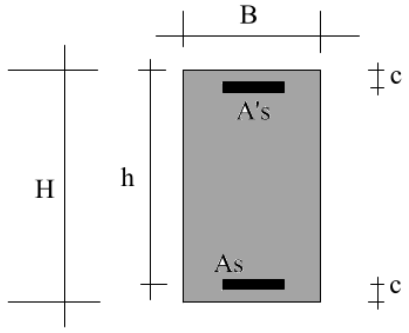
Il dominio di rottura

La costruzione del dominio di rottura la eseguiamo per 3 tipi di sezione sempre nella ipotesi di flessione e pressoflessione retta con sforzo normale P e momento flettente M .

-Rettangolare
-Circolare
-Sezione a T

-Sezione rettangolare

Costruiamo il dominio di rottura per una sezione in cemento armato a doppia armatura simmetrica $A_S = A'_S$;



per la costruzione del dominio di rottura si considerano dei punti significativi , immediati sono quelli relativi alla trazione semplice e compressione semplice

$T = 1{,}25 * f_{YD} * A_S$; $N = B*H*\alpha*f_{cd} + 1{,}05*f_{YD}*A_S$ sull'asse delle ascisse
Si potrebbero definire i punti relativi alle varie regioni per
$X = 0{,}259*h$; $X = 0{,}648*H$, ed il punto al quale corrisponde il max momento

Punto 1
$P = \alpha*fcd*b*0{,}259*h* 0{,}80953$; $\varepsilon'_S/(0{,}259*d-c) = 0{,}01/(d-0{,}259d)$

$M = \alpha*fcd*b*0{,}259*h* 0{,}80953 *(H/2-0{,}416*0{,}259*h) + 1{,}25*f_{YD}*A_S*(H/2-c) +$

$A_S * 1{,}03*f_{yd}*(H/2-c)$; $c = 0{,}05*d$

$\varepsilon'_S/(0{,}259*d-c) = 0{,}01/(d-0{,}259d)$; $\varepsilon'_S = 0{,}0028$ $[f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon'_S - 0{,}00189)] = 402$

Punto 2
$P = \alpha*fcd*b*0{,}648*h* 0{,}80953$;

$M = \alpha*fcd*b*0{,}648*h* 0{,}80953 *(H/2-0{,}416*0{,}259*h) +$

$+f_{yd}*A_S*(H/2-c) + [f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon'_S - 0{,}00189)]*A'_S*(H/2-c)$

Punto di max momento

Corrisponde alle due armature superiori ed inferiori snervate per le quali il diagramma delle deformazioni è simmetrico

$\varepsilon_S = \varepsilon'_S = (H/2-c)*0{,}0035/H/2 = 0{,}003325 \qquad \sigma_S = [f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon_S - 0{,}00189)] = 411\ N/mmq$

$P = \alpha*fcd*b*X*\psi + 1{,}05*f_{YD}*A_S - 1{,}05*f_{YD}*A'_S = \alpha*fcd*b*X*\psi$

$M_{RD} = \alpha*fcd*b*X*0{,}80953*(H/2 - 0{,}416*X) + 2*1{,}05*f_{YD}*A_S\,(H/2-c)$

il dominio di rottura M-N è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse

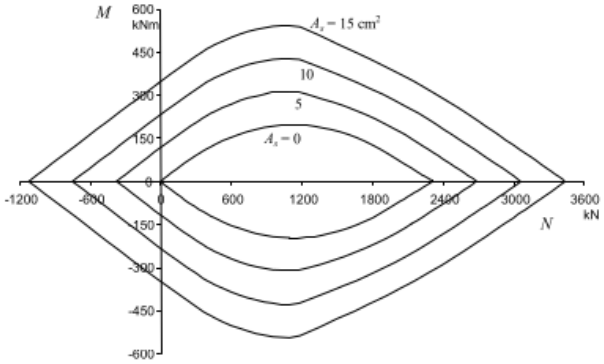


Fig. 2. Dominio *M-N* per sezione 30×70 – stato limite ultimo

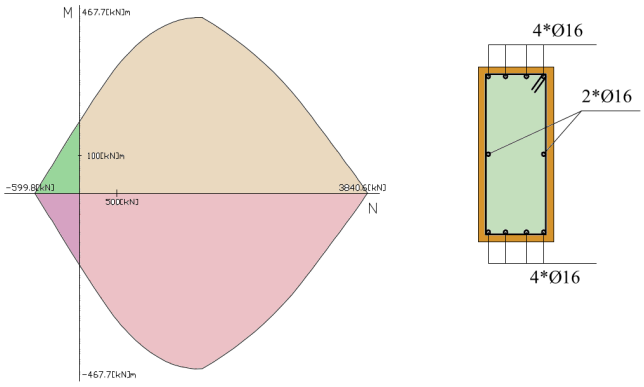
Punto 3 X= d

Per deformazione nulla nell'acciaio teso e max deformazione nel cls compresso.

$$P = \Psi*fcd*d*b + A'_s*[f_{yd}+E_{S2}*(\varepsilon'_S - 0{,}00189)]$$

$\varepsilon'_S = (d-c)0{,}0035/d = 0{,}00325 \qquad M_{RD} = \Psi f_{cd}*d*b*(H/2-\lambda_G) + A'_s*1{,}042*(H/2-c)$

$\lambda_G = [0{,}3367*(0{,}95*H)^2 - 0{,}26733*(0{,}05*H)^2 - 2/3*(0{,}05*H)*H)] / [0{,}80953*0{,}95*H - 2/3*(H*0{,}05)]$



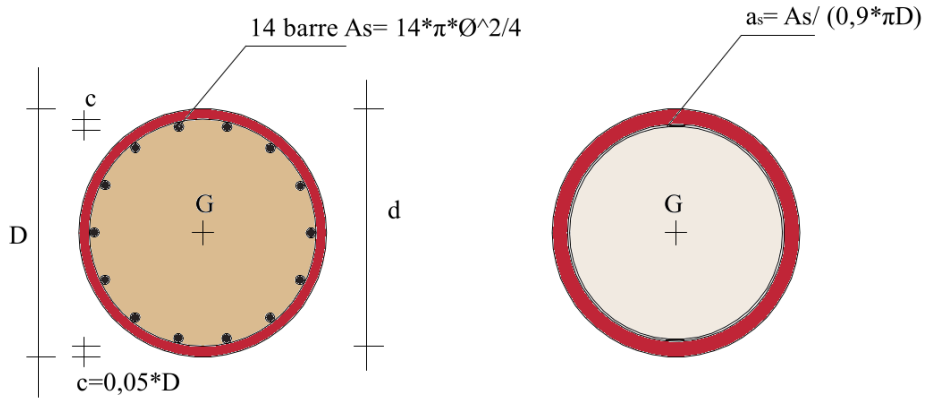
Sezione 30x70 cm ;

Assegnata una coppia di valori N_{SD} ed M_{SD} ,si individua un punto P all'interno del dominio di coordinate $P(N_{SD}, M_{SD})$, facendo crescere in modo proporzionale le due sollecitazioni si definisce un coefficiente di sicurezza

$$S = [(k*P_{SD})^2+(k*M_{SD})^2]^{1/2}/[(P_{RD})^2+(M_{RD})^2]^{1/2}$$

$S = k$ dove k è la intensità del vettore inclinato di un angolo $\beta = arctg(M_{SD}/N_{SD})$ con origine nel Punto P e vertice sulla frontiera del dominio .

-Sezione Circolare



Il dominio di rottura viene calcolato come per la sezione rettangolare si utilizza l'area di ferro linearizzata per rendere più semplice il calcolo degli integrali, che si trasformerebbero sommatorie e non conosciamo la posizione esatta dell'asse neutro. Per il dominio di rottura la coppia di sollecitazioni (P_{RD}; M_{RD}) va determinata per punti significativi è preferibile utilizzare la sommatoria .

Trazione e compressione semplice

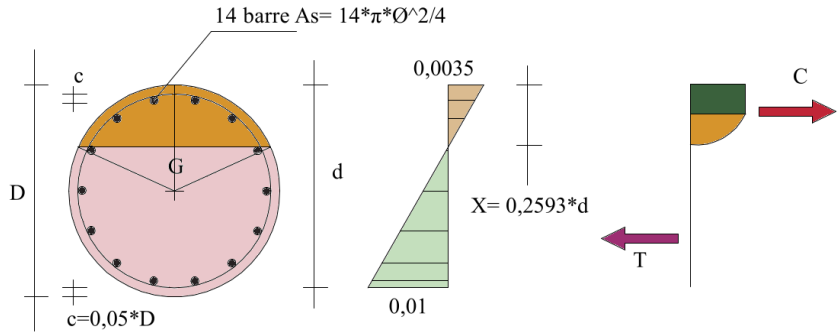
$$T = 1{,}25 * f_{YD} * A_S \;;\; P = B*H*\alpha*f_{cd} + 1{,}05 * f_{YD} * A_S$$ *sull'asse delle ascisse*

Si potrebbero definire i punti relativi alle varie regioni per

$X = 0{,}259*d$; $X = 0{,}648*d$, $X = D$ *ed il punto del max momento*

Punto 1 $X = 0{,}259*d$

La equazione di equilibrio delle tensioni normali



La freccia $f = R-R*\cos\alpha$, il raggio $R = c/\sin\alpha$ $f = c/\sin\alpha*(1-\cos\alpha)$

La corda $c = \sin\alpha*f/(1-\cos\alpha)$ $f = 0{,}2593*d$ $c = \sin\alpha*0{,}2593d/(1-\cos\alpha)$

L'angolo α $0{,}95*D/2 - 0{,}2593(0{,}95)*D = D/2*\cos\alpha$; $\cos\alpha = 0{,}49267$ $\alpha = 60°$

La corda $c = 0{,}45d$; la freccia $f = 0{,}2593d$ l'area del segmento $0{,}667*c*f$

$C = \Psi*fcd*0{,}667*0{,}45*d*0{,}259*d = \Psi*fcd*0{,}0778*d^2$ calcestruzzo

Le tensioni nelle armature metalliche positive di compressine e negative di trazione sono funzione della posizione delle barre metalliche , la deformazione per asse y avente origine sull'asse neutro e diametro centrale

Armatura compressa $\varepsilon'_S = 0{,}0035*Y_i/0{,}2593*d$;

Armatura tesa $\varepsilon_S = 0{,}0035*Y_i/0{,}2593*d$;

La posizione delle barre di armatura Y_1 ; Y_2 ; Y_3 ; Y_4 ; Y_5 ; Y_6 ; Y_7 ;

$0{,}0035/0{,}002593d = 0{,}00198/Y_E$; $Y_E = d*0{,}00198*0{,}2593/0{,}0035 = 0{,}1467d$

Le tensioni per ogni coppia di armature tese e compresse

$$\sigma_{IS} = [f_{yd} + E_{S2}*(0{,}0035*Y_i/0{,}2593*d - 0{,}00189)] \quad \text{per } Y_i > 0{,}1467d$$

$$\sigma_{IS} = E_S*0{,}0035*Y_i/0{,}2593*d \quad \text{per} \quad Y_i \leq 0{,}1467d$$

Con modulo elastico acciaio $E_S = 2100000$ daN/cmq ; $E_{S2} = 12207$ daN/cmq

Lo sforzo normale $P = \Psi*fcd*0{,}0778*d^2 + \Sigma A'_{SI}*\sigma_{IS} - \Sigma A_{SI}*\sigma_{IS}$

Il momento flettente Ultimo

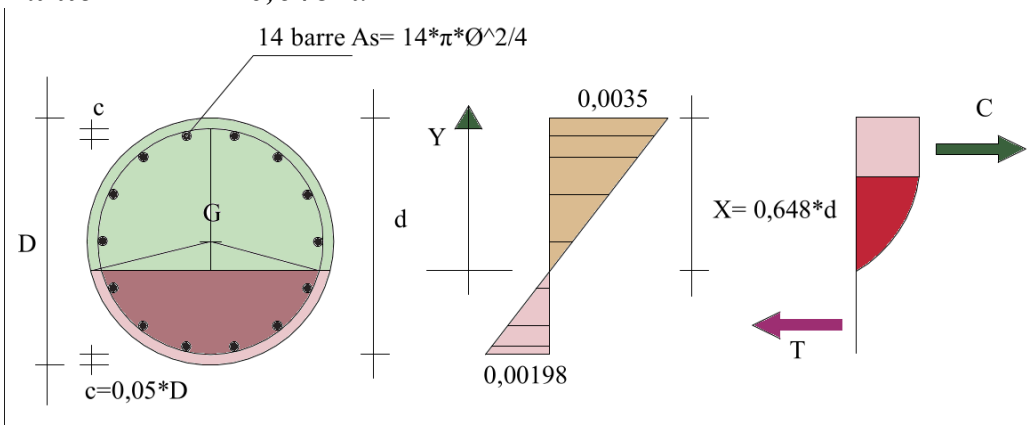
$M_{RD} = \Psi*fcd*0{,}0778*d^2*\lambda_G + \Sigma A'_{SI}*\sigma_{IS}*Y_I + \Sigma A_{SI}*\sigma_{IS}*Y_I$

Dove $\Psi = \int\sigma dA/(fcd*0{,}0778*d^2)$ $\lambda_G = \int\sigma*[R-(f-y)]dA/(\Psi*fcd*0{,}0778*d^2)$

Ψ rapporto tra il volume del solido delle tensioni normali e del prisma avente area di base quella del segmento circolare e altezza fcd

λ_G distanza del baricentro della risultante delle compressioni da centro del cerchio

Punto 2 *X = 0,648*d*



Y_E *= d* 0,00198*0,648/0,0035 = 0,366658d*

Le tensioni per ogni coppia di armature compresse

$$\sigma_{IS} = [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}0035 * Y_i / 0{,}648 * d - 0{,}00189)] \quad \text{per } Y_i > 0{,}367d$$

$$\sigma_{IS} = E_S * 0{,}0035 * Y_i / 0{,}648 * d \quad \text{per} \quad Y_i \leq 0{,}367d$$

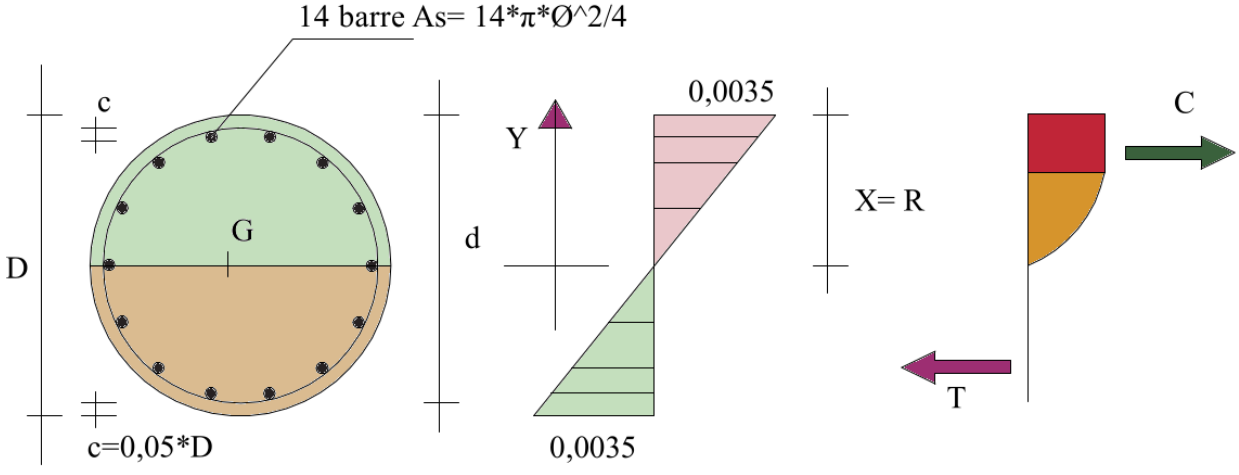
Per la armatura tesa $\sigma_{IS} = E_S * 0{,}0540 * Y_i / d$
Lo sforzo normale $P = \Psi * fcd * 0{,}0778 * d^2 + \Sigma A'_{SI} * \sigma_{IS} - \Sigma A_{SI} * E_S * 0{,}0540 * Y_i / d$
Il momento flettente Ultimo

$$M_{RD} = \Psi * fcd * 0{,}0778 * d^2 * \lambda_G + \Sigma A'_{SI} * \sigma_{IS} * Y_I + \Sigma A_{SI} * E_S * 0{,}0540 * Y_i^{\,2} / d$$

Dove $\Psi = \int \sigma dA / (fcd * 0{,}0778 * d^2)$ $\lambda_G = \int \sigma * [R - (f - y)] dA / (\Psi * fcd * 0{,}0778 * d^2)$

Ψ rapporto tra il volume del solido delle tensioni normali e del prisma avente area di base quella del segmento circolare e altezza fcd
λ_G *distanza del baricentro della risultante delle compressioni dal centro del cerchio*

Punto 3 *X = 0,5*D max momento*



Y_E *= D* 0,00198*0,5/0,0035 = 0,2828D*

Le tensioni per ogni coppia di armature tese e compresse

$$\sigma_{IS} = [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}0035 * Y_i / R - 0{,}00189)] \quad \text{per } Y_i > 0{,}2828D$$

$$\sigma_{IS} = E_S * 0{,}0035 * Y_i / R \quad \text{per} \quad Y_i \leq 0{,}2828D$$

Lo sforzo normale $P = \Psi * fcd * \pi * R^2/2$ *per la simmetria*

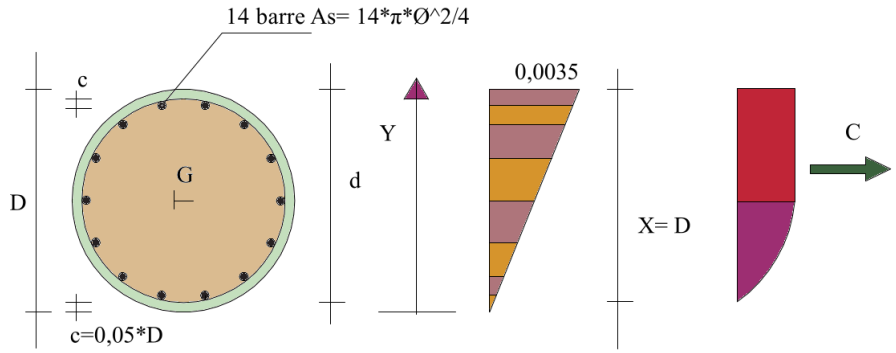
Il momento flettente Ultimo

$$M_{RD} = \Psi * fcd * \pi * R^2/2 * \lambda_G + \Sigma A'_{SI} * \sigma_{IS} * Y_I$$

Dove $\Psi = \int \sigma dA/(fcd * \pi * R^2/2)$ $\lambda_G = \int \sigma * [R-(f-y)] dA/(\Psi * fcd * 0{,}0778 * d^2)$

Ψ *rapporto tra il volume del solido delle tensioni normali e del prisma avente area di base pari al semicerchio e altezza fcd*
λ_G *distanza del baricentro della risultante delle compressioni dal centro del cerchio*

Punto 4 $X = D$



$Y_E = D * 0{,}00198/0{,}0035 = 0{,}5657D$

Le tensioni per ogni coppia di armature compresse

$$\sigma_{IS} = [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}0035 * Y_i / D - 0{,}00189)] \quad \text{per } Y_i > 0{,}5657D$$

$$\sigma_{IS} = E_S * 0{,}0035 * Y_i / D \quad \text{per} \quad Y_i \leq 0{,}5657D$$

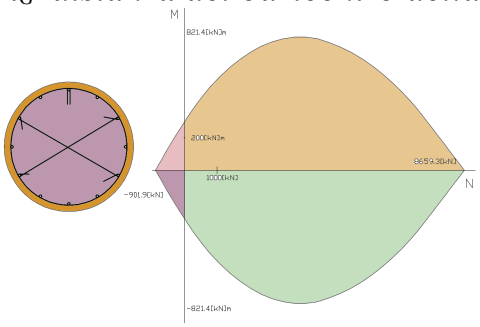
Lo sforzo normale $P = \Psi * fcd * \pi * R^2 + \Sigma A'_{SI} * \sigma_{IS} * Y_I$

Il momento flettente Ultimo

$$M_{RD} = \Psi * fcd * \pi * R^2/2 * \lambda_G + \Sigma A'_{SI} * \sigma_{IS} * Y_I + \Sigma A_{SI} * \sigma_{IS} * Y_I +$$

Dove $\Psi = \int \sigma dA/(fcd * \pi * R^2/2)$ $\lambda_G = \int \sigma * [R-(f-y)] dA/(\Psi * fcd * 0{,}0778 * d^2)$

Ψ rapporto tra il volume del solido delle tensioni normali e del prisma avente area di base pari al cerchio e altezza fcd ;
λ_G distanza del baricentro della risultante delle compressioni dal centro del cerchio .

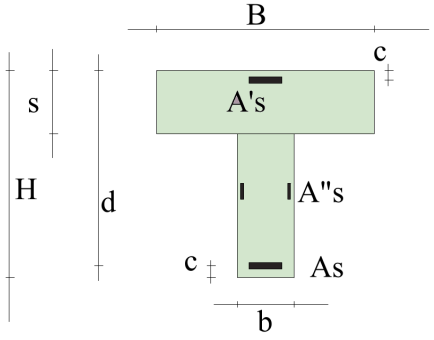


D= 80 cm 12ϕ16

Assegnata una coppia di valori N_{SD} ed M_{SD} ,si individua un punto P all'interno del dominio di coordinate P(N_{SD} ,M_{SD}) , facendo crescere in modo proporzionale le due sollecitazioni si definisce un coefficiente di sicurezza

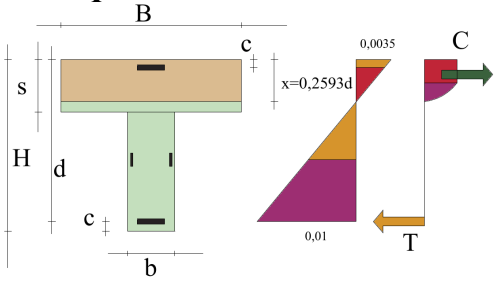
$S = [(k*P_{SD})^2+(k*M_{SD})^2]^{1/2}/[(P_{RD})^2+(M_{RD})^2]^{1/2}$
S = k dove k è la intensità del vettore inclinato di un angolo $\beta= arctg(M_{SD}/N_{SD})$ con origine nel Punto P e vertice sulla frontiera del dominio .

-Sezione a T
Per una sezione a T con doppia armatura e ferri di parete laterali , si determinano al solito 2 punti sull'asse delle X coincidenti con lo sforzo normale e altre 4 coppie di valori P_{RD}; M_{RD}



Trazione e compressione semplice
$T =1,25 *f_{YD} *(A_S +A'_S +A''_S)$;
$P = [b*(H-s)+ B*s*\alpha*f_{cd}]+ 1,05 *f_{YD} *(A_S +A'_S +A''_S)$ sull'asse delle ascisse

Primo punto X = 0,2593d rottura bilanciata



$\varepsilon'_S/[0,259*(d-c)]= 0,01/(d-0,259d)$; $\varepsilon'_S =0,003325$ $c = 0,05*d$

$$\varepsilon''_S/[0{,}5d-0{,}2593d\,]= 0{,}01/(d-0{,}2593d) \quad ; \qquad \varepsilon''_S = 0{,}00324$$

$$P = \alpha * fcd * B * 0{,}2593 * d\ 0{,}80953 - A''_S * [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}00324 - 0{,}00189)] +$$
$$+ A'_S * [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}003325 - 0{,}00189)] - 1{,}25 * A_S * f_{yd}$$

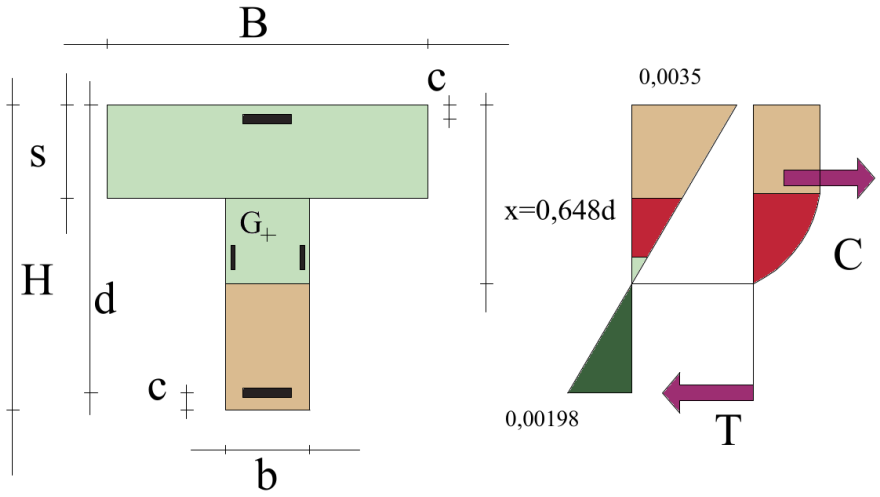
$$P_{RD} = \alpha * fcd * B * 0{,}2593 * d\ 0{,}80953 - 1{,}04 * A''_S * f_{yd} - 1{,}25 * A_S * f_{yd} + 1{,}044 * A'_S * f_{yd}$$

$$M_{RD} = 0{,}2099 * \alpha * fcd * B * d\ * (H/2 - 0{,}416 * 0{,}259 * d) + 1{,}25 * f_{YD} * A_S\ * (H/2 + d_g) +$$

$$+ 1{,}044 * A_S * f_{yd}\ * (d_g + 0{,}5s - c) + 1{,}04 * A''_S * f_{yd}\ * (H/2 - d_g)$$

d_g *distanza del baricentro geometrico G della sezione dal baricentro del rettangolo*

Secondo punto X = 0,648 d



$$Y_E = d * 0{,}00198 * 0{,}648/0{,}0035 = 0{,}366658d$$

$$\varepsilon'_S/[0{,}648d(0{,}95)] = 0{,}00198/(d-0{,}648d) \quad ; \qquad \varepsilon'_S = 0{,}0046275 \qquad c = 0{,}05 * d$$
$$\varepsilon''_S/0{,}5d = 0{,}0035/0{,}648d \quad ; \qquad \varepsilon''_S = 0{,}0027$$

$$P = \Psi * (B * s + 0{,}648(d-s) * b) * fcd + A'_S * [f_{yd} + E_{S2} * (0{,}0046275 - 0{,}00189)] - A_S * f_{yd}$$
$$+ A''_S * E_S * \varepsilon''_S$$

$$P = \Psi * (B * s + 0{,}648d * b) * fcd + 1{,}08 * A'_S * f_{yd} - A_S * f_{yd} + A''_S * E_S * \varepsilon''_S$$

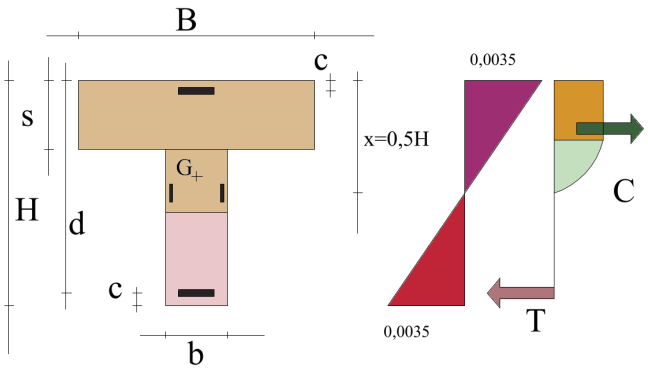
$$M_{RD} = \Psi * (B * s + 0{,}648(d-s) * b) * fcd * \lambda_G + 1{,}08 * A'_S * f_{yd} * (d_g + 0{,}5s - c) - A_S * f_{yd}\ * (H/2 + d_g) +$$
$$A''_S * E_S * \varepsilon''_S\ * (H/2 - d_g)$$

$$\Psi = \int \sigma * dA/(B * s + 0{,}648d * b)$$

rapporto tra il volume delle tensioni e il prisma avente area di base
*(B*s+(0,648d–s)b) altezza fcd*
Distanza del baricentro delle tensioni normali di compressione nel cls dal baricentro geometrico $\lambda_G = \int \sigma * y * dA/[\Psi * (B * s + 0{,}648d * b)]$

d_g *distanza del baricentro geometrico G della sezione dal baricentro del rettangolo*

Punto 3 *X = 0,5*H* ***Max momento*** $\varepsilon_S = \varepsilon'_S$ *e* $\varepsilon_C = 0{,}0035$



$P_{RD} = \Psi*(B*s+0{,}648(d-s)*b)*fcd$;

$\varepsilon_S = \varepsilon'_S$ $\varepsilon_S/(0{,}5*H-0{,}05*H) = 2*0{,}0035/H$ $\varepsilon_S = \varepsilon'_S = 0{,}00315$ $\varepsilon''_S = 0$

$M_{RD} = \Psi*(B*s+0{,}648(d-s)*b)*fcd*\lambda_G + A_S*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}00315-0{,}00198)]*(H/2+d_g)$

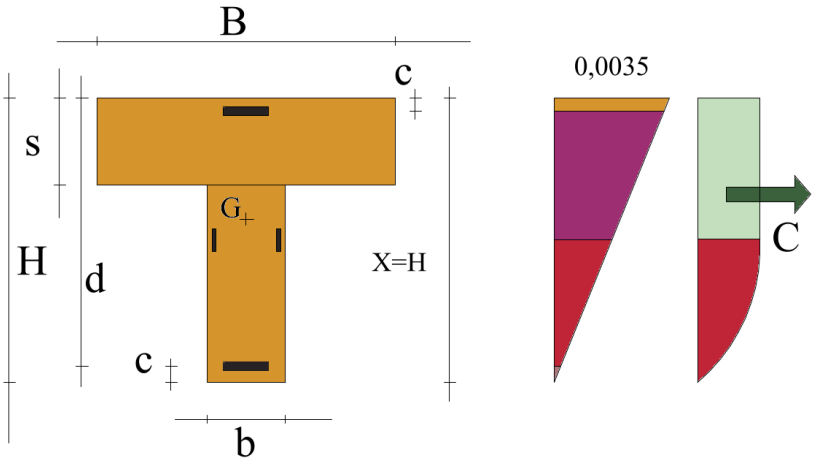
$+A'_S*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}00315-0{,}00198)]*(d_g+0{,}5s-c)$

Ψ *rapporto tra il volume delle tensioni e il prisma avente area di base (B*s+(0,648d–s)b) altezza fcd*

Distanza del baricentro delle tensioni normali di compressione nel cls dal baricentro geometrico $\lambda_G = \int\sigma*y*dA/[\Psi*(B*s+(0{,}648d–s)*b)]$

d_g *distanza del baricentro geometrico G della sezione dal baricentro del rettangolo*

Punto 4 *X = H*



Le deformazioni nelle armature:
Armatura superiore $\varepsilon'_S/(0{,}95*H) = 0{,}0035/H$; $\varepsilon'_S = 0{,}003325$
Armatura inferiore $\varepsilon_S/(0{,}05*H) = 0{,}0035/H$; $\varepsilon_S = 0{,}000175$
Armatura centrale $\varepsilon''_S/(0{,}5*H) = 0{,}0035/H$; $\varepsilon''_S = 0{,}00175$

Lo sforzo normale di compressione

$$P_{RD} = \Psi*(B*s+(H-s)*b)*fcd + A'_S*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}003325-0{,}00198)]+$$

$$+A''_S*E_S*0{,}00175 + A_S*E_S*0{,}000175$$

Il momento ultimo

$$M_{RD} = \Psi*(B*s+(H-s)*b)*fcd*\lambda_G + A'_S*[f_{yd}+E_{S2}*(0{,}003325-0{,}00198)]*(d_g+0{,}5s-c)$$

$$+A''_S*E_S*0{,}00175*(d_g+0{,}5s-c)+A_S*E_S*0{,}000175*(H/2+d_g)$$

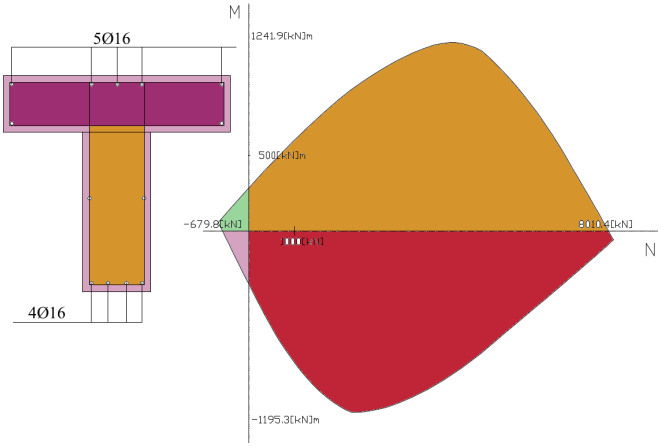
$$M_{RD} = \Psi*(B*s+(H-s)*b)*fcd*\lambda_G + 1{,}042*A'_S*f_{yd}*(d_g+0{,}5s-c)$$

$$+A''_S*E_S*0{,}00175*(d_g+0{,}5s-c)+A_S*E_S*0{,}000175*(H/2+d_g)$$

*Ψ rapporto tra il volume delle tensioni e il prisma avente area di base (B*s+(d–s)b) altezza fcd*

Distanza del baricentro delle tensioni normali di compressione nel cls dal baricentro geometrico $\lambda_G = \int\sigma*y*dA/[\Psi*(B*s+(d–s)*b)]$

d_g distanza del baricentro geometrico G della sezione dal baricentro del rettangolo



Sezione a T
Altezza 100 cm ; Spessore soletta 25 cm ; Larghezza base superiore 100cm
Larghezza base inferiore 30 cm ;

Assegnata una coppia di valori N_{SD} ed M_{SD} ,si individua un punto P all'interno del dominio di coordinate P(N_{SD},M_{SD}) , facendo crescere in modo proporzionale le due sollecitazioni si definisce un coefficiente di sicurezza

$$S = [(k*P_{SD})^2+(k*M_{SD})^2]^{1/2}/[(P_{RD})^2+(M_{RD})^2]^{1/2}$$

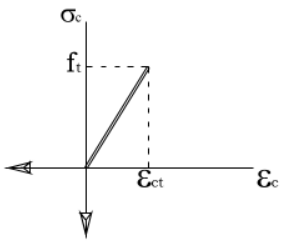
S = k dove k è la intensità del vettore inclinato di un angolo β= arctg(M_{SD}/N_{SD}) con origine nel Punto P e vertice sulla frontiera del dominio .

I domini sono stati ottenuti con un software per la verifica di sezione c.a; la normativa è Eurocode 2 di vecchia generazione EN1992 si è utilizzato Acciaio Feb44K e calcestruzzo con resistenza caratteristica Rck 350 ; Le verifiche e la determinazione dei domini di rottura per sezioni cemento armato le si eseguono in pochi minuti senza inutili e calcoli complicati. Tra i differenti diagrammi di acciaio , elastoplastico ideale e bilineare , la differenza è lieve , nella pratica professionale verifiche di elementi strutturali a pressoflessione non li si eseguano mai, si calcolano edifici in cemento armato dove i pilastri sono verificati direttamente da software Fem. Verificare un elemento strutturale e determinarne il dominio di rottura ad un professionista che calcola e costruisce edifici in cemento armato può succedere 1 volta ogni 5 anni .

Verifica a fessurazione

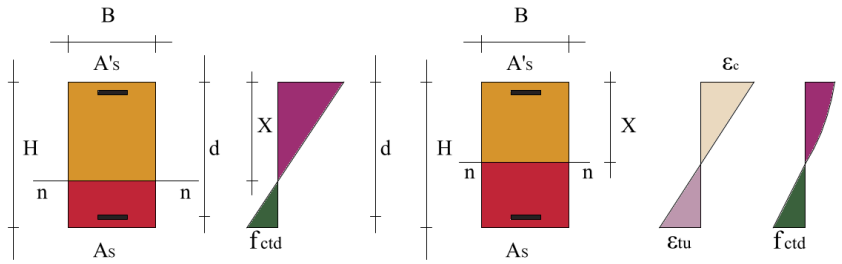
La verifica a fessurazione di solito viene eseguita con il metodo alle tensioni ammissibili ipotizzando comportamento elastico lineare sia a trazione che a compressione e consiste nella determinazione del momento di fessurazione corrispondente alla tensione di trazione nel cls al lembo teso . Si definsce un coefficiente di omgeneizzazione $n = E_T/E_C$, pari a 0,4 ÷ 0,6 dove i moduli elastici sono definiti dalle NTC 2018

$E = 22000*(f_{cm}/10)^{0,3}$ *N/mmq* $E_{CT} = 18000*\sqrt{Rck}$ *daN/cmq*



La tensione di rottura a trazione
$f_{ctm} = 0,30* (f_{CK})^{2/3}$ *per classi* $\leq 50/60$
il valore medio della resistenza a trazione per flessione $f_{cfm} = 1,2*f_{ctm}$
$f_{cfm} = 1,3*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 95%*
$f_{cfm} = 0,7*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 5%*

La resistenza di progetto a trazione del cls $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_C$ *con* $\gamma_C = 1,5$



Per C 30/35 $n' = 106490/340770=0,32 \approx 0,4$ $n = E_s/E_c = 15$

La posizione dell'asse neutro $Sn= 0$

$B*X^2/2- n'*B*(H-X)^2/2+n*As*(d-c) + n*A's*(X-c)= 0$

Equazione di II grado dalla quale ricaviamo la x

La resistenza a trazione $f_{ctd}= 1,3*0,3*(f_{CK})^{2/3} /1,5= 32$ *daN/cmq*

Il momento di fessurazione $f_{ctd}=n'* M/I*(H-X)$ $M_F= f_{ctd}*I/[n'*(H-X)]$

Il momento di inerzia è quello della sezione omogenea

$I = B* X^3/3+ n'*B*(H-x)^3/3 + n*A_S*(d-x)^2 + n*A'_S*(x-c)^2$

Se per il cls consideriamo un diagramma parabola rettangolo con da NTC2018, la rottura si attinge per max deformazione di trazione $\varepsilon_T=f_{ctd}/E_T=32/106490 = 0,0003$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale

$2/3*\sigma_c*B*\xi*d + A'_S*E_S*\varepsilon'_S - A_S*E_S*\varepsilon_S - f_{ctd}*(H-\xi*d)*b/2$

Le deformazioni

$\varepsilon'_S /(\xi*d -c)= 0,0003/(H-\xi*d)$ $\varepsilon'_S = (\xi*d -c)*0,0003/(H-\xi*d)$
$\varepsilon_S /(d -c)= 0,0003/(H-\xi*d)$ $\varepsilon_S = (d -c)*0,0003/(H-\xi*d)$
$\varepsilon_C/\xi*d = 0,0003/(H-\xi*d)$ $\varepsilon_C = \xi*d *0,0003/(H-\xi*d)$

La rottura la si consegue per trazione ipotizzando in un primo tentativo che

$\varepsilon_C < 0,002$ *e* $\varepsilon'_S \leq 0,00198$ *è valida la equazione*

$2/3*\sigma_c*B*\xi*d+A'_S*E_S*(\xi*d-c)*0,0003/(H-\xi*d)-A_S*E_S*(d -c)*0,0003/(H-\xi*d)-f_{ctd}*(H-\xi*d)*B/2 = 0$

$\sigma_C=1000*|\xi*d *0,0003/(H-\xi*d)|*[(-250*\xi*d *0,0003/(H-\xi*d+1)]*\alpha*f_{cd}$

Dalla quale ricaviamo prima ξ *e poi la* $x = \xi*d$ *; ed il momento di fessurazione*

$M_F = 2/3*\sigma_c*B*\xi*d*\lambda_G +A'_S*E_S*(\xi*d-c)*0,0003/(H-\xi*d)*(\xi*d-c)$

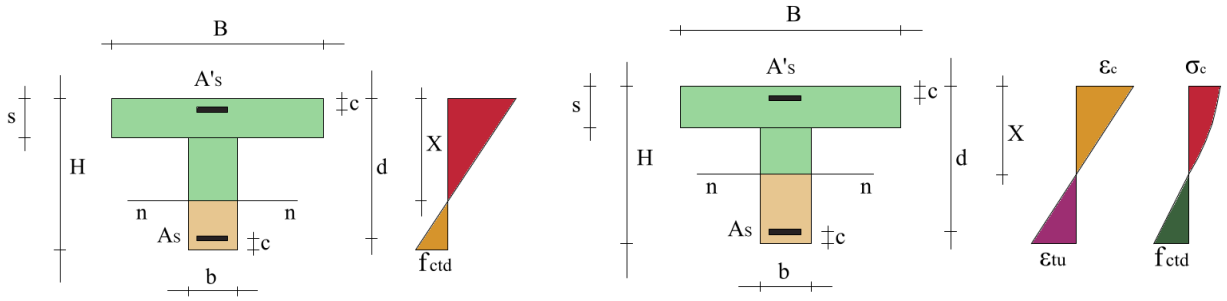
$+A_S*E_S*(d -c)*0,0003(d-\xi*d)/(H-\xi*d) + f_{ctd} *(H-\xi*d)^2*b/3$

Dove $\lambda_G = 0,45*\xi*d$ *ordinata baricentro settore di parabola*

$0,002/m = 0,0003/(H-\xi*d)$ $m = 0,15*(1,05*d-\xi*d)= 0,15*d*(1,05-\xi)$ $m < \xi*d$
La deformazione del cls e dell'acciaio al lembo compresso sono sempre inferiori ai valori elastici per l'acciaio compresso e il cls

$\varepsilon_C <0,002$ *e* $\varepsilon'_S <00198$

Verifica a fessurazione sezione a T



Il calcolo del momento di fessurazione per entrambi i legami σ-ε è immediato :

Per la elasticità lineare si determina la posizione dell'asse neutro attraverso il momento statico

$$B*s*(x-s/2) - n'*b*(H-x)^2/2 - n*As*(d-x) + n*A's*(x-c)= 0$$

Equazione di II grado dalla quale ricaviamo la x ;i momento di inerzia della sezione omogenea il momento di fessurazione

$$I = B*s^3/12+B*s*(X-s/2)^2 + n'*b*(H-x)^3/3 + n*As*(d-x)^2 + n*A's*(x-c)^2$$

$$f_{ctd}=n'* M/I*(H-X) \qquad M_F= f_{ctd}*I/[n'*(H-X)]$$

Per diagramma parabola rettangolo la equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali posto $x=\xi*d$

$$\Psi*(B*s+(\xi d-s)*b)*\sigma_C + A's*Es*+ A'_S*E_S*\varepsilon'_S - A_S*E_S*\varepsilon_S - f_{ctd}*(H-\xi*d)*b/2$$

$\varepsilon_T=f_{ctd}/E_T=32/106490 = 0,0003$ *la rottura si attinge per* $\varepsilon_T=f_{ctd}/E_T$

Le deformazioni

$\varepsilon'_S /(\xi*d -c)= 0,0003/(H-\xi*d)$ $\qquad$ $\varepsilon'_S = (\xi*d -c)*0,0003/(H-\xi*d)$
$\varepsilon_S /(d -c)= 0,0003/(H-\xi*d)$ $\qquad$ $\varepsilon_S = (d -c)*0,0003/(H-\xi*d)$
$\varepsilon_C/\xi*d = 0,0003/(H-\xi*d)$ $\qquad$ $\varepsilon_C = \xi*d *0,0003/(H-\xi*d)$

$$\Psi[B*s+b*(\xi d-s)]*\sigma_C+A'_SE_S*(\xi d-c)*0,0003/(H-\xi d)-A_SE_S*(d -c)*0,0003/(H-\xi d)-f_{ctd}*(H-\xi d)*b/2 = 0$$

$$\sigma_C=1000*|\xi*d *0,0003/(H-\xi*d)|*[(-250*\xi*d *0,0003/(H-\xi*d)+1]*\alpha*f_{cd}$$

*Dalla quale ricaviamo prima ξ e poi la x = ξ*d ; ed il momento di fessurazione*

$$M_F =\Psi*[B*s+b*(\xi d-s)]*\sigma_C *\lambda_G +A'_S*E_S*(\xi d-c)*0,0003/(H-\xi d)*(\xi d-c)+$$

$$+A_S*E_S*(d -c)*0,0003(d-\xi d)/(H-\xi d)+f_{ctd} *(H-\xi*d)^2*b/3$$

*Dove Ψ è il rapporto tra il volume del solido delle tensioni e il volume del prisma avente area di base pari a [B*s+b*(ξd-s)] e altezza fcd*
$\Psi = \int \sigma dA / [f_{cd} * B * s + f_{cd} * b(\xi d - s)]$ Tale coefficiente lo possiamo determinare nota la deformazione in corrispondenza della soletta superiore

$$\varepsilon_C / (\xi * d - s) = 0{,}0003 / (H - \xi * d) \qquad \varepsilon_C = 0{,}0003(\xi * d - s) / (H - \xi * d)$$

$$\Psi = [2/3(B * \xi d) * \sigma_C + 2/3(b * (\xi d - s)) * \sigma_{C1} - 2/3(B - b) * (\xi d - s)) * \sigma_{C1}] / [f_{cd} * B * s + f_{cd} * b(\xi d - s)]$$

$$\sigma_C = 1000 * |\xi * d * 0{,}0003 / (H - \xi * d)| * [(-250 * \xi * d * 0{,}0003 / (H - \xi * d) + 1)] * \alpha * f_{cd}$$

$$\sigma_{C1} = 1000 * |(\xi * d - s) * 0{,}0003 / (H - \xi * d)| * [(-250 * (\xi * d - s) * 0{,}0003 / (H - \xi * d) + 1)] * \alpha * f_{cd}$$

λ_G distanza del baricentro della risultante degli sforzi di compressione dall'asse neutro . Il momento dovuto alla risultante

$$C * \lambda_G = [2/3 * 0{,}45B * \xi d^2 * \sigma_C + 2/3 * 0{,}45 * b * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1} - 2/3 * 0{,}45(B - b) * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1}]$$

$$C * \lambda_G = 0{,}3 * [B * \xi d^2 * \sigma_C + b * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1} - (B - b) * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1}]$$

Il momento di fessurazione per sezione a T separando le aliquote zona compressa e tesa

$$M_F = 0{,}3 * [B * \xi d^2 * \sigma_C + b * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1} - (B - b) * (\xi d - s)^2 * \sigma_{C1}]$$

$$+ A'_S * E_S * (\xi d - c) * 0{,}0003 / (H - \xi d) * (\xi d - c)$$

$$+ A_S * E_S * (d - c) * 0{,}0003(d - \xi d) / (H - \xi d) + f_{ctd} * (H - \xi * d)^2 * b / 3$$

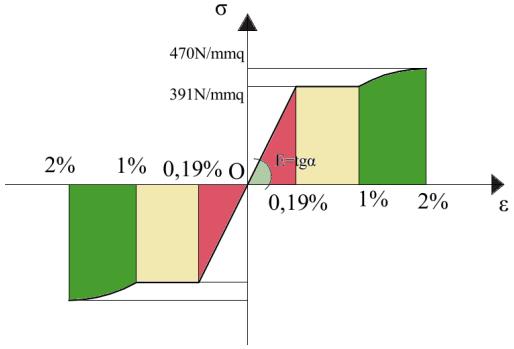
Le tensioni nel cls al bordo compresso e alla variazione di base

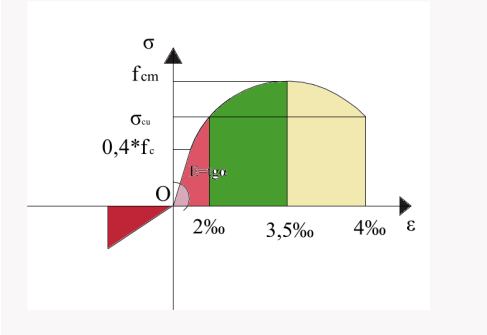
$$\sigma_C = 1000 * |\xi * d * 0{,}0003 / (H - \xi * d)| * [(-250 * \xi * d * 0{,}0003 / (H - \xi * d) + 1)] * \alpha * f_{cd}$$

$$\sigma_{C1} = 1000 * |(\xi * d - s) * 0{,}0003 / (H - \xi * d)| * [(-250 * (\xi * d - s) * 0{,}0003 / (H - \xi * d) + 1)] * \alpha * f_{cd}$$

Verifiche sezioni c.a.

Affrontiamo il progetto e verifica di sezioni in cemento armato per le sollecitazioni semplici utilizzando per l'acciaio e il calcestruzzo i seguenti diagramma tensioni deformazione





La rappresentazione analitica del diagramma di calcolo per l'acciaio simmetrico a trazione e compressione

Lineare $\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq* $0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$

Costante $\sigma = fyd = 391$ *N/mmq* $0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$

Quadratica $\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$ $0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

La rappresentazione analitica del diagramma di calcolo per il calcestruzzo come riportato in figura si compone di 3 tratti per la compressione e uno lineare per la trazione Rck 350 C35

$$\varepsilon_{c1} = 0{,}002 \; ; \quad \varepsilon_{cu} = 0{,}0035 \quad \varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$$

$\sigma = E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

$$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2 - 58038{,}76\,a*\varepsilon_C + 93{,}68$$

$\sigma = E_T*\varepsilon_{CT}$ $\sigma \le f_{ctd} = 3{,}2$*N/mmq* $E_T = 10600$ *N/mmq*

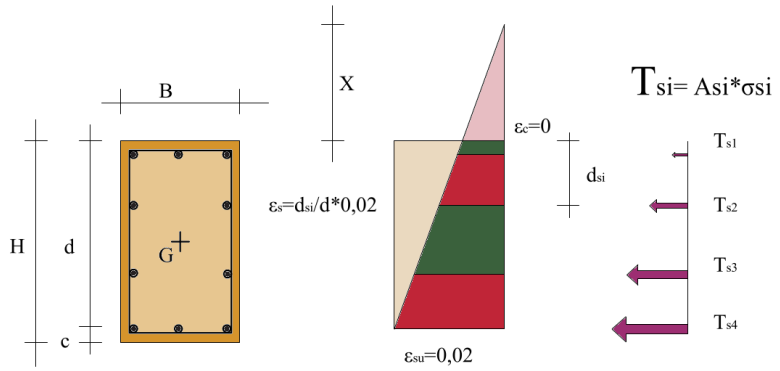
La verifica allo SLU la eseguiamo allo stesso modo per sezione rettangolare a T e circolare attraverso delle equazioni di equilibrio alla traslazione e rotazione di tensioni normali determinando i domini di rottura.

Verifica a tensoflessione I regione

$\sum\sigma_{SI} * A_{SI} = T$ *equilibrio traslazione* $M_{RD} = \sum\sigma_{SI} * A_{SI} * d_{GI}$ $k = 470/391 = 1{,}20$

Per trazione semplice la armatura metallica $A_S = T/(1{,}20*f_{yd})$

$N_{RD} = A_S*1{,}20*f_{yd} \ge N_{SD}$



La rottura si attinge per max deformazione nell'acciaio al bordo inferiore $\varepsilon_{su}=2\ \%$

Per $\varepsilon_S \le 0{,}001898$ $\qquad \sigma_{SI} = 206000 * \varepsilon_S$

Per $0{,}00189 \le \varepsilon_S \le 0{,}01$ $\qquad \sigma_{SI} = f_{yd} = 391\ N/mmq$

Per $0{,}01 \le \varepsilon_S \le 0{,}02$ $\qquad \sigma_{SI}=-790000*\varepsilon^2 +31600*\varepsilon +154$

La equazione di equilibrio alla traslazione

$$\sum \sigma_{SI} * A_{SI} = P \qquad (A)$$

La incognita è la deformazione dell'acciaio al bordo superiore ovvero la x

La deformazione nel livello di armatura i-mo $\varepsilon_{SI}/d_{GI} = 0{,}02/(d+x)$

$\varepsilon_{SI}=0{,}02*d_{GI}\ /(d+x) = 0{,}02*(x+d_{SI})/(d+x)$ $\qquad d_{GI} = x+d_{SI}$

Nella equazione di primo grado (A) l'unica incognita è la x

$$\sum \{[A'_{SI} * 206000*0{,}02*(x+d_{SI}) + A''_{SI} * fyd + A_{SI} * \{-790000*[0{,}02*(x+d_{SI})]^2 +$$

$$31600*[0{,}02*(x+d_{SI})] +154\} \} = P*(d+x) \qquad x=\xi*d \quad con \quad \xi \ge 1$$

Dove :

A'_{SI} *area di ferro con deformazione* $\varepsilon_S \le 0{,}001898$ $\qquad d_{SI} \le 0{,}01(d-x)$

A''_{SI} *area di ferro con deformazione* $0{,}00189 \le \varepsilon_S \le 0{,}01$ $\quad 0{,}01(d-x) \le d_{SI} \le 0{,}5(d-x)$

A_{SI} *area di ferro con deformazione* $0{,}01 \le \varepsilon_S \le 0{,}02$ $\qquad 0{,}5(d-x) \le d_{SI} \le d$

d_{S1} *la distanza della armature in fase elastica dal bordo compresso*

d_{S2} *la distanza della armature in fase di snervamento dal bordo compresso*

d_{S3} *la distanza della armature in fase plastica dal bordo compresso*

$0{,}00198/(x+ d_{S1}) = 0{,}02/(x+d)$ $\qquad d_{S1} = 0{,}01(x+d) - x = 0{,}01(d-x)$

$0{,}01/(x+ d_{S2}) = 0{,}02/(x+d)$ $\qquad d_{S2} = 0{,}5*(x+d) - x = 0{,}5*(d-x)$

$0{,}02/(x+ d_{S3}) = 0{,}02/(x+d)$ $\qquad d_{S3} = d$

$$\sum \{[A'_{SI} * 206000*0,02*(\xi*d+d_{SI}) + A''_{SI}*fyd + A_{SI}*\{-790000*[0,02*(\xi*d+d_{SI})]^2 +$$

$$31600*[0,02*(\xi*d+d_{SI})] +154\}\} = P*(d+\xi*d)$$

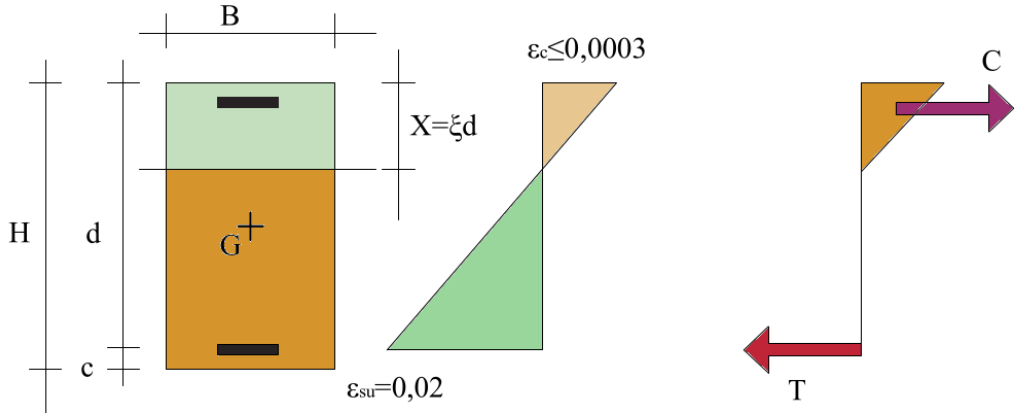
*P sforzo normale di trazione. Noto ξ e la x=ξ*d il momento di rottura calcolato rispetto al baricentro G*

$$M_{RD} = \sum \sigma_{SI} * A_{SI} * (H/2-d_{SI})$$

Verifica a flessione II regione

La rottura avviene per trazione con max deformazione nell'acciaio teso 0,02 e si prospettano 3 possibili situazioni

1-Calcestruzzo in fase elastica lineare *al bordo compresso* $\varepsilon_C \leq 0,0003$



La verifica ed il calcolo del momento ultimo di rottura è semplice

$$1/2*B*\xi*d*\sigma c + A's* Es*\varepsilon'_S - 1,20*f_{yd}*As=0$$

La deformazione nell'acciaio compresso $\varepsilon'_S = 0,02(\xi*d-0,05d)/(d-\xi*d)$

$\varepsilon'_S = 0,02(\xi-0,05)/(1-\xi)$ $c= 0,05d$ *copriferro*

La deformazione nel cls compresso al bordo $\varepsilon_c = 0,02*\xi/(1-\xi)$

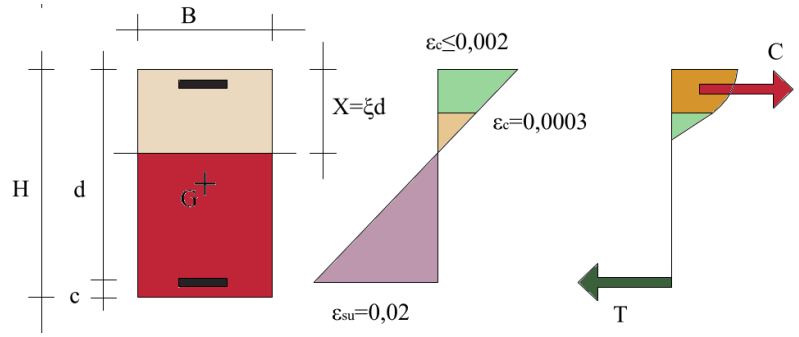
$$\sigma_c = E_C*\varepsilon_c$$

$$1/2*B*\xi*d*E_C*0,02*\xi/(1-\xi) + A's* Es*0,02(\xi-0,05)/(1-\xi) - 1,20*f_{yd}*As=0$$

Da questa equazione ricaviamo prima ξ *e poi* $x = \xi*d$
Il momento di rottura della sezione

$$M_{RD}=1/3*B(\xi*d)^2*E_C*0,02*\xi/(1-\xi)+[A's*Es*0,02(\xi-0,05)/(1-\xi) -1,20*f_{yd}*As]*(H/2-c)$$

2-Calcestruzzo in fase elastica *al bordo compresso* $0{,}0003 \le \varepsilon_C \le 0{,}002$



La verifica ed il calcolo del momento ultimo di rottura è semplice

$$0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B + \Psi*B*\xi*d*\sigma c + A's*Es*\varepsilon'_S - 1{,}20*f_{yd}*As=0$$

Le deformazioni $\varepsilon'_S = 0{,}02(\xi-0{,}05)/(1-\xi)$; $\varepsilon_c = 0{,}02*\xi/(1-\xi)$

Il coefficiente Ψ *è il rapporto tra l'area del diagramma delle tensioni e il rettangolo di lati* $(\xi d-m)$ *e* σc; *la tensione nel cls al bordo compresso*

$$\sigma_C = -16622026177{,}93*\varepsilon_C^{\,3} + 87242582{,}02*\varepsilon_C^{\,2} - 58038{,}76*\varepsilon_C + 93{,}68$$

$$\sigma_C = -16622026178*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^3 + 87242582*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^2 - 58038*[0{,}02*\xi/(1-\xi)] + 93{,}68$$

Il coefficiente $\Psi = \int \sigma_C dy/(\xi d*\sigma c)$ $\varepsilon_c/\xi d = 0{,}0003/m$

$m = 0{,}0003*\xi d/\varepsilon_c = 0{,}015*d\,(1-\xi)$

$\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

Lo suddividiamo in due integrali $\int \sigma_C dy = C_1 + C_2$

$$C_1 = B*0{,}4*f_{cm}/1{,}5*0{,}015*d\,(1-\xi) = 0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B$$

$C_2 = \int \sigma_C dy$ *estremi* $[0{,}0002817 ; 0{,}02*\xi/(1-\xi)]$ $0{,}015*d\,(1-\xi) \le Y \le d\,\xi$

Si tratta in modo semplice determinare l'area di una porzione di cubica simile ad un trapezio base maggiore σ_C , *base minore* $0{,}4*f_{cm}/1{,}5$, *altezza*

$d\,\xi - 0{,}015*d\,(1-\xi) = 0{,}985*d\,\xi - 0{,}015*d = 15*d*(66*\xi - 1)/10000$

Risolvendo l'integrale per la funzione $Y = p*X^3$ *Area* $p*\int X^3\,dy = p*X^4/4$
L'area $A = X*Y/4$ *calcolato tra* σ_C $[d\,\xi - 0{,}015*d\,(1-\xi)\,]/4$

$$C_2 = B*\sigma_C*d\,[0{,}985*\xi - 0{,}015]/4$$

La risultante degli sforzi di compressione

$C = B*0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)+B*\sigma_C*d\,[0{,}985*\xi-0{,}015]/4$ *la tensione al lembo compresso*

$\sigma_C=-16622026178*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^3+87242582*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^2-58038*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]+93{,}68$

Il coefficiente Ψ *lo definiamo solo per la area superiore* $\Psi=[0{,}985*\xi-0{,}015]/4$
La equazione di equilibrio alla traslazione

$0{,}002*f_{cm}*d(1-\xi)*B+0{,}25*(0{,}985*\xi-0{,}015)*B*\xi d*\sigma c+A's*Es*\varepsilon'_S-1{,}20*f_{yd}*As=0$

La incognita di questa equazione è ξ *con* $\varepsilon'_S=0{,}02(\xi-0{,}05)/(1-\xi)$

Il momento di rottura ultimo a flessione

$M_{RD}=0{,}004*f_{cm}*B*d(1-\xi)/3+0{,}25*(0{,}985*\xi-0{,}015)B*\xi d*\sigma c*(\xi d-\lambda)$

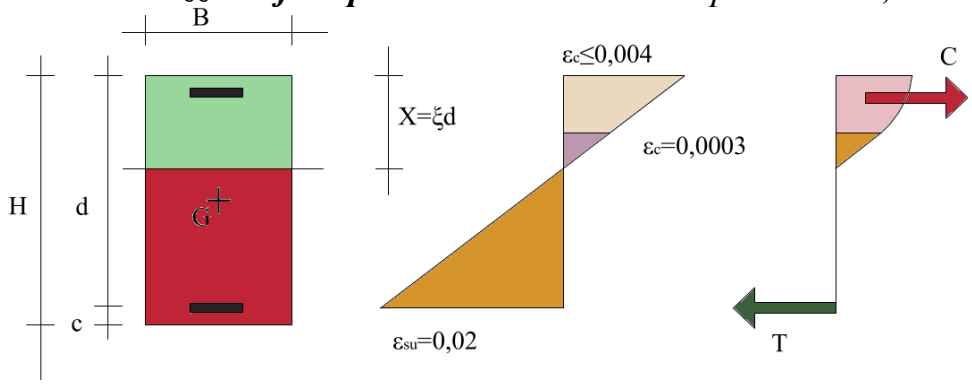
$+A'_s*E_s*\varepsilon'_S*d(\xi-0{,}05)+1{,}20*f_{yd}*As*d(1-\xi)$

la distanza della risultante C_2 *degli sforzi di compressione dal bordo compresso*

$\lambda=p^2*\int X^6\,dy\,/p*\int X^3\,dy = p^2*X^7/7\,/p*X^4/4 = 4/7*p*X^3 = 4/7*[d\,\xi-0{,}015*d\,(1-\xi)]$

Le funzioni $\Psi(\xi)=[0{,}985*\xi-0{,}015]/4$ *e* $\lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi-0{,}015*d\,(1-\xi)]$ *sono note*

3-Calcestruzzo in fase plastica *al bordo compresso* $0{,}0003 \le \varepsilon_C \le 0{,}004$



$0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B+\Psi*B*\xi*d*\sigma c+A's*Es*\varepsilon'_S-1{,}20*f_{yd}*As=0$

Le deformazioni $\varepsilon'_S=0{,}02(\xi-0{,}05)/(1-\xi)$; $\varepsilon_c=0{,}02*\xi/(1-\xi)$
La equazione di equilibrio alla traslazione

$0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B+\Psi*B*\xi*d*\sigma c+A's*\sigma'_S-1{,}20*f_{yd}*As=0$
Le funzioni $\Psi=\Psi(\xi)$ *e* $\lambda=\lambda(\xi)$ *restano invariate , è opportuno determinare la* σ'_S

In funzione di $\varepsilon'_S=0{,}02(\xi-0{,}05)/(1-\xi)$ *che è inferiore a* $\varepsilon_C=0{,}004$

Costante $\sigma'_S = \sigma = f_{yd} = 391\ N/mmq$ $0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$

$0{,}002 * f_{cm} * d\ (1-\xi) * B + \Psi * B * \xi * d * \sigma c + A's * f_{yd} - 1{,}20 * f_{yd} * As = 0$

La tensione al bordo compresso

$\sigma_C = -16622026178 * [0{,}02 * \xi/(1-\xi)]^3 + 87242582 * [0{,}02 * \xi/(1-\xi)]^2 - 58038 * [0{,}02 * \xi/(1-\xi)] + 93{,}68$

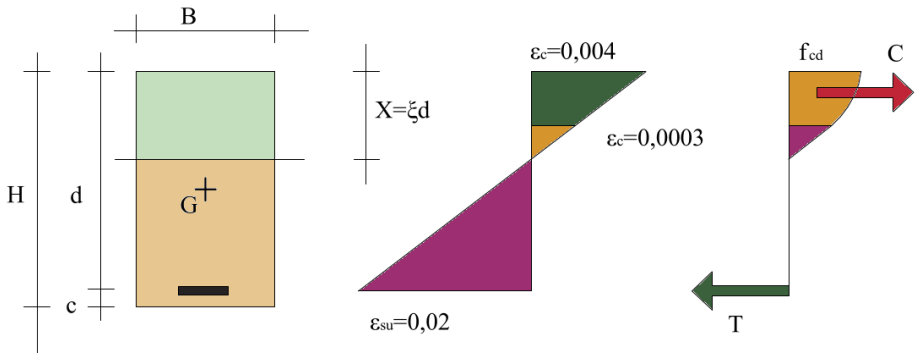
Ricavato ξ *determiniamo* $X = \xi * d$

Il momento di rottura della sezione

$M_{RD} = 0{,}004 * f_{cm} * d^2 (1-\xi)^2/3 + \Psi * B * \xi * d * \sigma c * (\xi d - \lambda_G) + A's * f_{yd} * d * (\xi - 0{,}05) + 1{,}20 * f_{yd} * As * d(1-\xi)$

Progetto di una sezione rettangolare per rottura bilanciata

-Semplice armatura



La profondità dell'asse neutro $0{,}02/(d-x) = 0{,}0004/x$ $x = 0{,}25 * d$

La risultante degli sforzi di compressione

$C = [0{,}006 * f_{cm} * Bd + 0{,}0578 * f_{cd} * Bd)/4$ *Il momento* $M = Cd^*$

Il braccio della coppia interna $d^* = (0{,}25d - 4/7 * 0{,}25 * d) + 0{,}75d = 0{,}856\ d$

$M = 0{,}15 * d^2 * b * (0{,}006 * f_{cm} + 0{,}0578 * f_{cd})$ *la altezza* $d = r^* \sqrt{M/b}$

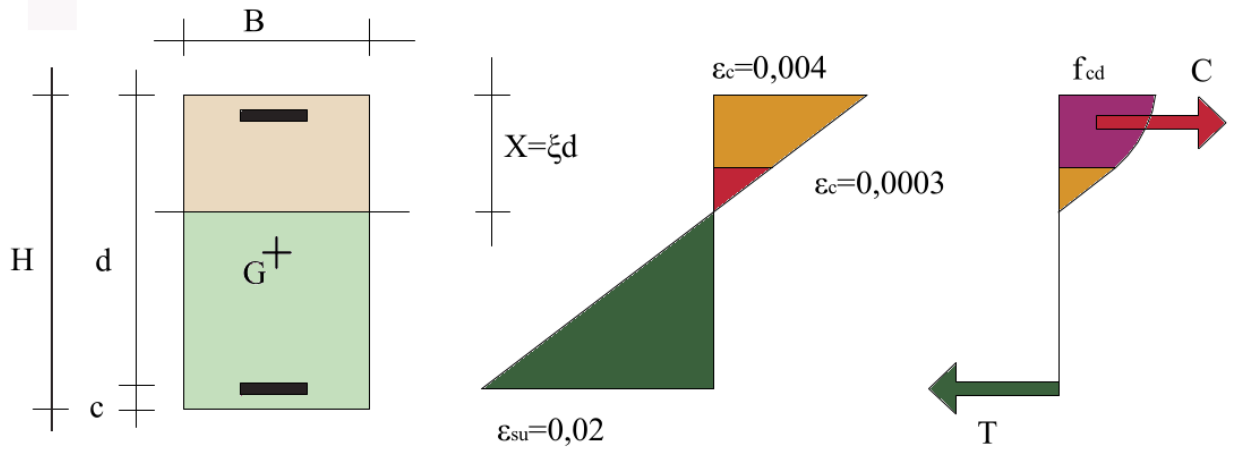
La armatura metallica $M = A_S * 1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d$; $A_S = M/(1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d)$

$r = 1/[0{,}15(0{,}006 * f_{cm} + 0{,}0578 * f_{cd})]^{1/2}$

Il coefficiente r lo possiamo tabellare in funzione di Rck classe del cls

Classe cls	f_{cd}	f_{cm}	$r=1/[0{,}0009*f_{cm}+0{,}00867*f_{cd})]^{1/2}$
35			
40			
45			
50			
55			
60			

Doppia armatura



Per il progetto della sezione a doppia armatura $M = Mo + \Delta M$

$\Delta M = (\sigma_s * A'_s + 1{,}20 * f_{yd} * \Delta A_s) * 0{,}95d$ *la deformazione nell'acciaio compresso*

$\varepsilon'_s/(0{,}20d) = 0{,}004/(0{,}25d)$; $\varepsilon'_S = 0{,}0032$ $\sigma_s = fyd$

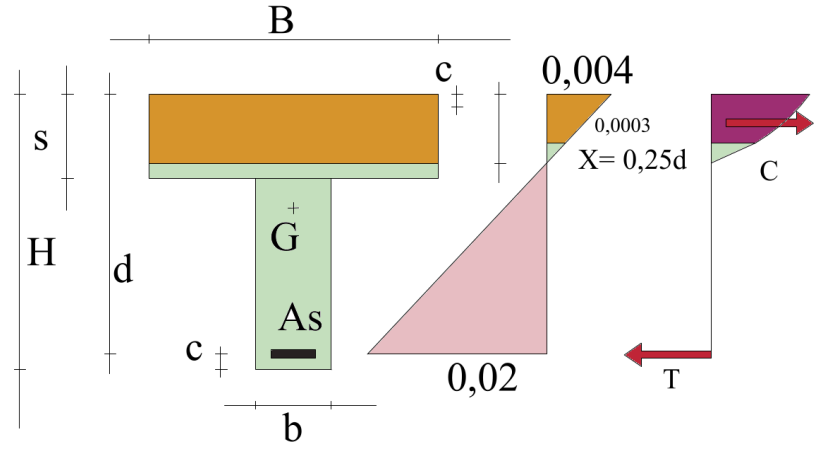
Costante $\sigma'_S = \sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq* $0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$

$\Delta M = f_{yd} * 0{,}95d * A'_s$ $A'_s = \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d)$ $\Delta A_s = 0{,}80 * A'_s$

Le armature superiore A'_s *e inferiore* $0{,}8 * A'_s + A_S$

$A'_s = \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d)$ $A_s = 0{,}80 * \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d) + M/(1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d)$

Progetto di una sezione a T



Le formule di progetto sono analoghe alla sezione rettangolare ipotizzando che l'asse neutro tagli la soletta superiore ipotesi verosimile per H = 100 cm e s = 24 cm ; per le sezioni di travi usuali di edifici 30x50, 30x60, 30x70 ect e solai da 25 cm con soletta collaborante l'ipotesi è sempre soddisfatta. La risultante degli sforzi di compressione

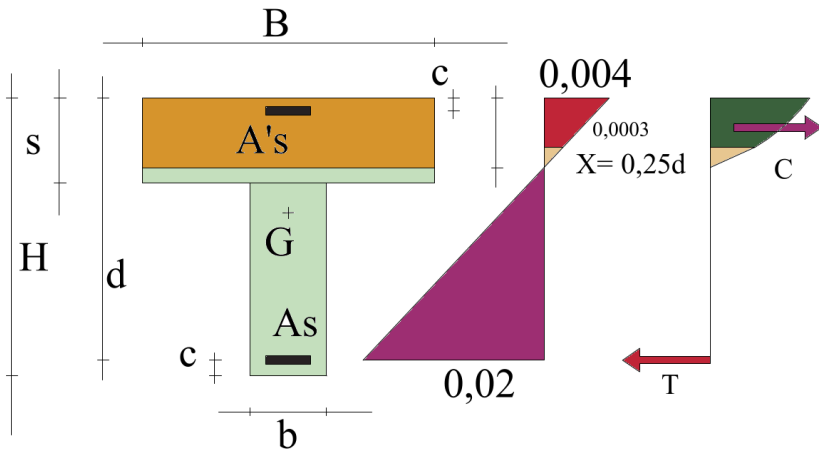
$C = [0{,}006 * f_{cm} * Bd + 0{,}0578 * f_{cd} * Bd)/4$ *Il momento* $M = Cd^*$

Il braccio della coppia interna $d^* = (0{,}25d - 4/7 * 0{,}25 * d) + 0{,}75d = 0{,}856\, d$

$M = 0{,}15 * d^2 * b * (0{,}006 * f_{cm} + 0{,}0578 * f_{cd})$ *la altezza* $d = r^* \sqrt{M/b}$

La armatura metallica $M = A_S * 1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d$; $A_S = M/(1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d)$

$r = 1/[0{,}15(0{,}006 * f_{cm} + 0{,}0578 * f_{cd})]^{1/2}$



Per il progetto della sezione a T con doppia armatura $M = Mo + \Delta M$

$\Delta M = (\sigma_s * A'_s + 1{,}20 * f_{yd} * \Delta A_s) * 0{,}95d$ *la deformazione nell'acciaio compresso*

$\varepsilon'_s/(0{,}20d) = 0{,}004/(0{,}25d)$; $\varepsilon'_S = 0{,}0032$ $\sigma_s = fyd$

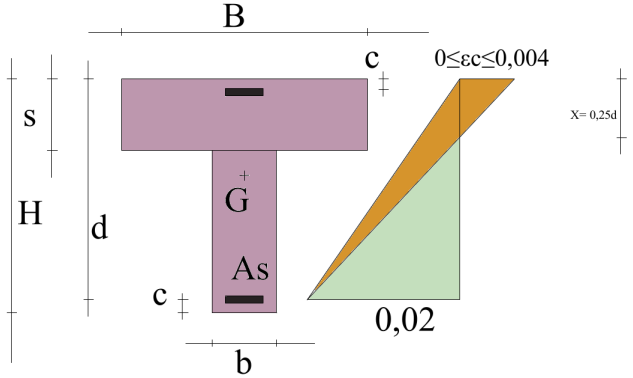
Costante $\sigma'_S = \sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq* $0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$

$\Delta M = f_{yd} * 0{,}95d * A'_s$ $A'_s = \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d)$ $\Delta A_s = 0{,}80 * A'_s$

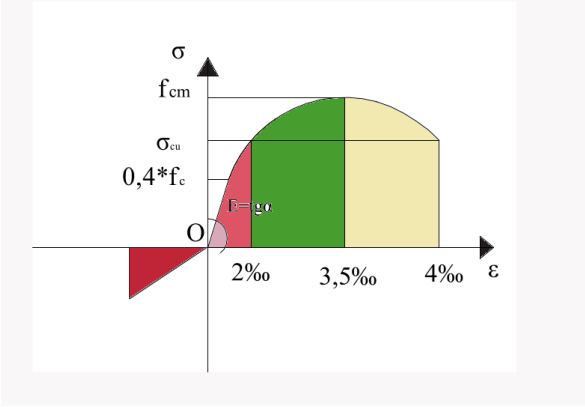
Le armature superiore A'_s *e inferiore* $0{,}8 * A'_s + A_S$

$A'_s = \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d)$ $A_s = 0{,}80 * \Delta M / (f_{yd} * 0{,}95d) + M/(1{,}20 * f_{yd} * 0{,}856d)$

Calcolo del momento di rottura *per sezione a T nella II regione*



Nella II regione la rottura la si consegue per raggiungimento della max deformazione nell'acciaio teso $\varepsilon_S = 0,02$, e la deformazione nel bordo compresso $0 \leq \varepsilon_C \leq 0,004$. Il diagramma tensioni deformazioni nel cls riportato in figura

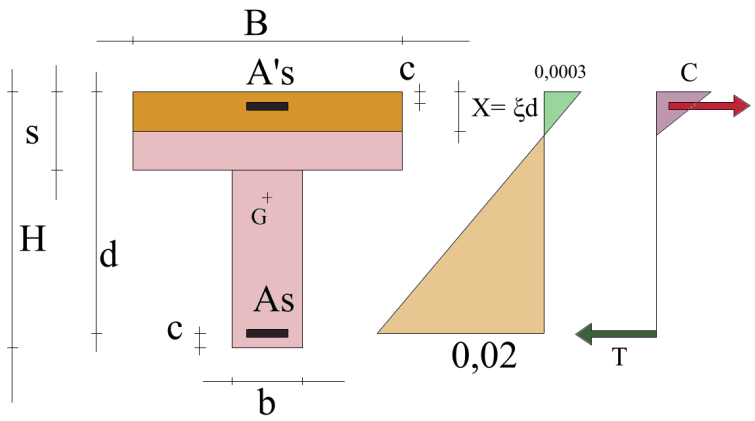


Individua 3 fasi di verifica della sezione corrispondenti a 3 tentativi :

- *Fase elastica lineare*
- *Fase elastica*
- *Fase plastica*

La ipotesi è che nella II regione per flessione semplice $s \leq 0,25d$, ovvero l'asse neutro taglia soletta.

1-Fase elastica lineare cls $\varepsilon_C \leq 0,0003$ *e* $\varepsilon_S = 0,02$



La verifica ed il calcolo del momento ultimo di rottura è semplice

$$1/2*B*\xi*d*\sigma c + A's* Es*\varepsilon'_S - 1,20*f_{yd}*As=0$$

La deformazione nell'acciaio compresso $\varepsilon'_S =0,02(\xi*d-0,05d)/(d-\xi*d)$

$\varepsilon'_S =0,02(\xi-0,05)/(1-\xi)$ $c= 0,05d$ *copriferro*

La deformazione nel cls compresso al bordo $\varepsilon_c =0,02*\xi/(1-\xi)$

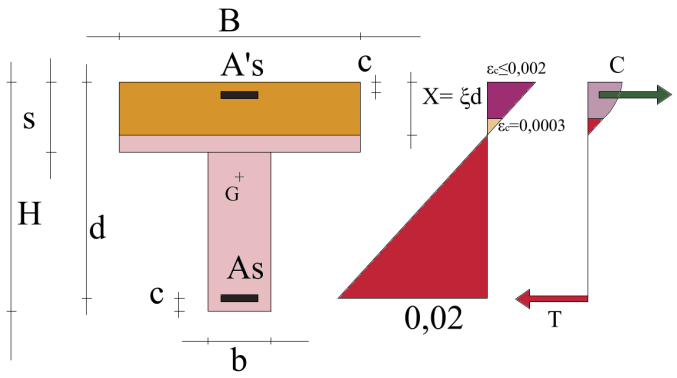
$$\sigma_c = E_C*\varepsilon_c$$

$1/2*B*\xi*d*E_C*0,02*\xi/(1-\xi) + A's* Es*0,02(\xi-0,05)/(1-\xi) - 1,20*f_{yd}*As=0$

Da questa equazione ricaviamo prima ξ *e poi* $x = \xi*d$
Il momento di rottura della sezione

$M_{RD}=1/3*B(\xi*d)^2*E_C*0,02*\xi/(1-\xi)+[A's*Es*0,02(\xi-0,05)/(1-\xi) -1,20*f_{yd}*As]*(H/2-c)$

2-Fase elastica cls $0,0003 \leq \varepsilon_C \leq 0,002$ *e* $\varepsilon_S = 0,02$



La verifica ed il calcolo del momento ultimo di rottura è semplice

$0,002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B + \Psi*B*\xi*d*\sigma c + A's*Es*\varepsilon'_S - 1,20*f_{yd}*As=0$

Le deformazioni $\varepsilon'_S = 0,02(\xi-0,05)/(1-\xi)$; $\varepsilon_c = 0,02*\xi/(1-\xi)$
Il coefficiente Ψ *è il rapporto tra l'area del diagramma delle tensioni e il rettangolo di lati* $(\xi d-m)$ *e* σc; *la tensione nel cls al bordo compresso*

$\sigma_C=-16622026177,93*\varepsilon_C^3+87242582,02*\varepsilon_C^2-58038,76*\varepsilon_C+93,68$
$\sigma_C=-16622026178*[0,02*\xi/(1-\xi)]^3+87242582*[0,02*\xi/(1-\xi)]^2-58038*[0,02*\xi/(1-\xi)]+93,68$
$\varepsilon_c/\xi d = 0,0003/m$ $\quad m = 0,0003*\xi d/\varepsilon_c = 0,015*d\,(1-\xi)$

$\sigma \leq 0,4*f_{cm}/1,5$ $\quad \varepsilon_C = 0,0002817$ $\quad f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

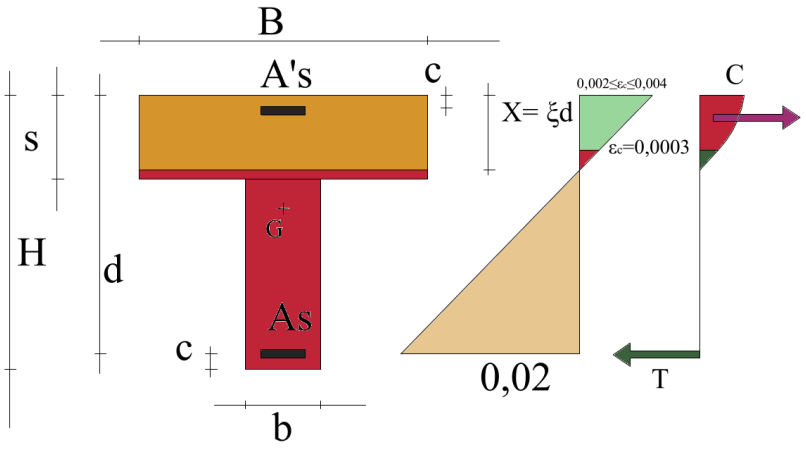
La equazione di equilibrio alla traslazione

$0,002*f_{cm}*d(1-\xi)*B+0,25*(0,985*\xi-0,015)*B*\xi d*\sigma c+A's*Es*\varepsilon'_S -1,20*f_{yd}*As=0$

La incognita di questa equazione è ξ *con* $\varepsilon'_S = 0,02(\xi-0,05)/(1-\xi)$
Il momento di rottura ultimo a flessione
$M_{RD}=0,004*f_{cm}*B*d(1-\xi)/3+0,25*(0,985*\xi-0,015)B*\xi d*\sigma c*(\xi d-\lambda)$
$+ A'_s*E_s*\varepsilon'_S*d(\xi-0,05)+1,20*f_{yd}*As*d(1-\xi)$

Le funzioni $\Psi(\xi)=[0,985*\xi-0,015]/4$ *e* $\lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi-0,015*d\,(1-\xi)]$ *sono note*

3-Fase plastica cls $0{,}002 \le \varepsilon_C \le 0{,}004$ *e* $\varepsilon_S = 0{,}02$



Le deformazioni $\varepsilon'_S = 0{,}02(\xi - 0{,}05)/(1-\xi)$; $\varepsilon_c = 0{,}02*\xi/(1-\xi)$

La equazione di equilibrio alla traslazione

$0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B + \Psi*B*\xi*d*\sigma c + A's*\sigma'_S - 1{,}20*f_{yd}*As = 0$

Le funzioni $\Psi = \Psi(\xi)$ *e* $\lambda = \lambda(\xi)$ *restano invariate , è opportuno determinare la* σ'_S

In funzione di ε'_S *che è inferiore a* $\varepsilon_C = 0{,}004$

Costante $\sigma'_S = \sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq* $0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$

$0{,}002*f_{cm}*d\,(1-\xi)*B + \Psi*B*\xi*d*\sigma c + A's*f_{yd} - 1{,}20*f_{yd}*As = 0$

La tensione al bordo compresso

$\sigma_C = -16622026178*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^3 + 87242582*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^2 - 58038*[0{,}02*\xi/(1-\xi)] + 93{,}68$

Ricavato ξ *determiniamo* $X = \xi * d$

Il momento di rottura della sezione

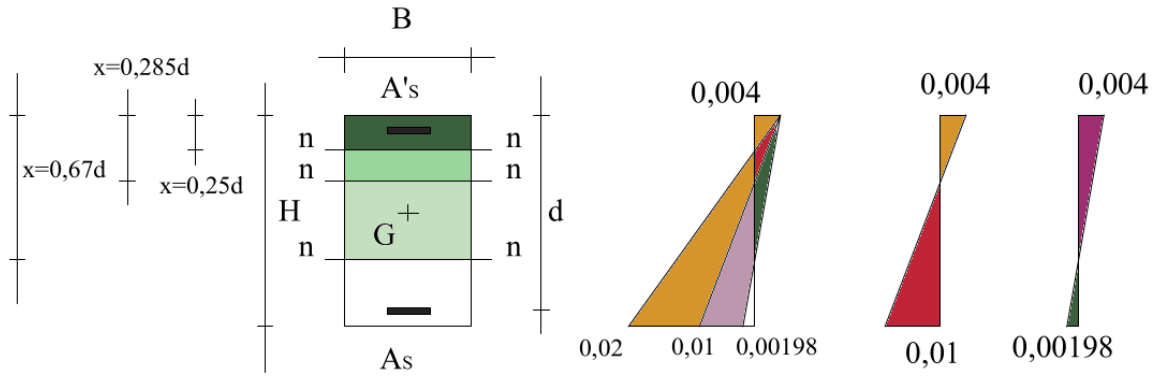
$M_{RD} = 0{,}004*f_{cm}*d^2(1-\xi)^2/3 + \Psi*B*\xi*d*\sigma c*(\xi d - \lambda_G) + A's*f_{yd}*d*(\xi - 0{,}05) + 1{,}20*f_{yd}*As*d(1-\xi)$

Verifica a pressoflessione III Regione $\varepsilon_C = 0{,}004$ *e* $0{,}00198 \le \varepsilon_S \le 0{,}02$

La rottura avviene nel cls per raggiungimento max deformazione $\varepsilon_C = 0{,}004$ *mentre l'acciaio è in fase plastica ; all'interno di questa regione possiamo definire 2 subregioni :* $0{,}00198 \le \varepsilon_S \le 0{,}01$ *e* $0{,}01 \le \varepsilon_S \le 0{,}02$

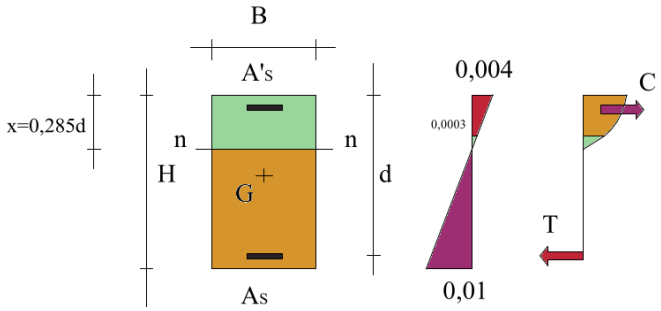
$0{,}004/\xi*d = 0{,}01/(d*(1-\xi))$; $0{,}004 = 0{,}014*\xi$ $\xi = 0{,}285$

$0{,}004/\xi*d = 0{,}00198/(d*(1-\xi))$; $0{,}004 = 0{,}00598*\xi$ $\xi = 0{,}67$



Progetto a pressoflessione sezione rettangolare

Il progetto di una sezione rettangolare consiste nella determinazione della altezza e delle armature metalliche simmetriche $A_S=A'_S$ assegnata la base b della sezione le sollecitazioni P e M; il progetto lo si esegue per X = 0,285d ovvero per rottura nel cls con max deformazione pari a $\varepsilon_C = 0,004$



La deformazione nell'acciaio sia teso che compresso è compresa nel tratto orizzontale del diagramma $0,00198 \le \varepsilon_S \le 0,01$ *ovvero* $\sigma_S = f_{yd}$

Alla deformazione del cls pari $\varepsilon_C = 0,0003$ *corrisponde un altezza m*

$0,0003/m = 0,004/0,285d \quad m = 0,021d$

L'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

$$P = B*0,021d*0,4*f_{cm}/3 + \Psi*B*0,285*d*fcd$$

La altezza $d=P/[B*0,021*0,4*f_{cm}/3+\Psi*B*0,285*fcd]$

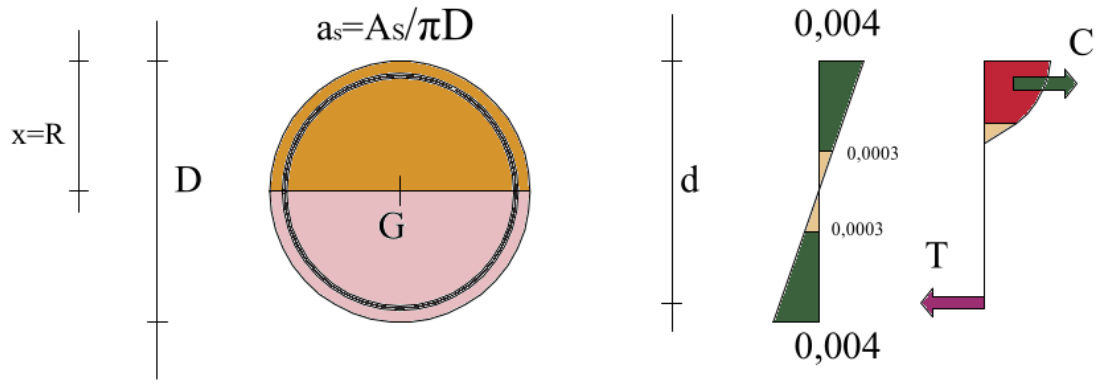
Alle armature metalliche $A_S = A'_S$ *affidiamo il momento flettente M*

$A_S = A'_S = M/(d-c) = M/0,235d$

Progetto a pressoflessione di una sezione circolare .

Il progetto consiste nella determinazione del diametro D e della armatura linearizzata, per x = R con rottura del cls compresso in modo che il diagramma delle deforma-

zioni sia simmetrico e che la risultante delle trazioni e compressioni nelle armature si la stessa



$0,0003/m = 0,004/R \quad m = 0,075R$

La equazione alla traslazione delle tensioni normali

$P = \Psi_1 * B * 0,021d * 0,4 * f_{cm}/1,5 + \Psi_2 * B * 0,285 * d * fcd \qquad \alpha = \arccos(m/R) = 85°,69$

I coefficienti $\qquad x = R*\sin\alpha \qquad dx = -R*\cos\alpha*d\alpha$

$\Psi_1 = 2*\int\sigma dxdy / \int dxdy \quad$ *estremi* $0 \le y \le m; \qquad 85°,69 \le \alpha \le 90° \quad \sigma = E*\varepsilon$
$\Psi_2 = 2*\int\sigma dxdy / \int dxdy \quad$ *estremi* $R-m \le y \le R; \qquad 0 \le \alpha \le 85°,69$;
$\Psi_1 = 2*\int\sigma dxdy / \int dxdy \qquad \sigma = E_C*\varepsilon_C$ *lineare* $\qquad \varepsilon_C(y) = 0,004 * y/R$
$\Psi_2 = 2*\int\sigma dxdy / \int dxdy \quad \sigma(\varepsilon) = -16622026177,93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582,02*\varepsilon_C{}^2 - 58038,76\,a*\varepsilon_C + 93,68$

La origine del sistema di riferimento cartesiano è nel centro del cerchio

La altezza $\qquad d = P/[\Psi_1 * B * 0,021 * 0,4 * f_{cm}/1,5 + \Psi_2 * B * 0,285 * fcd\ ]$

Per il progetto della armatura $\qquad M = 2\int a_s * y * \sigma_S * dL$

È un integrale curvilineo da dividere in 2 integrali in funzione della tensione definita dal diagramma $\qquad \varepsilon_S(y) = 0,004 * y/R$

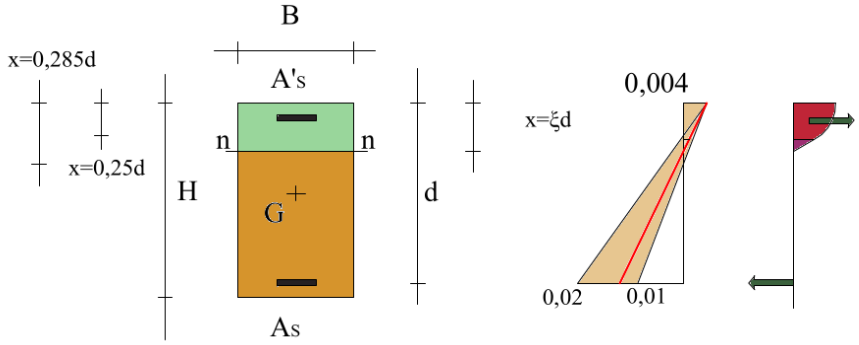
Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$	$E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0,00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*		$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$		$0,01 \le \varepsilon \le 0,02$

$M = 2*a_s * [\int y*E*0,004*y/R\ dL + fyd * \int y*dL]$
$As = \pi*R*2a_s = M / [\int y*E*0,004*y/R\ dL + fyd * \int y*dL]$

È stata calcolata la area di ferro a_s *su una semicirconferenza.*

Verifica a pressoflessione sezione rettangolare *nella III regione*

Sub-Regione A $0{,}01 \leq \varepsilon_S \leq 0{,}02$



La equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale

$B*[m*0{,}4f_{cm}/3 + \Psi(\xi)(\xi d-m)*fcd]+A'_s*f_{yd} - A_S*f_{yd}] = P$

La deformazione nell'acciaio $\varepsilon_S = 0{,}004*d(1-\xi)/\xi d = 0{,}004*(1-\xi)/\xi$

$0{,}0003/m = 0{,}004/\xi d \qquad m = 0{,}075\xi d \qquad \sigma_S = -790000*\varepsilon^2+31600*\varepsilon+154$

$B*[0{,}075\xi d*0{,}4f_{cm}/3 + \Psi(\xi)(\xi d-0{,}075\xi d)*fcd]+A'_s*f_{yd} - A_S*f_{yd}] = P$

$B*[0{,}01\xi d*f_{cm}+\Psi(\xi)*0{,}925*\xi d*fcd]+A'_s*f_{yd}-A_S*f_{yd}]=P$

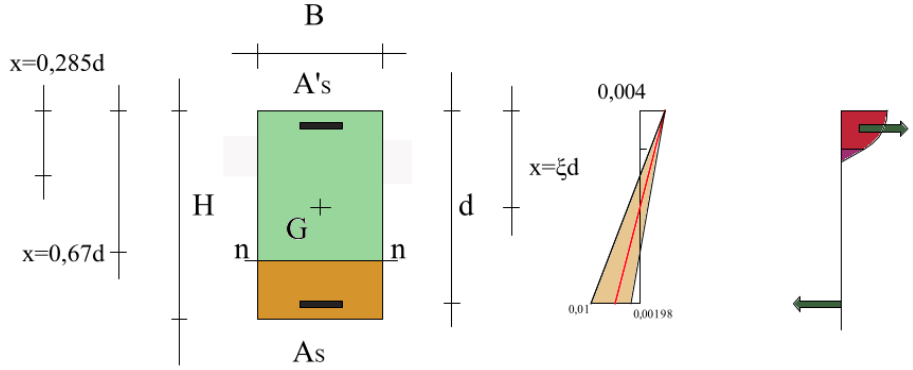
$\Psi(\xi)=[0{,}985*\xi-0{,}015]/4 \quad e \quad \lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi-0{,}015*d\,(1-\xi)]$

In questa equazione la incognita è $\xi \leq 0{,}285$ *che troviamo facilmente con un software di analisi matematica free ;Il momento di rottura della sezione*

$M_{RD}=B*(\xi d)^2*0{,}0005f_{cm}+B*\Psi(\xi)*0{,}925*\xi d*fcd(\xi d-\lambda(\xi))$

$+A'_s*f_{yd}\ d*(\xi-0{,}05)+ A_S*f_{yd}\ *d(0{,}95-\xi)$

Sub-Regione B $0{,}00198 \leq \varepsilon_S \leq 0{,}01$



$B*[0,01\xi d*f_{cm}+\Psi(\xi)*0,925*\xi d*fcd]+A'_s*f_{yd}-A_S*(-790000*\varepsilon^2+31600*\varepsilon+154)]=P$

La deformazione nell'acciaio teso $\varepsilon_S = 0,004*(1-\xi)/\xi$

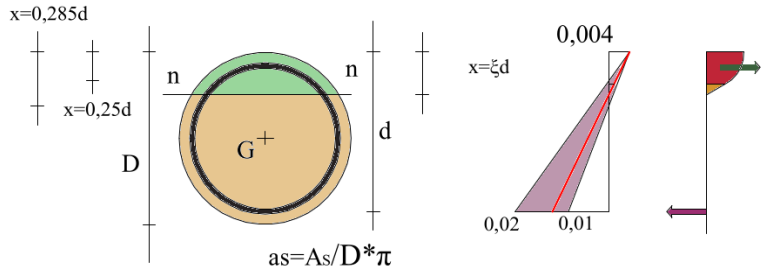
$\Psi(\xi)=[0,985*\xi-0,015]/4$ *e* $\lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi-0,015*d\,(1-\xi)]$

Nota la incognita ξ *ricaviamo* M_{RD}

$M_{RD}=B*(\xi d)^2*0,0005f_{cm}+B*\Psi(\xi)*0,925*\xi d*fcd(\xi d-\lambda(\xi))$

$+A'_s*f_{yd}\ d*(\xi-0,05)+A_S*(-790000*\varepsilon^2+31600*\varepsilon+154)*d(0,95-\xi)$

Verifica a pressoflessione sezione circolare *nella III regione*
Sub-Regione A $0,01\leq\varepsilon_S\leq0,02$



La equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale delle tensioni normali

Area segmento circolare $A = 0,67*c*f$ $f=\xi d$; *La corda* $c=\sin\alpha*f/(1-\cos\alpha)$

$c=\sin\alpha*0,2593d/(1-\cos\alpha)$

L'angolo α $0,95*D/2-\xi*(0,95)*D=D/2*\cos\alpha$;

$\cos\alpha=0,95*(1-2\xi)$ $\alpha=\arccos[0,95*(1-2\xi)]$

$\Psi(\xi)*f_{cd}*0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(\xi d)^2+a'_s*\int\sigma'_S*dL-a_s*\int\sigma_S*dL=P$

Al solito $\Psi(\xi)=\int\sigma dxdy/(f_{cd}*0,67*c*f)$ *gli estremi di integrazione*

Gli integrali vanno separati in funzione del legame tensione deformazione

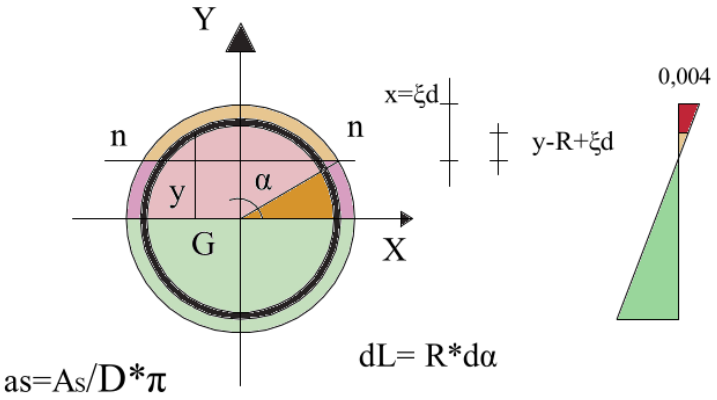
I coefficienti $x=R*\cos\alpha$ $dx=-R*\sin\alpha*d\alpha$ $0,0003/m=0,004/\xi d$

$m=0,075\xi d$ $y=R-0,925\xi d$; $y=R*\cos\alpha=R-0,925\xi d$; $\alpha=\arccos(1-0,925*\xi d/R)$

estremi $0\leq y\leq0,075\xi d$; $\arccos(1-0,925*\xi d/R)\leq\alpha\leq90°$ $\sigma=E*\varepsilon$

estremi $R-0,075\xi d\leq y\leq R$; $0\leq\alpha\leq\arccos(1-0,925*\xi d/R)$

La legge di variazione della $\varepsilon_S(y) = (Y-R+\xi d)*0{,}004/\xi d$



$\Psi(\xi)*f_{cd}*0{,}67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(\xi d)^2 + a'_s*\int\sigma'_S*dL - a_s*\int\sigma_S*dL = P$

Lineare $\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq* $0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$

Costante $\sigma = fyd = 391$ *N/mmq* $0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$

Quadratica $\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$ $0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

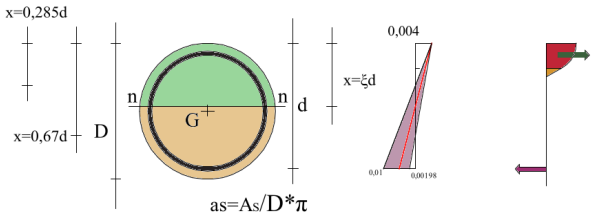
Questa equazione possiamo risolverla attraverso un software di analisi matematica, nota la profondità dell'asse neutro $x=\xi d$ *, determiniamo il momento ultimo della sezione*

$M_{RD} = \Psi(\xi)*f_{cd}*0{,}67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(\xi d)^2*(\xi d-\lambda_G) + +a'_s*\int\sigma'_S*y*dL + a_s*\int\sigma_S*y*dL$

λ_G *distanza della risultante delle tensioni di compressioni dal bordo compresso*

$\lambda_G(\xi) = \int\sigma*ydxdy/(f_{cd}*0{,}67*c*f)$

Sub-Regione B $0{,}00198 \le \varepsilon_S \le 0{,}01$



Il procedimento è analogo

$\Psi(\xi)*f_{cd}*0{,}67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(\xi d)^2 + a'_s*\int\sigma'_S*dL - a_s*\int\sigma_S*dL = P$

Al solito $\Psi(\xi) = \int\sigma dxdy/(f_{cd}*0{,}67*c*f)$

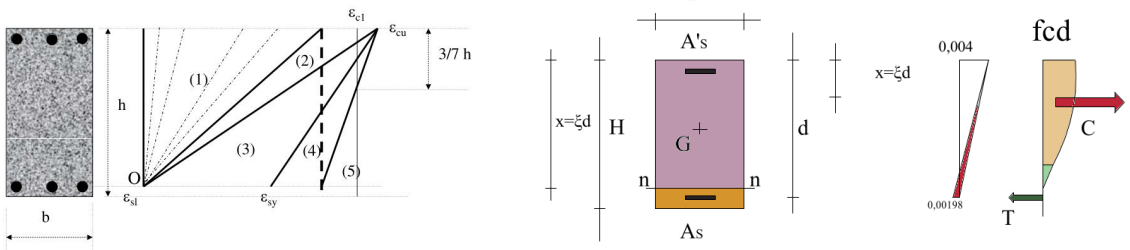
$M_{RD} = \Psi(\xi)*f_{cd}*0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(\xi d)^2 *(\xi d-\lambda_G) + a'_s*\int\sigma'_S *y*dL - a_s*\int\sigma_S *y*dL$

λ_G *distanza della risultante delle tensioni di compressioni dal bordo compresso*

$\lambda_G(\xi) = \int\sigma*ydxdy /(f_{cd}*0,67*c*f)$

Verifica a pressoflessione nella IV regione
Sezione rettangolare

$0,00198 \leq \varepsilon_S \leq 0,01 \qquad 0,67*d \leq x \leq d$



Il tratto di cls in fase elastica $m/0,0003 = 0,004/\xi d$; $m = 0,075*\xi d$

La solita equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali:

$B*0,4*f_{cm}/1,5*m/2+\Psi(\xi)*B*f_{cd}*\xi d + A'_s*f_{yd} - A_S*\sigma_S \; A_S = P$

La deformazione nell'acciaio teso $\varepsilon_S/(d-\xi d) = 0,004/\xi d \qquad \varepsilon_S = 0,004*(d-\xi d)/\xi d$

L'acciaio è fase elastica lineare $\sigma_S = E_S*\varepsilon_S$

$B*0,4*f_{cm}/1,5*0,075*\xi d /2+\Psi(\xi)*B*f_{cd}*\xi d + A'_s*f_{yd} - A_S*E_S*\varepsilon_S = P$
$B*0,01*f_{cm}*\xi d +\Psi(\xi)*B*f_{cd}*\xi d + A'_s*f_{yd} - A_S*E_S*0,004*(d-\xi d)/\xi d = P$

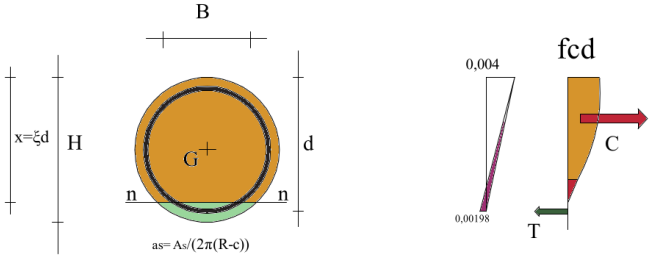
Il momento di rottura della sezione

$M_{RD} = B*0,02*f_{cm}*(\xi d)^2 /3 +\Psi(\xi)*B*f_{cd}*\xi d *(\xi d -\lambda_G)+ A'_s*f_{yd} *(H/2-c)$

$+ A_S*E_S*0,004*(d-\xi d)/\xi d *(H/2-c)$

$\Psi(\xi)=[0,985*\xi-0,015]/4 \quad e \quad \lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi -0,015*d\,(1-\xi)]$

Sezione circolare



L'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali di compressioni nel cls

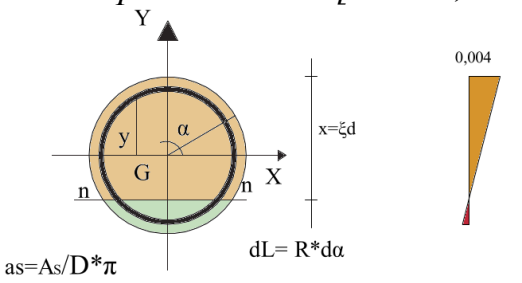
$\Psi(\xi)*f_{cd}*[\pi R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]+a'_s*\int\sigma'_s*dL-a_S*\int\sigma_s*dL=P$

$\Psi(\xi)*f_{cd}*[\pi R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]+a'_s*\int\sigma'_s*dL-a_S*\int\sigma_s*dL=P$

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon \quad E = 206000\ N/mmq$	$0 \le \varepsilon \le 0,00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391\ N/mmq$	$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0,01 \le \varepsilon \le 0,02$

La legge di variazione della $\varepsilon_S(y)= Y*0,004/\xi d$

Area compressa $[\pi*R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]$



I coefficienti $x=R*\cos\alpha \qquad dx =-R*\sin\alpha*d\alpha$

$0,0003/m= 0,004/\xi d \qquad m=0,075\xi d \qquad m=R*\sin\alpha\ ;\quad \alpha=\arcsin(0,075\xi d/R)$

estremi $\xi d-R \le y \le 0,925\xi d-R\ ; \qquad \arcsin(0,075\xi d/R) \le \alpha \le 90° \qquad \sigma= E*\varepsilon$

estremi $0,925\xi d-R \le y \le R; \qquad 0 \le \alpha \le \arcsin(0,075\xi d/R)$

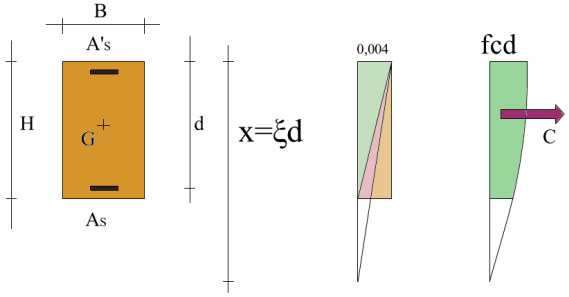
$M_{RD}=\Psi(\xi)*f_{cd}*[\pi*R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]*[\xi d-\lambda(\xi)]+a'_s*\int\sigma'_s*y*dL+$

$+a_S*\int\sigma_s*y*dL$ *Dove*

$\Psi(\xi)=\int\sigma dxdy\ /\{f_{cd}*[\pi*R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]\}$

$\lambda(\xi)=\int\sigma*y*dxdy\ /\{f_{cd}*[\pi*R^2-0,67*\sin\alpha/(1-\cos\alpha)*(R-\xi d)^2]\}$

Verifica a compressione semplice e pressoflessione V regione



La verifica a compressione semplice è immediata $P_{RD} \geq P_{SD}$

$P_{RD} = B*H*f_{cd} + A_S*f_{yd} + A's*f_{yd}$ *con acciaio snervato* $0{,}00189 \leq \varepsilon_S = 0{,}004 \leq 0{,}01$

In presenza di momento flettente M e di pressoflessione con sezione interamente reagente $\xi \geq 1$ *l 'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali*

$\Psi(\xi)*f_{cd}*B*H + A'_s*f_{yd} + A_S*\sigma_S = P$

La tensione nella armatura compressa A_S *è funzione della deformazione* ε_S

$\varepsilon_S/(\xi d - d) = 0{,}004/\xi d$; $\varepsilon_S = 0{,}004(\xi d - d)/\xi d$

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \leq \varepsilon \leq 0{,}00189$
Costante	$\sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \leq \varepsilon \leq 0{,}02$

Il legame tensione deformazione nel cls $\varepsilon_C = 0{,}004(\xi d - d)/\xi d$

$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2 - 58038{,}76\ a*\varepsilon_C + 93{,}68$

$\sigma = E_T*\varepsilon_{CT}$ $\sigma \leq f_{ctd} = 3{,}2N/mmq$ $E_T = 10600$ *N/mmq*

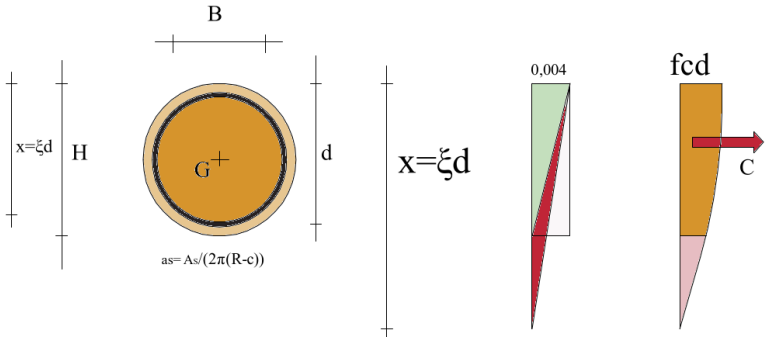
I coefficienti $\Psi(\xi)$; $\lambda_G(\xi)$ *possono essere tabellati in funzione di* ξ

$\Psi(\xi) = B*\int\sigma dy/(B*H*f_{cd}) = \int\sigma dy/(H*f_{cd})$; $\lambda_G(\xi) = \int\sigma*y dy/(H*f_{cd})$

La equazione di equilibrio alla rotazione intorno al baricentro

$M_{RD} = \Psi(\xi)*f_{cd}*B*H*(H/2 - \lambda_G(\xi)) + A'_s*f_{yd}*(H/2 - c) - A_S*\sigma_S*(H/2 - c)$

Per la sezione circolare ***pressoinflessa***



Per compressione centrata $P_{RD} = \pi R^2*f_{cd} + A_S*f_{yd} + A's*f_{yd} \geq P_{SD}$

Per sezione pressoinflessa l'equilibrio alla traslazione delle tensioni normali di compressioni nel cls

$\Psi(\xi)*f_{cd}*\pi R^2+2*[a'_s*\int\sigma'_s*dL+a_S*\int\sigma_s*dL]=P$

$\Psi(\xi)*f_{cd}*\pi R^2+2*[a'_s*\int\sigma'_s*dL+a_S*\int\sigma_s*dL]=P$

$dL=R*d\alpha$; integrazione da $2/3\pi \le \alpha \le \pi/2$

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ N/mmq	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ N/mmq	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

La legge di variazione della deformazione per il principio di conservazione delle sezioni piane e la linerarità

Acciaio	$\varepsilon_S/(\xi d - d)=0{,}004/\xi d$;	$\varepsilon_S=0{,}004(\xi d - d)/\xi d$
Calcestruzzo	$\varepsilon_C/(\xi d - d)=0{,}004/\xi d$;	$\varepsilon_C=0{,}004(\xi d - d)/\xi d$

$\sigma(\varepsilon)=-16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3+87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2-58038{,}76\ a*\varepsilon_C+93{,}68$

$\sigma=E_T*\varepsilon_{CT}$ $\sigma \le f_{ctd} = 3{,}2$N/mmq $E_T = 10600$ N/mmq

I coefficienti $\Psi(\xi)$;$\lambda_G(\xi)$ possono essere tabellati in funzione di ξ

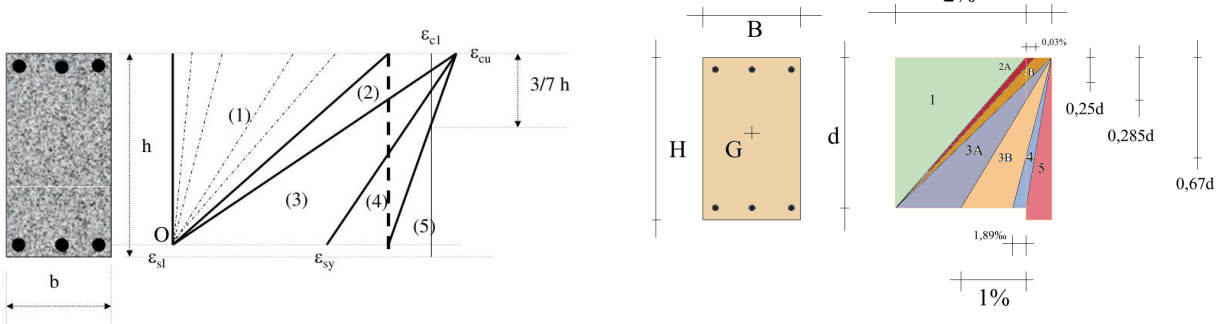
$\Psi(\xi) = \int\sigma dA/(\pi R^2*f_{cd})=\int\sigma dA/(\pi R^2*f_{cd})$; $\lambda_G(\xi)=\int\sigma*y dA/(\pi R^2*f_{cd})$

L'elemento areale infinitesino $dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$

Il momento ultimo della sezione circolare pressoinflessa interamente reagente

$M_{RD}=\Psi(\xi)*f_{cd}*(\pi*R^2)*(\xi d-\lambda(\xi))+2*a'_s*\int\sigma'_s*y*dL+2*a_S*\int\sigma_s*y*dL$

Riportiamo la rappresentazione degli stati limite ultimi con i diagrammi lineari delle deformazioni



SLU

Parabola rettangolo $\varepsilon_{CI}=0{,}35\%$ $\varepsilon_{CY}=0{,}2\%$

Acciaio bilineare $\varepsilon_{SI}=1\%$ $\varepsilon_{SY}=0{,}189\%$

SLU
Lineare e cubico $\varepsilon_{C1}=0,35\%$ $\varepsilon_{CY}=0,2\%$ $\varepsilon_{CE}=0,03\%$
Acciaio $\varepsilon_{C2}=2\%$ $\varepsilon_{SY}=1\%$ $\varepsilon_{SE}=0,189\%$

Le verifiche vano eseguite impostando la equazione di equilibrio alla traslazione utilizzando software di analisi matematica per la risoluzione degli integrali e non attraverso calcoli manuali e tabelle .

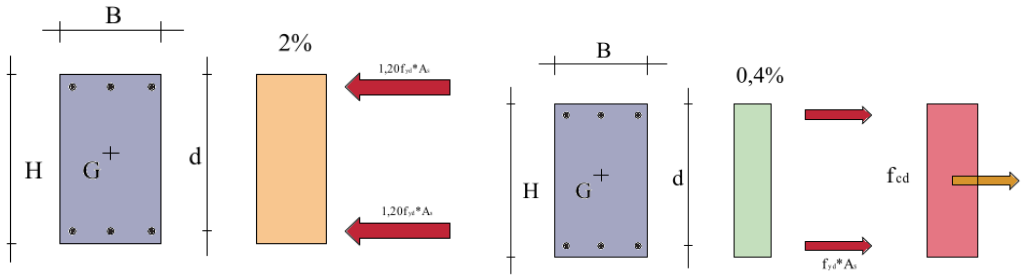
Il dominio di rottura

La costruzione del dominio di rottura la eseguiamo per 3 tipi di sezione sempre nella ipotesi di flessione e pressoflessione retta con sforzo normale P e momento flettente M , utilizzando 7 punti . (Rettangolare ,Circolare , Sezione a T)

- *Trazione*
- *Compressione*
- *Lineare cls*
- *Rottura bilanciata x = 0,25d*
- *Fase plastica acciaio x = 0,285d*
- *Fase di snervamento x = 0,67d*
- *Momento massimo*

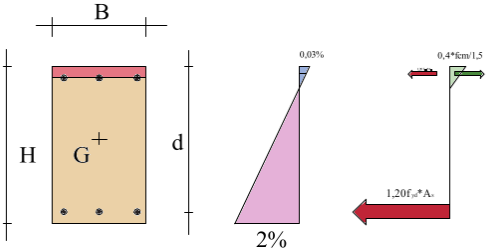
Sezione rettangolare

Punto P_1 e P_2 *asse delle ascisse* P_{RD}
Trazione $P_{RD} = 1,20*f_{yd}*(A's+As)$



Compressione $P_{RD} = f_{yd}*(A's+As) + f_{cd}*B*H$

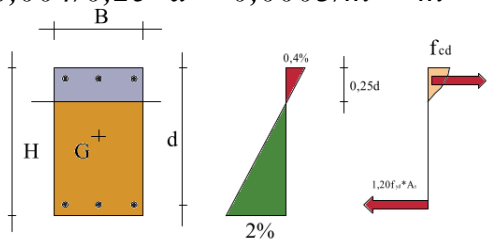
Punto P_3 *fase lineare cls* $\varepsilon_C = 0,0003$; $\varepsilon_S = 0,02$; $0,0003/x = 0,02/(d-x)$
$0,0003*d = 0,0197*x$ $x = 0,01522d = \xi*d$ $0,0003/\xi*d=\varepsilon'_S/(\xi*d - c)$
$\varepsilon'_S = 0,0003*(\xi*d - c)/\xi*d$ $c = 0,05d$ *la armatura è tesa* $\varepsilon'_S=0,000685$



$P_{RD} = 0,4*fcm/1,5*0,01522d *B/2 -1,20*f_{yd}\, As - E_S*0,00685*A's$

$M_{RD} = 0,4*fcm/1,5*(0,01522d)^2*B/3* +1,20*f_{yd}\, As\ (H/2-c)+E_S*0,00685*A's\ (H/2-c)$

Punto P₄ *rottura bilanciata* $\varepsilon_C = 0,004$; $\varepsilon_S = 0,02$; $\varepsilon'_S = 0,0032$
$0,004/0,25*d = 0,0003/m$ $m = 0,1875d$



$P_{RD} = 0,4*fcm/1,5*0,01875d *B/2 + \Psi(\xi)*B*0,25**f_{cd} -1,20*f_{yd}\, As + f_{yd} *A's$

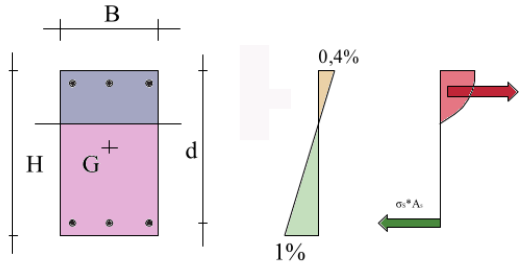
$M_{RD}=0,4*fcm/1,5*(0,01875d)^2*B/3+\Psi(\xi)*B*0,25*f_{cd}\,(0,01522d-\lambda_G(\xi)]+$

$+1,20*f_{yd}\, As\ (H/2-c)+ f_{yd} *A's\ (H/2-c)$

Punto P₅ *rottura bilanciata* $\varepsilon_C = 0,004$; $\varepsilon_S = 0,01$; $X= 0,285d$ $m = 0,02137d$
$P_{RD} = 0,4*fcm/1,5*0,02137d *B/2 + \Psi(\xi)*B*0,25*f_{cd} -\sigma_S*As+ f_{yd}*A's$

$M_{RD}=0,4*fcm/1,5*(0,02137d)^2*B/3+\Psi(\xi)*B*0,25*f_{cd}\,(0,01522d-\lambda_G(\xi)]+$

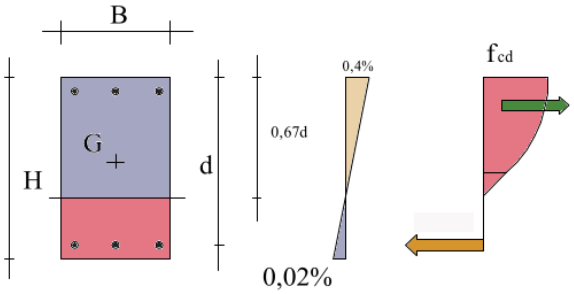
$+\sigma_S*As*(H/2-c)+ f_{yd} *A's\ (H/2-c)$



Punto P₆ $\varepsilon_C = 0,004$; $\varepsilon_S = 0,00198$; $X= 0,67d$ $m=0,05d$
$P_{RD} = 0,4*fcm/1,5*0,05 *B/2 +\Psi(\xi)*B*0,25*f_{cd} - f_{yd*}As+ f_{yd}*A's$

$M_{RD}=0,4*fcm/1,5*(0,05d)^2*B/3+\Psi(\xi)*B*0,25*f_{cd}\,(0,01522d-\lambda_G(\xi)]+$

$+ f_{yd*}As*(H/2-c)+ f_{yd} *A's\ (H/2-c)$



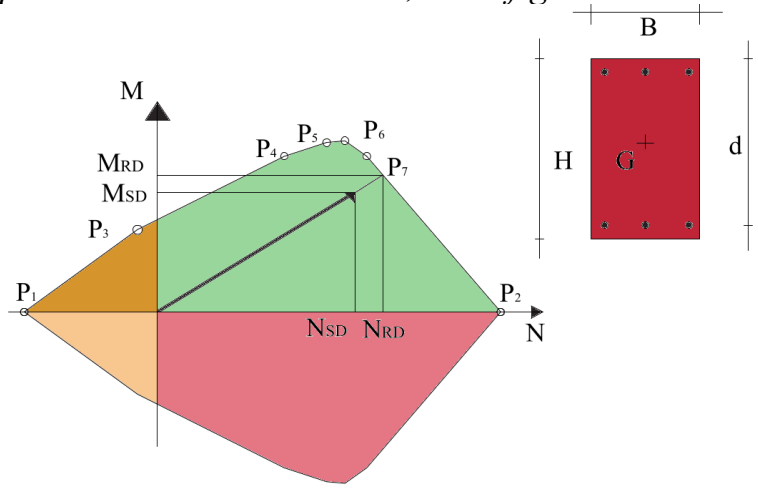
Punto P_7 *max momento*

$P_{RD} = 0,4*fcm/1,5*m\ *B/2 + \Psi(\xi)*B*\xi d*f_{cd} -0,20\, f_{yd}*As*(H/2-c)$

$M_{RD}=0,4*fcm/1,5*m^2*B/2+\Psi(\xi)*B*\xi d*f_{cd}*[\xi d*-\lambda_G(\xi)] +\Delta M_{RD}$

$\Delta M_{RD} = 1,20\, f_{yd}*As*(H/2-c)+ f_{yd}\ *A's\ (H/2-c)$

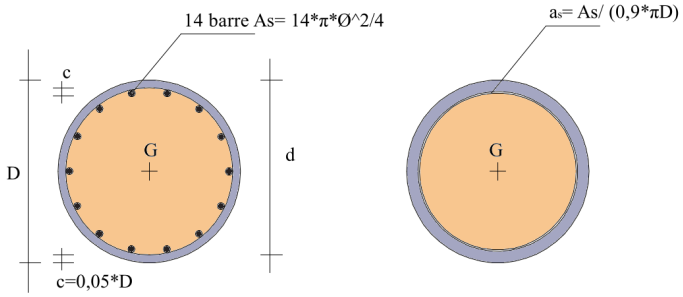
Il dominio di rottura per la sezione rettangolare lo ricaviamo per punti simmetrico rispetto all'asse delle ascisse , nella figura è stato disegnato a maniera a occhio !!



Coefficiente di sicurezza={[(NRD)^2+(MRD)^2]/[(NRD)^2+(MRD)^2]}^(1/2)

Dominio di rottura sezione circolare

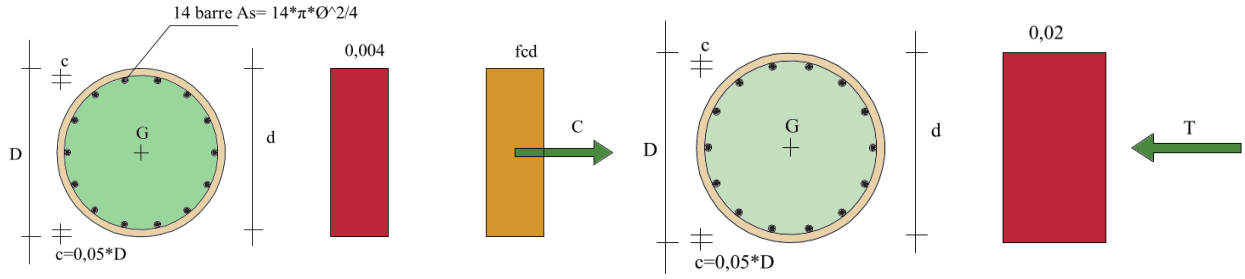
Individuiamo 7 punti per il disegno del dominio
- *Trazione*
- *Compressione*
- *Lineare cls x = 0,01522d*
- *Rottura bilanciata x = 0,25d*
- *Fase plastica acciaio x = 0,285d*
- *Fase di snervamento x = 0,67d*
- *Momento massimo x = R*



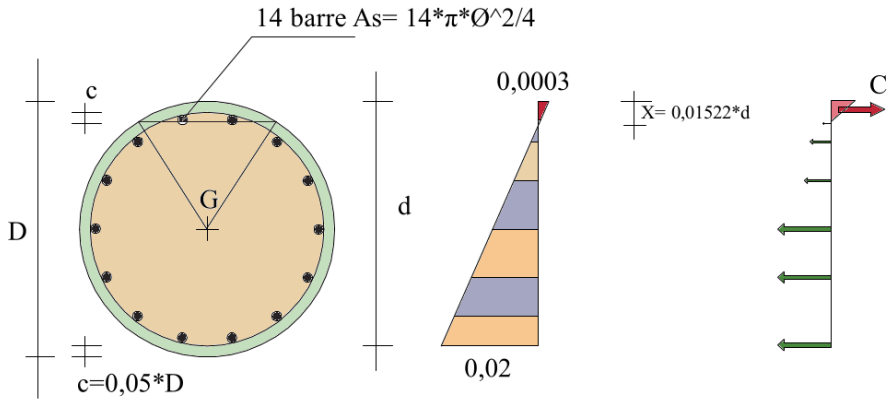
Trazione e Compressione P_1 e P_2

Trazione $P_{RD} = 1,20*f_{yd}\ *(A's+As)$

Compressione $P_{RD} = 1,20*f_{yd}\ *(A's+As)\ +fcd*\pi*R^2$



- Lineare cls x = 0,01522d punto $\boldsymbol{P_3}$



*Area segmento circolare A = 0,67*c*f la corda c=2*R*sinα*
*Freccia = R-R*cosα = ξ*d ; cosα=(R-ξ*d)/R] α=arcos [(R-ξ*d)/R]*
*Freccia f = ξ*d = 0,01522d d = (D-c) = 0,95*D copriferro c= 5%H =5%D*
*α=arcos [(R-ξ*d)/R] =13°,81 d = 1,90*R c = 1,05*d*sinα = 0,25d*

Lo sforzo Normale P_{RD}

$P_{RD}= \Psi*0,4fcm/1,5*0,67*0,25*d*0,01522d - \sum A_{SI}*\sigma_{SI}= 0,0004*fcm*d^2 -\sum A_{SI}*\sigma_{SI}$

Le tensioni nell'acciaio teso

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0,00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 +31600*\varepsilon +154$	$0,01 \le \varepsilon \le 0,02$

La deformazione $\varepsilon(y)=0,02(R-0,01522d -y)/(0,98478d)=0,02*(0,511d-y)/(0,98478d)$

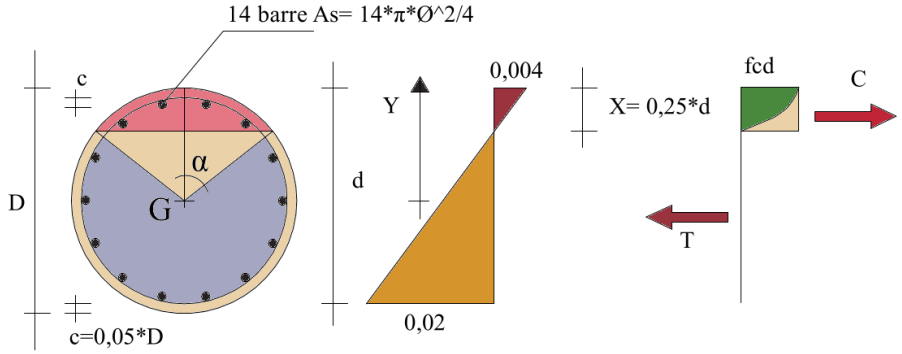
$\varepsilon(y)=0,02*(0,511d-y)/(0,98478d)$; $\Psi_1(\xi)= \int\sigma dA/(f_{cd}*A_{SG})$ $\sigma= E_C*\varepsilon(y)$

Il momento ultimo di rottura M_{RD}

$M_{RD}=\Psi_1(\xi)*0,0004*fcm*d^2 *0,01522d*2/3 -\sum A_{SI}*\sigma_{SI} *Y_I^2$

Il punto P_3 *ha coordinate* P_{RD} *di trazione e* M_{RD}

- Rottura bilanciata x = 0,25d



*Area segmento circolare A = 0,67*c*f la corda c=2*R*sinα*
*Freccia = R-R*cosα = ξ*d ; cosα=(R-ξ*d)/R] α=arcos [(R-ξ*d)/R]*
*Freccia f = ξ*d = 0,25d d = (D-c) = 0,95*D copriferro c= 5%H =5%D*
*α=arcos [(R-ξ*d)/R] d = 1,90*R c = 1,05*d*sinα = 0,89d*
*α=arcos [(d/1,90-ξ*d)/d/1,90] =arcos (0,526-ξ)/0,526 =58,35*

Lo sforzo Normale P_{RD} $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/A_{SG}$ $\varepsilon(y)/(y- R+\xi d)=0,02/(d-\xi d)$

$\varepsilon(y)=0,02*(y-0,275*d)/0,75d$ $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/(f_{cd}*A_{SG})=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)$

Il primo coefficiente per il tratto lineare il secondo per il tratto cubico

$P_{RD}=\Psi(\xi)*A_{SG}*fcd\pm\sum A_{SI}*\sigma_{SI}$; $\lambda_G(\xi)=\int\sigma*ydA/(f_{cd}*A_{SG})$

$M_{RD}=\Psi(\xi)*A_{SG}*fcd*(R-\lambda_G)\pm\sum A_{SI}*\sigma_{SI}*Y$ $dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$

La tensione nel cls

$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0,4*f_{cm}/1,5$ $\varepsilon_C = 0,0003$ $f_{cm}=f_{ck}+8 = 37$ N/mmq

$\sigma(\varepsilon)=-16622026177,93*\varepsilon_C{}^3+87242582,02*\varepsilon_C{}^2-58038,76\ a*\varepsilon_C+93,68$

Le tensioni nell'acciaio teso

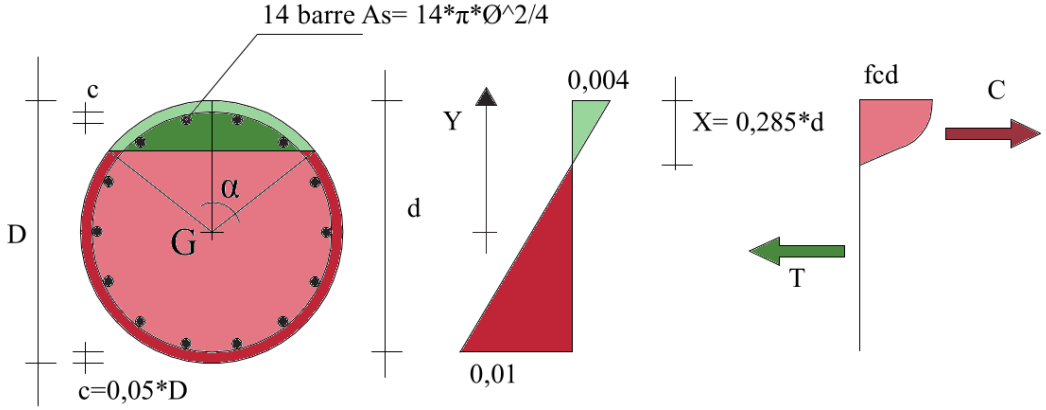
Lineare	*$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ N/mmq*	*$0 \le \varepsilon \le 0,00189$*
Costante	*$\sigma = fyd = 391$ N/mmq*	*$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$*
Quadratica	*$\sigma = -790000*\varepsilon^2 +31600*\varepsilon +154$*	*$0,01 \le \varepsilon \le 0,02$*

Gli estremi di integrazione

$dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$ $R-0,25*d \le r \le r$ $31°,65 \le r \le 148°,35$

Otteniamo il punto P_4 di coordinate (P_{RD};M_{RD})

- Punto P_5 *rottura* ***x = 0,285d*** $\varepsilon_C = 0{,}0004$; $\varepsilon_S = 0{,}01$



Area segmento circolare $A = 0{,}67*c*f$ *la corda* $c=2*R*\sin\alpha$
Freccia $= R-R*\cos\alpha = \xi*d$; $\cos\alpha=(R-\xi*d)/R]$ $\alpha=\arccos[(R-\xi*d)/R]$
Freccia $f = \xi*d = 0{,}25d$ $d = (D-c) = 0{,}95*D$ *copriferro* $c = 5\%H = 5\%D$
$\alpha=\arccos[(R-\xi*d)/R]$ $d = 1{,}90*R$ $c = 1{,}05*d*\sin\alpha = 0{,}89d$
$\alpha=\arccos[(d/1{,}90-\xi*d)/d/1{,}90] = \arccos(0{,}526-\xi)/0{,}526 = 62°{,}73$

Lo sforzo Normale P_{RD} $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/A_{SG}$ $\varepsilon(y)/(y-0{,}241d)=0{,}01/(d-\xi d)$

$\varepsilon(y)=0{,}01*(y-0{,}241d)/0{,}715d$ $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/(f_{cd}*A_{SG}) = \Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)$

Il primo coefficiente per il tratto lineare il secondo per il tratto cubico

$P_{RD} = \Psi(\xi)*A_{SG}*fcd \pm \sum A_{SI}*\sigma_{SI}$; $\lambda_G(\xi) = \int\sigma*ydA/(f_{cd}*A_{SG})$

$M_{RD} = \Psi(\xi)*A_{SG}*fcd*(R-\lambda_G) \pm \sum A_{SI}*\sigma_{SI}*Y$ $dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$

La tensione nel cls

$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0003$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

$\sigma(\varepsilon)=-16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3+87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2-58038{,}76\ a*\varepsilon_C+93{,}68$

Le tensioni nell'acciaio teso

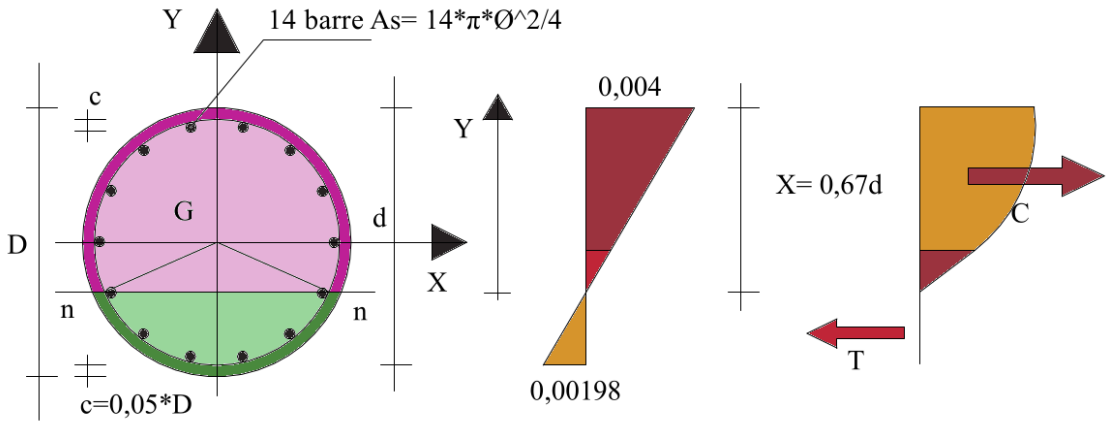
Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$	$E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*		$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$

Gli estremi di integrazione

$dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$ $R-0{,}25*d \le r \le r$ $27°{,}27 \le r \le 152°{,}73$

Otteniamo il punto P_4 *di coordinate* $(P_{RD};M_{RD})$

- ***Punto P_6*** *rottura* ***x = 0,67d*** $\varepsilon_C=0,0004$; $\varepsilon_S=0,00189$;



Area segmento circolare $A = [\pi*R^2 - 0,67*c*f)$ *la corda* $c=2*R*\sin\alpha$
Freccia $= R-R*\cos\alpha = \xi*d$; $\cos\alpha=(R-\xi*d)/R]$ $\alpha=\arccos[(R-\xi*d)/R]$
Freccia $f = \xi*d = 0,25d$ $d = (D-c) = 0,95*D$ *copriferro* $c= 5\%H = 5\%D$
$\alpha=\arccos[(R-\xi*d)/R]$ $d = 1,90*R$ $c = 1,05*d*\sin\alpha = 0,89d$
$\alpha=\arccos[(d/1,90-\xi*d)/d/1,90] =\arccos(0,526-\xi)/0,526 = 68°,13$

Lo sforzo Normale P_{RD} $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/A_{SG}$ $\varepsilon(y)/(\xi d-y)=0,00198/(d-\xi d)$

$\varepsilon(y)=0,00198*(\xi*d-y)/0,33d$ $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/(f_{cd}*A_{SG})= \Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)$

Il primo coefficiente per il tratto lineare il secondo per il tratto cubico

$P_{RD}= \Psi(\xi)*A_{SG}*fcd\pm\sum A_{SI}*\sigma_{SI}$; $\lambda_G(\xi)= \int\sigma*ydA/(f_{cd}*A_{SG})$

$M_{RD}= \Psi(\xi)*A_{SG}*fcd*(R-\lambda_G)\pm\sum A_{SI}*\sigma_{SI}*Y$ $dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$

La tensione nel cls

$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0,4*f_{cm}/1,5$ $\varepsilon_C = 0,0003$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

$\sigma(\varepsilon)=-16622026177,93*\varepsilon_C{}^3+87242582,02*\varepsilon_C{}^2-58038,76\,a*\varepsilon_C+93,68$

Le tensioni nell'acciaio teso

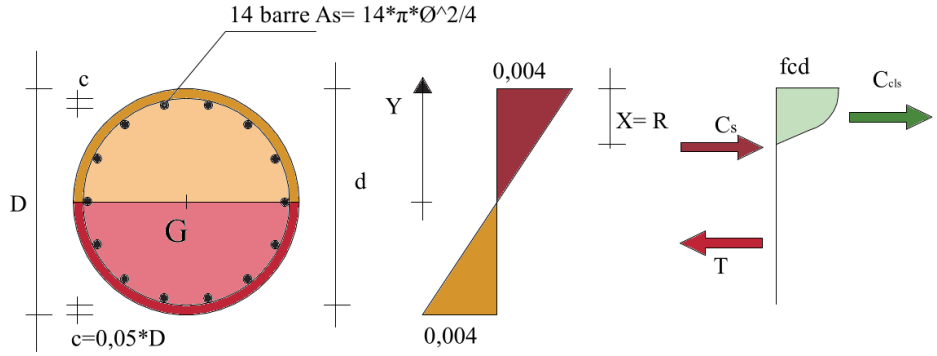
Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0,00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$

Gli estremi di integrazione

$dA = ds*dr = R*d\alpha*dr$ $0,67d-2R \le r \le R$ $-21°,87 \le r \le 201°,87$

Otteniamo il punto P_5 *di coordinate* $(P_{RD};M_{RD})$

- ***Punto P_7*** *Momento massimo* $x=R$ $\varepsilon_C=0{,}0004$; $\varepsilon_S=0{,}0004$;



Lo sforzo Normale P_{RD} $\Psi(\xi)=\int\sigma dA/A_{SG}$ $\varepsilon(y)=0{,}0004y/R$

$$\Psi(\xi)=\int\sigma dA/(f_{cd}*A_{SG})=\Psi_1(\xi)+\Psi_2(\xi)$$

Il primo coefficiente per il tratto lineare il secondo per il tratto cubico

$P_{RD}=\Psi(\xi)*\pi*R^2*f_{cd}$ $\lambda_G(\xi)=\int\sigma*ydA/(f_{cd}*A_{SG})$
$M_{RD}=\Psi(\xi)*\pi*R^2*f_{cd}*(R-\lambda_G)\pm\sum A_{SI}*\sigma_{SI}*Y$ $dA=ds*dr=R*d\alpha*dr$

La tensione nel cls

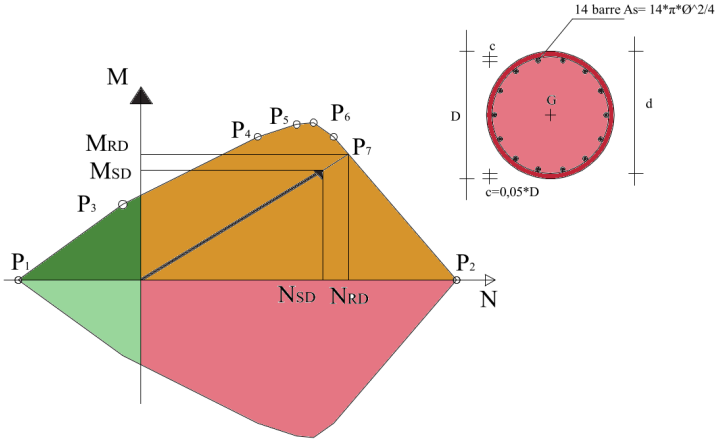
$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma\leq 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C=0{,}0003$ $f_{cm}=f_{ck}+8=37$ N/mmq
$\sigma(\varepsilon)=-16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3+87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2-58038{,}76\,a*\varepsilon_C+93{,}68$

Le tensioni nell'acciaio teso

Lineare	$\sigma=E*\varepsilon$	$E=206000$ N/mmq	$0\leq\varepsilon\leq 0{,}00189$
Costante	$\sigma=fyd=391$ N/mmq		$0{,}00189\leq\varepsilon\leq 0{,}01$

Gli estremi di integrazione
$dA=ds*dr=R*d\alpha*dr$ $0\leq r\leq R$ $0\leq r\leq 180°$

Otteniamo il punto P_7 *di coordinate* $(P_{RD};M_{RD})$
Il dominio di rottura per sezione circolare lo ricaviamo per punti simmetrico rispetto all'asse delle ascisse , nella figura è stato disegnato a maniera!!

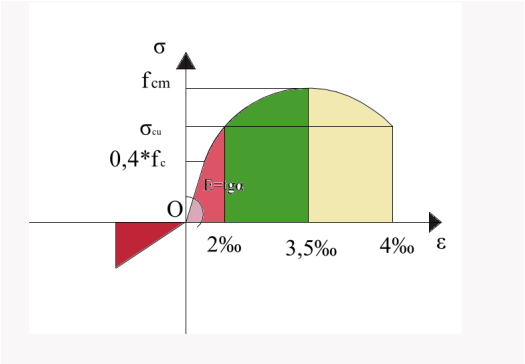


Coefficiente di sicurezza={[(NRD)^2+(MRD)^2]/[(NRD)^2+(MRD)^2]}^(1/2)

Verifiche a fessurazione - sezione rettangolare e a T

Per la verifica a fessurazione utilizziamo il diagramma tensioni deformazioni per il calcestruzzo riportato in figura con comportamento elastico lineare a trazione.

$E = 22000*(f_{cm}/10)^{0,3}$ *N/mmq* $E_{CT} = 18000*\sqrt{Rck}$ *daN/cmq*



La tensione di rottura a trazione $f_{ctm} = 0,30*(f_{CK})^{2/3}$ *per classi* $\leq 50/60$

Il valore medio della resistenza a trazione per flessione $f_{cfm} = 1,2*f_{ctm}$

$f_{cfm} = 1,3*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 95%*

$f_{cfm} = 0,7*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 5%*

La resistenza di progetto a trazione del cls $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_C$ *con* $\gamma_C = 1,5$

La rappresentazione analitica del diagramma di calcolo per il calcestruzzo come riportato in figura si compone di 3 tratti per la compressione e uno lineare per la trazione Rck 350 C35

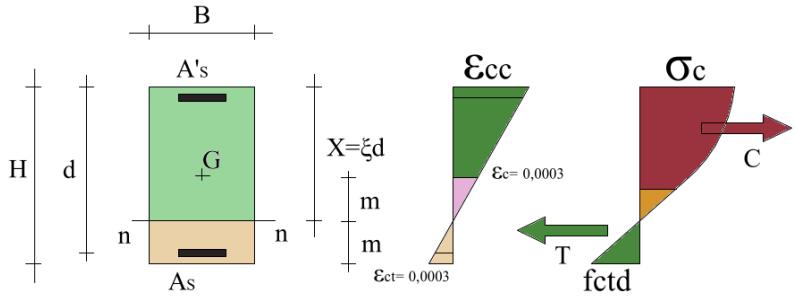
$$\varepsilon_{c1} = 0,002 ; \quad \varepsilon_{cu} = 0,0035 \quad \varepsilon_{Cmax} = 0,004$$

$\sigma = E*\varepsilon_C$ $\sigma \leq 0,4*f_{cm}/1,5$ $\varepsilon_C = 0,0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37$ *N/mmq*

$\sigma(\varepsilon) = -16622026177,93*\varepsilon_C^3 + 87242582,02*\varepsilon_C^2 - 58038,76\ a*\varepsilon_C + 93,68$

$\sigma = E_T*\varepsilon_{CT}$ $\sigma \leq f_{ctd} = 3,2$*N/mmq* $E_T = 10600$ *N/mmq*

Per sezione rettangolare



L'equilibrio alla traslazione del tensioni normali

$\Psi(\xi)*f_{cd}*B*\xi*d + \sigma's*A's - \sigma s*As - 0,5*B*(H-\xi*d)*0,4*fcm/1,5 = 0$ $H = 1,05*d$

La deformazione $\varepsilon(y) = y*0,0003/((H-\xi*d); \varepsilon_{cc} = 0,0003\xi*d/((H-\xi*d);$ $H = 1,05*d$

$\varepsilon_{cc} = 0{,}0003\xi /((1{,}05-\xi);\quad \varepsilon_S = 0{,}0003(1-\xi) /((1{,}05-\xi);\quad \varepsilon'_S = 0{,}0003(\xi-0{,}05)/((1{,}05-\xi);$

$\Psi(\xi)=[0{,}985*\xi-0{,}015]/4 \quad e \quad \lambda(\xi)=4/7*[d\,\xi -0{,}015*d\,(1-\xi)]$

Le tensioni nell'acciaio teso $\sigma_s=E*\varepsilon'_S$ *; nell'acciaio compresso* $\sigma'_S = fyd$

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon \quad E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

Dalla risoluzione della equazione per un primo tentativo $\sigma = f_{yd} = 391$ *N/mmq*

$\Psi(\xi)*f_{cd}*B*\xi*d+f_{yd}*A's- \sigma s*As-0{,}5*B*(H-\xi*d\,)*0{,}4*fcm/1{,}5 = 0$

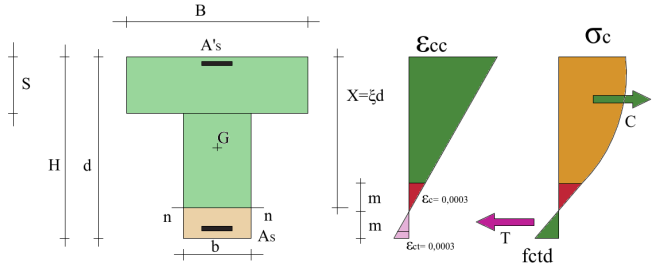
Ricaviamo la profondità dell'asse neutro $x=\xi*d$ *, eseguiamo il controllo*

$0{,}00189 \le [\varepsilon'_S=0{,}0003(\xi-0{,}05)/((1{,}05-\xi)] \le 0{,}004$

Il momento di fessurazione

$MF=\Psi(\xi)*f_{cd}*B*\xi*d*(\xi*d -\lambda(\xi))+f_{yd}*A's*d*(\xi-0{,}05)+\sigma s*As*d*(1{,}05-\xi)+2*B*(H-\xi*d\,)^2*0{,}4*fcm/9$

Per sezione a T



Le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale

$\Psi(\xi)*f_{cd}*[b*(\xi d-s)+B*s]+f_{yd}*A's- \sigma s*As-0{,}5*B*(H-\xi*d\,)*0{,}4*fcm/1{,}5 = 0$

$\Psi(\xi)=\int\sigma* b(y)*dy/[b*(\xi d-s)+B*s]$ *l'integrale va suddiviso in 3 integrali*

$0 \le y \le m; \qquad m \le y \le \xi d-s\ ; \qquad \xi d-s \le y \le \xi d$

$MF=\Psi(\xi)*f_{cd}*[b*(\xi d-s)+B*s]*[(\xi*d -\lambda(\xi)]+2*B*(H-\xi*d\,)^2*0{,}4*fcm/9$

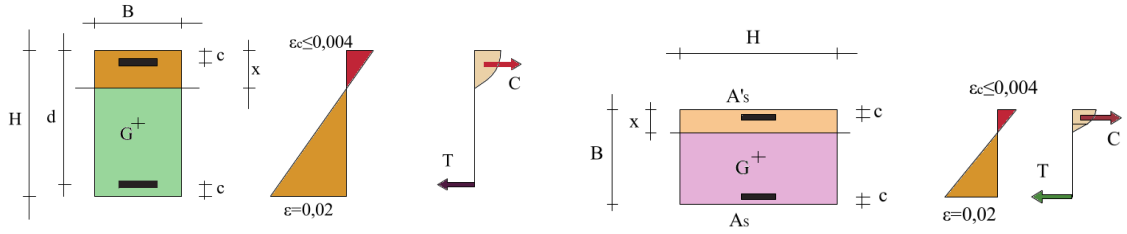
$+f_{yd}*A'_s*d*(\xi-0{,}05)- \sigma_s*A_s*d*(1{,}05-\xi)$

Per le tensioni e deformazioni si procede come per la sezione rettangolare eseguendo un primo tentativo , il secondo per $\sigma_s=E*\varepsilon'_S < f_{yd}$

La verifica a flessione e pressoflessione deviata

Le verifiche a flessione deviata per le travi di strutture in cemento armato le si eseguono esclusivamente per sezioni non simmetriche ad L che hanno una funzione di appoggio per solaio sull'ala inferiore, mentre per i pilastri sollecitati per azioni sismiche comunque dirette si ha pressoflessione deviata; la verifica può essere eseguita per sovrapposizione di due sollecitazioni rette nelle due direzioni come da NTC 2018 costruendo il dominio e bulbo delle tensioni o come sollecitazione flettente deviata.

Sezione rettangolare *Flessione deviata*



La rottura per flessione è per raggiungimento della max deformazione nell'acciaio teso siamo nella seconda regione il calcolo dei due momenti di rottura è immediato:

Flessione retta Y

$0{,}002*f_{cm}*d_1\,(1-\xi_1)*B+\Psi_1*B*\xi_1*d_1*\sigma c+A's*f_{yd}-1{,}20*f_{yd}*As=0$

La tensione al bordo compresso

$\sigma_C=-16622026178*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^3+87242582*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^2-58038*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]+93{,}68$

Ricavato ξ *determiniamo* $X_1=\xi_1*d_1$ *Il momento di rottura della sezione*

$M_{RDY}=0{,}004*f_{cm}*d_1^2(1-\xi_1)^2/3+\Psi*B*\xi_1*d_1*\sigma c*(\xi_1 d_1-\lambda_G)+A's*f_{yd}*d_1*(\xi_1-0{,}05)+1{,}20*f_{yd}*As*d_1(1-\xi_1)$

Flessione retta X

$0{,}002*f_{cm}*d_2\,(1-\xi_2)*B+\Psi_2*B*\xi_2*d_2*\sigma c+A's*f_{yd}-1{,}20*f_{yd}*As=0$

La tensione al bordo compresso

$\sigma_C=-16622026178*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^3+87242582*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]^2-58038*[0{,}02*\xi/(1-\xi)]+93{,}68$

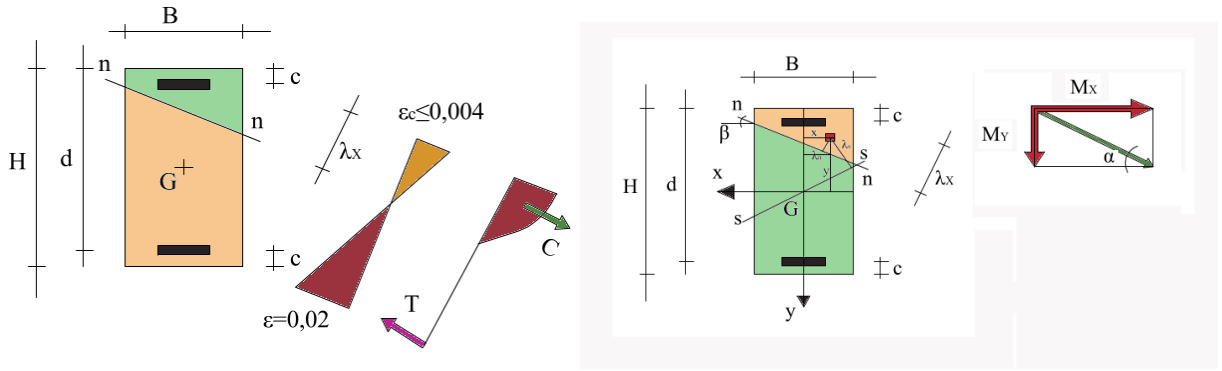
Ricavato ξ_2 *determiniamo* $X_2=\xi_2*d_2$ *Il momento di rottura della sezione*

$M_{RDX}=0{,}004*f_{cm}*d_1^2(1-\xi_1)^2/3+\Psi*B*\xi_1*d_1*\sigma c*(\xi_1 d_1-\lambda_G)+A's*f_{yd}*d_1*(\xi_1-0{,}05)+1{,}20*f_{yd}*As*d_1(1-\xi_1)$

La verifica per un dominio di rottura bidimensionale con assi M_X *e* M_Y

$$(M_{RDX}/M_{SDX})^2+(M_{RDY}/M_{SDY})^2\le 1$$

Flessione deviata con momento $M_{SD}= [(M_{SDX})^2+(M_{SDY})^2]^{1/2}$



La incognita è la posizione dell'asse neutro ovvero la retta di equazione $Y= mx+n$ *dove* $m = tg\beta$, $n = H/2-\lambda_x*cos\beta$ *determinata attraverso un sistema di 2 equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione intorno all'asse di sollecitazione delle tensioni normali*

$0=\int\sigma_c dxdy + A'_s*\sigma_s - 1{,}20*A_s*f_{yd}$; $0=\int\sigma_c\lambda_s*dxdy + A'_s*\sigma_s*\lambda'_s - 1{,}20*A_s*f_{yd}*\lambda_s$

Per l'acciaio

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

Per il calcestruzzo

$\varepsilon_{c1} = 0{,}002$; $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$
$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8$
$\sigma(\varepsilon)=-16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3+87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2-58038{,}76\ a*\varepsilon_C+93{,}68$

Le distanze $\lambda_n = (y-x*cotg\beta)*sin\beta$ $\lambda_s = (y-x*cotg\alpha)*sin\alpha$

La legge di variazione della $\varepsilon(\lambda_n)= 0{,}02*\lambda_n/(d*sin\alpha-\lambda_X)=0$

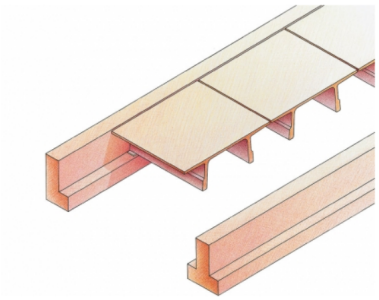
Risolto il sistema di equazioni previa definizione del dominio di integrazione si ricavano β , λ_x *e la equazione della asse neutro* $Y=x*tg\beta + H/2-\lambda_x*cos\beta$

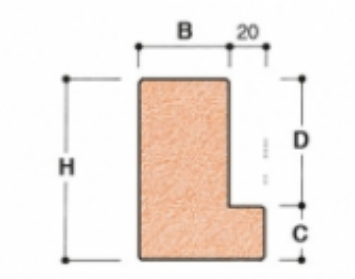
Il dominio di integrazione $x*tg\beta + H/2-\lambda_x*cos\beta \le y \le H/2$ $-B/2 \le x \le B/2$

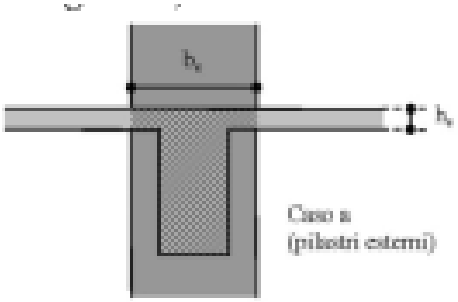
Il momento di rottura per flessione deviata

$M_{RD}=\int\lambda_N*\sigma_c dxdy+A'_s*\sigma_s*\lambda'_N+1{,}20*A_s*f_{yd}*\lambda'_N$

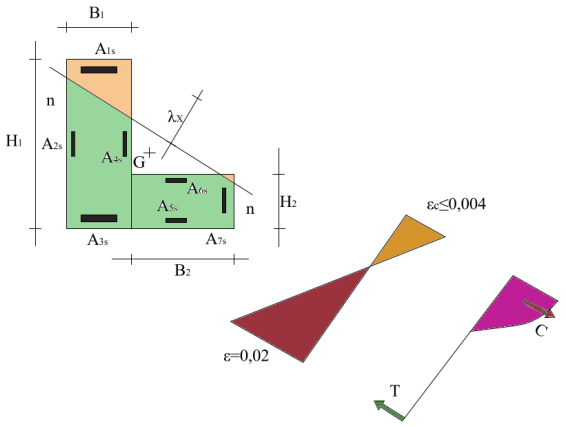
La trave ad L

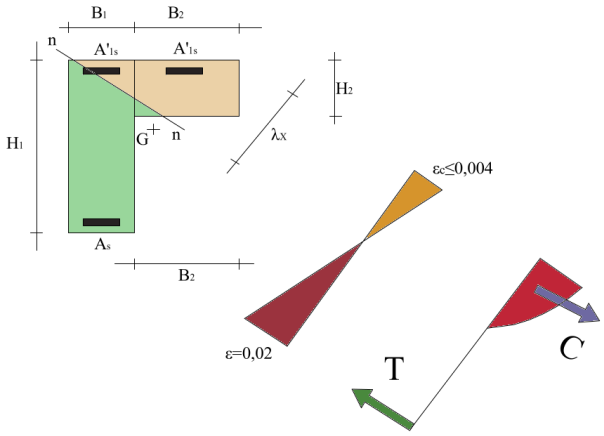






La sezione a L non è simmetrica per carico verticale è sempre deviata, negli edifici in cemento armato le travi di brodo con soletta collaborante B sono ad L ma per semplicità vengono verificate a flessione retta. $B_2=B_1$ larghezza pilastro in genere pari alla base della trave





La incognita è la posizione dell'asse neutro ovvero la retta di equazione $Y= mx+n$ dove $m = tg\beta$, $n = H/2-\lambda_x*cos\beta$ determinata attraverso un sistema di 2 equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione intorno all'asse di sollecitazione delle tensioni normali

$$\int\sigma_c dxdy + \sum A_{s'}*\sigma_{si} = 0 \qquad \int\sigma_c x*dxdy + \sum A_{s'}*\sigma_{si}*x_{si} = 0$$

Per l'acciaio

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon \quad E = 206000\ N/mmq$	$0 \le \varepsilon \le 0,00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391\ N/mmq$	$0,00189 \le \varepsilon \le 0,01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0,01 \le \varepsilon \le 0,02$

Per il calcestruzzo

$\varepsilon_{c1} = 0,002$; $\varepsilon_{cu} = 0,0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0,004$

$\sigma=E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0,4*f_{cm}/1,5$ $\varepsilon_C = 0,0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8$

$\sigma(\varepsilon)=-16622026177,93*\varepsilon_C{}^3+87242582,02*\varepsilon_C{}^2-58038,76\ a*\varepsilon_C+93,68$

La distanze $\lambda_n = y / \cos\beta$

La legge di variazione della $\varepsilon(\lambda_n) = 0{,}02 * \lambda_n / (d * \sin\alpha - \lambda_X) = 0$

Risolto il sistema di equazioni previa definizione del dominio di integrazione si ricavano β , λ_x *e la equazione della asse neutro* $Y = x * \operatorname{tg}\beta + H/2 - \lambda_x * \cos\beta$

Il dominio di integrazione $x * \operatorname{tg}\beta + H/2 - \lambda_x * \cos\beta \le y \le Y_G$

Y_G *distanza del baricentro geometrico dal bordo superiore*

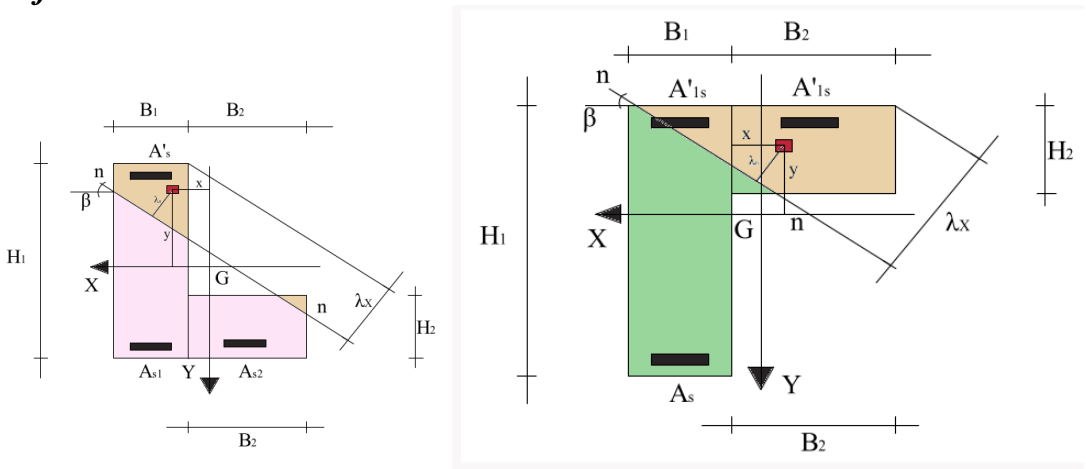
Vanno eseguiti dei tentativi in funzione della posizione dell'asse neutro rispetto alla forma della sezione

$X_G \le x \le (B_1 + B_2)$; $X_G \le x \le X_G - B_1$; $X_G - [Y_G - (H/2 - \lambda_x * \cos\beta)] / \operatorname{tg}\beta / \le x \le (B_1 + B_2)$;

Il momento di rottura per flessione deviata

$M_{RD} = \int \lambda_N * \sigma_c dx dy + \sum A_{SI} * \sigma_{SI} * \lambda_{NI}$

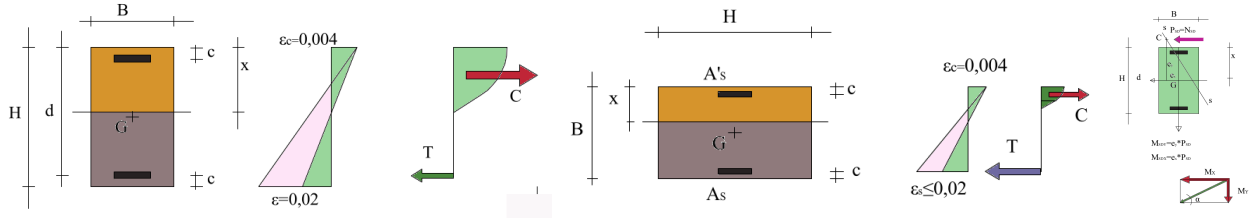
Riferimenti cartesiani



La risoluzione degli integrali la si persegue attraverso un software di analisi matematica.

La verifica a pressoflessione deviata

La verifica la eseguiamo per la sola sezione rettangolare, la sezione circolare è sempre sollecitata a pressoflessione retta e ci riproponiamo di costruire il dominio di rottura tridimensionale. La norme tecniche sulle costruzioni NTC 2018 per la verifica a pressoflessione deviata sovrappongono due pressoflessioni rette direzione x e y



Le due equazioni di equilibrio direzione x e y sono immediate

$\Psi_1 * B * \xi_1 * d_1 * f_{cd} + A'_{s1} * \sigma_s - A_{s1} * \sigma_s = P_{SD}$; $\Psi_2 * H * \xi_2 * d_2 * f_{cd} + A'_{s2} * \sigma_s - A_{s2} * \sigma_s = P_{SD}$

Determinate X_1 *e* X_2 *ovvero* ξ_1 *e* ξ_2 *possiamo calcolare momento di rottura rispetto al baricentro geometrico*

$M_{RDY} = \Psi_1 * B * \xi_1 * d_1 * f_{cd} * (H/2 - \lambda_{GY}) + (A'_{s1} * \sigma_s + A_{s1} * \sigma_s) * (H/2 - c)$
$M_{RDX} = \Psi_2 * H * \xi_2 * d_2 * f_{cd} * (B/2 - \lambda_{GX}) + (A'_{s2} * \sigma_s + A_{s2} * \sigma_s) * (B/2 - c)$

I coefficienti

$\Psi_1(\xi_1) = [0{,}985 * \xi_1 - 0{,}015]/4$, $\lambda_{GY}(\xi_1) = 4/7 * [d_1 \xi_1 - 0{,}015 * d_1 (1 - \xi_1)]$
$\Psi_2(\xi_2) = [0{,}985 * \xi_2 - 0{,}015]/4$, $\lambda_{GX}(\xi_2) = 4/7 * [d_2 \xi_2 - 0{,}015 * d_2 (1 - \xi_2)]$

Le tensioni nell'acciaio

Lineare	$\sigma = E * \varepsilon \quad E = 206000$ *N/mmq*	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000 * \varepsilon^2 + 31600 * \varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

Per il calcestruzzo

$\varepsilon_{c1} = 0{,}002$; $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$
$\sigma = E * \varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4 * f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck} + 8$
$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93 * \varepsilon_C^3 + 87242582{,}02 * \varepsilon_C^2 - 58038{,}76\ a * \varepsilon_C + 93{,}68$

La verifica a pressoflessione dal dominio di rottura tridimensionale avente assi Mx,My,N

$[N_{RD}^2 + (M_{RDX})^2 + (M_{RDY})^2]^{1/2} / [N_{SD}^2 + (M_{SDX})^2 + (M_{SDY})^2]^{1/2} \ge 1$
In alternativa sovrapponendo le tensioni o calcolando il momento $M_{SD} \le M_{RD}$

$N_{RD}/N_{SD} + M_{RDX}/M_{SDY} + M_{RDY}/M_{SDX} \ge 1$

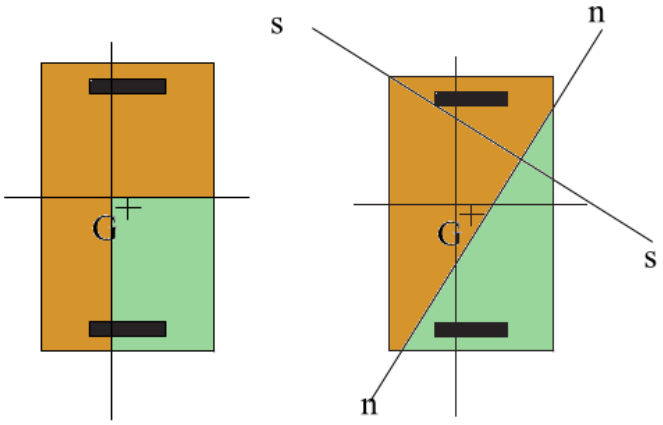
$[(M_{RDX})^2 + (M_{SDY})^2]^{1/2} / [(M_{SDX})^2 + (M_{SDY})^2]^{1/2} \ge 1$

La formula riportata nelle NTC 2018, ***4.1.2.3.4.2 Verifiche di resistenza e duttilità***

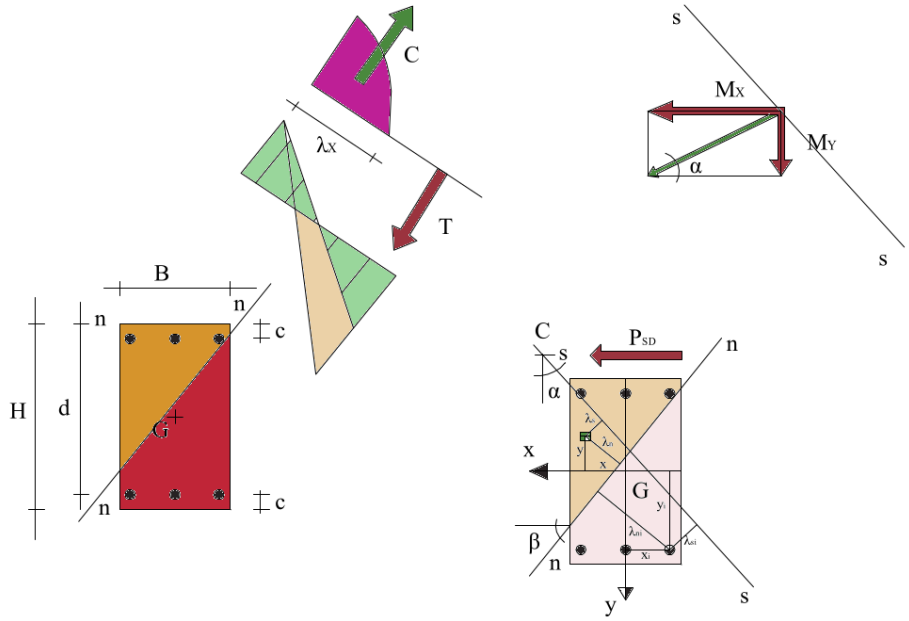
$(M_{SDX}/M_{RDY})^{\alpha} + (M_{SDY}/M_{RDX})^{\alpha} \leq 1$

N_{Ed}/N_{Rcd}	0,1	0,7	1,0
α	1,0	1,5	2,0

Per sezioni circolari ed ellittiche $\alpha = 2$.
*Sovrapponendo le tensioni che derivano da momento flettente agente nelle due direzioni Ex + 0,3*Ey , la parte reagente della sezione rettangolare non è corretta*



É opportuno eseguire una verifica a pressoflessione deviata utilizzando direttamentie il momento $M_{SD}=[(M_{SDX})^2+(M_{SDY})^2]^{1/2}$ *risultante di due vettori e direzione ortogonale al piano di sollecitazione.*

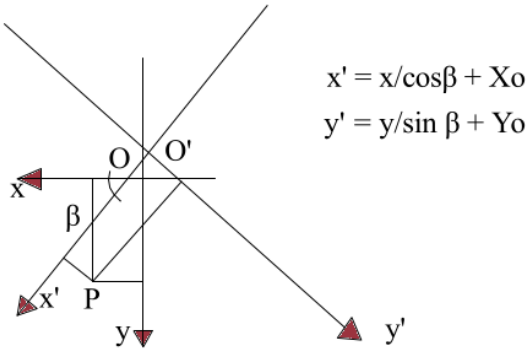


Per l'elemento areale $dA = dxdy$ *per la integrazione modifichiamo il sistema di riferinto con asse x' coincidente con l'asse neutro e asse y ovvero* λ_N *ortogonale con origine nel punto di intersezione tra n ed s soluzione del sistema di equazioni*

$Y = tg\beta * x + n$ *; asse neutro incognito* $Y = tg\alpha * x + n$ *; asse sollecitazione*

L'asse di sollecitazione è una retta che passa per il centro di sollecitazione C (e_x ,e_y) e inclinata di un angolo α $tg\alpha = M_{SDY}/M_{SDX}$ $e_Y = M_{SDX}/P_{SD}$; $e_Y = M_{SDY}/P_{SD}$;

La traslazione del sistema di riferimento $\lambda_N = X/cos\beta + X_O$; $\lambda_S = Y/sin\alpha + Y_O$



inclinazione incognita asse neutro β ;
inclinazione asse di sollecitazione α; $tg\alpha = M_Y/M_X$
Xo e Yo coordinate del punto di intersezione tra n ed s ovvero soluzione del sistema di equazioni

$Y = x*tg\beta + n$
$Y = x* M_Y/M_X + (e_x *M_Y/M_X - e_y)$ *con* $e_x = M_{SDX}/P_{SD}$; $e_Y = M_{SDX}/P_{SD}$;

$Xo = [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$
$Yo = [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]*tg\beta + n$

$\lambda_N = X/cos\beta + [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$;
$\lambda_S = Y/sin\alpha + [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]*tg\beta + n$

La equazione di equilibrio alla traslazione delle tensioni normali

$\iint \sigma dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si} = P_{SD}$ *Per pressoflessione* $\varepsilon_c = 0{,}004$; $\varepsilon_S \leq 0{,}02$;

La equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse di sollecitazione delle tensioni normali
$\iint \sigma\lambda_S * dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si}\, \lambda_{SI} = 0$

La linearità delle deformazioni $\varepsilon(\lambda_N) = \pm 0{,}004 * \lambda_N/\lambda_{XN}$
Positiva compressione o negativa di trazione per λ_N positivo o negativo

Le tensioni nell'acciaio

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000$ *N/mmq*	$0 \leq \varepsilon \leq 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391$ *N/mmq*	$0{,}00189 \leq \varepsilon \leq 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \leq \varepsilon \leq 0{,}02$

Per il calcestruzzo

$\varepsilon_{c1} = 0{,}002$; $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$

$\sigma = E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8$

$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2 - 58038{,}76\ a*\varepsilon_C + 93{,}68$

Risolvendo il sistema trigonometrico integrale di due equazioni attraverso un software di analisi matematica si ottengono β *ed n con dominio di integrazione*

$x*tg\beta+n \le y \le H/2$; $-B/2 \le x \le B/2$

Noto l'asse neutro ovvero la retta di equazione $y = x*tg\beta + n$ *si ricava il Momento ultimo o di rottura della sezione rettangolare*

$M_{RD} = \iint \sigma\lambda_N * dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si}\ \lambda_{NI}$ *la verifica* $M_{RD} \ge M_{SD}$ *ovvero*

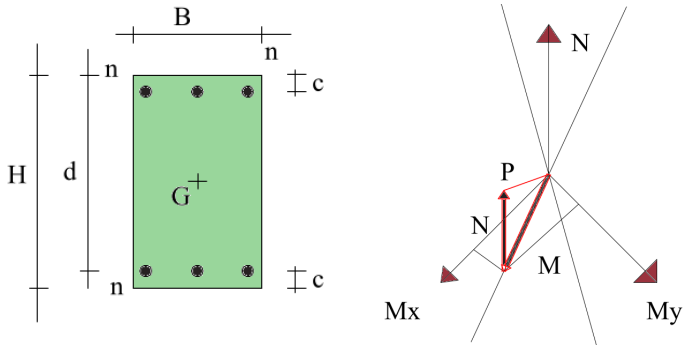
$M_{RDY} = M_{RD} * \sin\alpha$; $M_{RDX} = M_{RD} * \cos\alpha$;

$[(M_{RDX})^2+(M_{RDY})^2]^{1/2} \ge [(M_{SDX})^2+(M_{SDY})^2]^{1/2}$;

$[(M_{RDX})^2+(M_{SDY})^2]^{1/2} / [(M_{SDX})^2+(M_{SDY})^2]^{1/2} \ge 1$

Dominio di rottura tridimensionale per sezione rettangolare

La costruzione del dominio tridimensionale viene eseguita per punti , facendo ruotare l'asse di sollecitazione ovvero variando l'angolo α $tg\alpha = M_Y/M_X$ *nel piano cartesiano di assi* M_X *e* M_Y *e asse verticale N sforzo normale*



utilizzando 7 punti

- *Trazione*
- *Compressione*
- *Lineare cls*
- *Rottura bilanciata* $\lambda_{NX} = 0{,}25*\lambda_{NDX}$
- *Fase plastica acciaio* $x = 0{,}285*\lambda_{NDX}$
- *Fase di snervamento* $x = 0{,}67*\lambda_{NDX}$
- *Momento massimo*

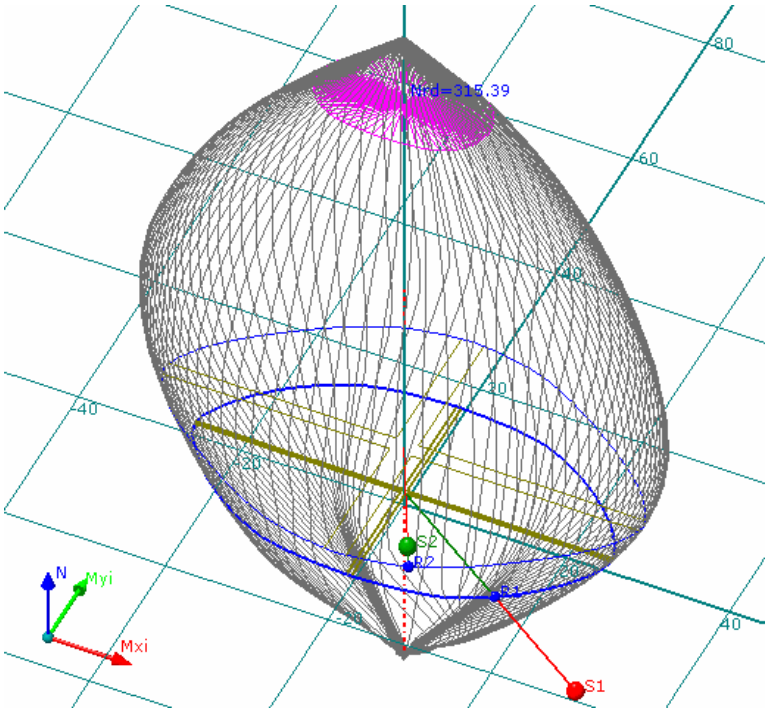
e le 3 equazioni $M_{RDY} = M_{RD} * \sin\alpha$; $M_{RDX} = M_{RD} * \cos\alpha$; $\lambda_{NDX} = (H-c)/\cos\alpha$

$\iint \sigma dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si} = P_{SD}$ *traslazione tensioni normali*

$\iint \sigma \lambda_S * dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si}\, \lambda_{SI} = 0$ *rotazione intorno asse di sollecitazione*

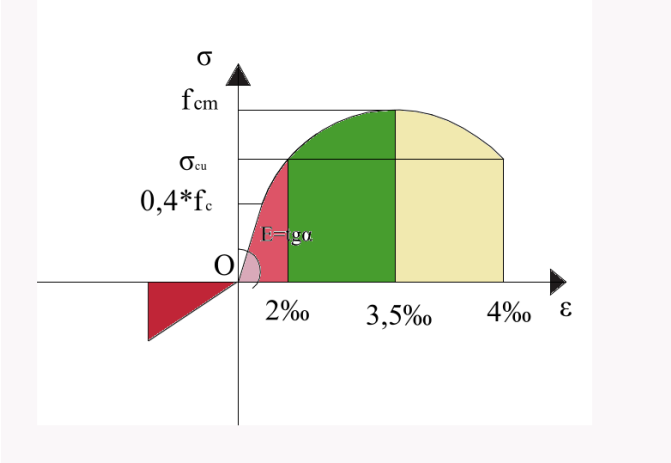
$M_{RD} = \iint \sigma \lambda_N * dxdy + \sum \sigma_{si} * A_{si}\, \lambda_{NI}$ *calcolato rispetto al baricentro geometrico*

Dalla determinazione dei 7 punti si definisce una spezzata che viene fatta ruotare intorno all'asse Z dello sforzo normale ovviamente la curva non è la stessa definendo una superficie; in modo più semplice lo si può ottenere dalla sovrapposizione di due pressoflessioni rette . Sono calcoli che vanno eseguiti con software , queste sono solo le formulazioni teoriche poste alla base della verifica di sezioni cemento armato , per la cui implementazione è opportuno ricorrere al modello a fibre del paragrafo 13 per sezioni di forma qualsiasi . Riportiamo immagini di domini tridimensionali di rottura per sezioni di cemento armato rettangolari con legame tensione deformazione parabola rettangolo reperibili in on line.



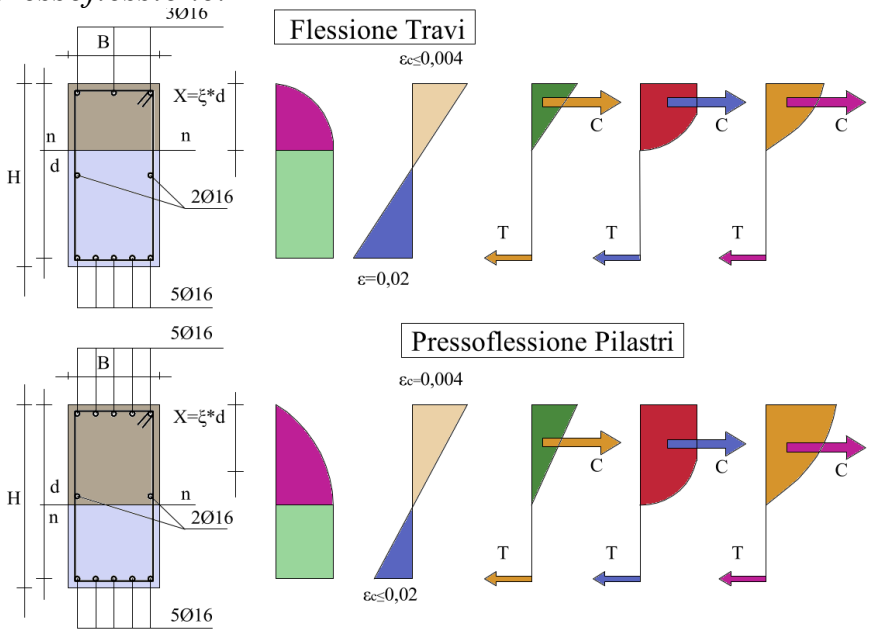
Verifica a taglio e torsione

La verifica a taglio di travi e pilastri in cemento armato la si esegue attraverso la determinazione delle tensioni tangenziali , nella ipotesi di taglio puro per travi ovvero assenza di tensione normale di compressione con inclinazione della lesione a 45°; la rottura per taglio avviene quando la tensione principale di trazione supera la resistenza a trazione del cls ovvero $\sigma_\eta > f_{ctd} = \tau_{rd} = 3{,}2$ *daN/cmq per* $Rck = 350$ *daN/cmq*
$E = 22000*(f_{cm}/10)^{0,3}$ *N/mmq* $E_{CT} = 18000*\sqrt{Rck}$ *daN/cmq*



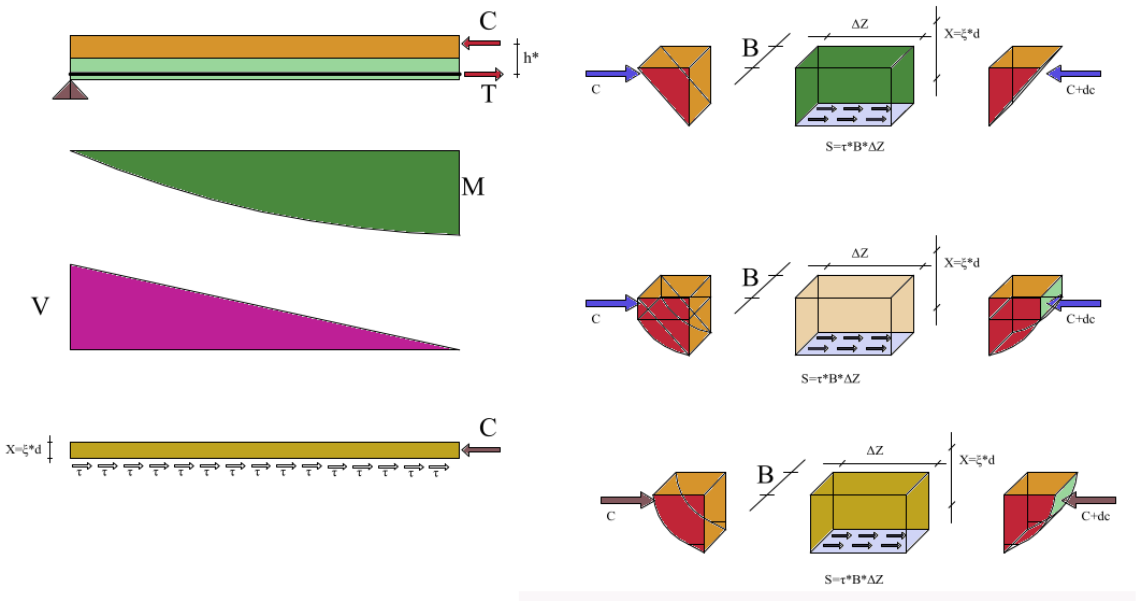
La tensione di rottura a trazione $f_{ctm} = 0{,}30*(f_{CK})^{2/3}$ *per classi* $\leq 50/60$
Il valore medio della resistenza a trazione per flessione $f_{cfm} = 1{,}2*f_{ctm}$
$f_{cfm} = 1{,}3*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 95%*
$f_{cfm} = 0{,}7*f_{ctm}$ *corrispondente al frattile del 5%*
La resistenza di progetto a trazione del cls $f_{ctd} = f_{ctk}/\gamma_C$ *con* $\gamma_C = 1{,}5$

La tensione tangenziale la determiniamo attraverso l'equilibrio di n tronco di trave tra tensioni normali e tangenziali ovvero $S=C$ *;*$\tau*B*\Delta Z = B*\int\sigma dy$ *per flessione e pressoflessione.*



Flessione

$\tau*B*\Delta Z = B* fcd *X/2$; $\tau*B*\Delta Z = \Psi*B* fcd *X$; $\tau*B*\Delta Z = \Psi_1*B* fcd *X$;
Per legame tensione deformazione nel cls , lineare , parabola rettangolo e cubico



Nella ipotesi di elasticità lineare del cls la formula per il calcolo della tensione tangenziale $\tau = V/I_N*S_N/B$ dove S_N momento statico rispetto all'asse neutro facendo riferimento all'asse neutro della sezione omogenea; senza esporre la trattazione

$$B*X^2/2 + n*A's*(X-c) - n*As*(H-X) = 0$$

Armatura tesa 10,05 cmq;Armatura compressa 6,03 cmq ;
Copriferro c = 3 cm coefficiente di omogeneizzazione $n = E_S/E_C$
Risolta la equazione di secondo grado in x si determina il momento di inerzia e il momento statico

$$S_N = B*X^2/2 + n*A's*(X-c) \; ; \quad I_N = B*X^3/3 + n*A's*(X-c)^2 + n*As*(d-X)^2$$

La tensione tangenziale $\tau_{SD} = V/I_N*S_N/B \leq \tau_{RD}$ riportata nell'eurocodice 2
La formula di jourawsky deriva dalla formula di Navier $\sigma = M/I*y$ e $V = dM/dz$ si vede che la pendenza del diagramma dei momenti parabolico aumenta in corrispondenza degli appoggi di estremità ed è li che si deve armare a taglio con le maggiori tensioni , diminuiscono anche le tensioni di compressione rimanendo inalterata la posizione dell'asse neutro X che dipende dalle armature e dimensioni della sezione ed anche il momento di inerzia della sezione omogenea

$d\sigma = M/I*y + d\,M/I*y - M/I*y = d\,M/I*y$ la funzione $M(z) = V*z - q*Z^2/4$
$\Delta M = [q*L/2*(z+\Delta z) - q*(z+\Delta z)^2/4] - [q*L/2*z - q*z^2/4]$
la variazione del momento flettente $\Delta M/\Delta z$
$\Delta M/\Delta z = [q*L/2*\Delta z - q*\Delta z^2/4 - q*2*z*\Delta z]/\Delta z$

$\Delta C = \tau * B * \Delta Z = \Delta\sigma * B * X^2 / 2 = \Delta M * X / I * B * X^2 / 2 = \Delta M * B * X^3 / (2\,I)$

$\tau * B * \Delta z = [\, q * L/2 * \Delta z - q * \Delta z^2/4 - q * 2 * z * \Delta z] * B * X^3 / (2\,I)$;

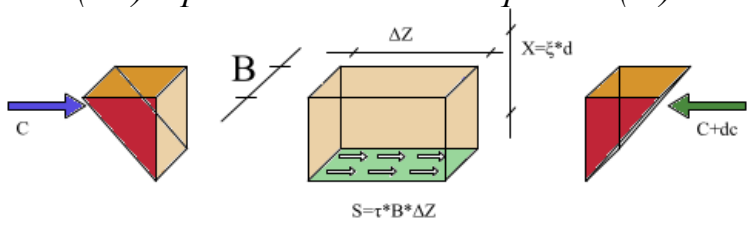
Poniamo $L = m * \Delta Z \quad z = n * \Delta Z \quad$ *con* $n < m \quad 0 \le z \le L \; ; \quad 0 \le n \le m$

Per il dimensionamento dei connettori per travi miste di acciaio le NTC 2018 fanno-riferimento alla risultante degli sforzi di compressione ,determinando la forza di scorrimento tra soletta di cls e trave di acciaio per unità di lunghezza; si può far riferimento a metà della luce della trave sfruttando la capacità deformativa ovvero la duttilità dei connettori ovvero la deformazione in fase plastica

$\tau = q * [m * \Delta Z/2 - \Delta z/4 - 2 * z] * X^3/(2I) \qquad \tau = q/8 * \Delta Z[2m - (8n+1)] * X^3/I$

Lim $\tau\,(\Delta z)$ *per* $\Delta z = 0 \quad m = n = \infty \quad \tau = q * X^3/(8I) * \Delta Z[2m - (8n+1)] = 0$

Lim $\tau\,(\Delta z)$ *per* $\Delta z = L/2 \qquad \tau = q * L * X^3/(8I)$ *valore max*



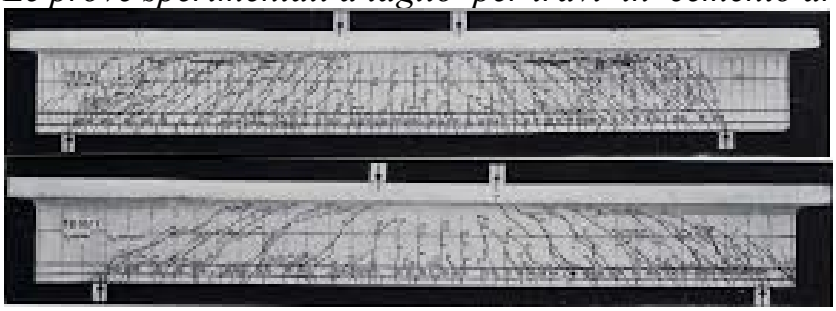
per $\Delta z = 0 \quad \Delta C = 0 \quad \Delta\sigma = 0 \quad S = 0 \quad \tau = 0$

per $\Delta z = L/2 \quad \Delta C = \Delta\sigma * B * X^2/2 \quad \Delta\sigma = M * X/I \quad M = Q * L^2/8 \quad S = \tau * B * L/2$

$Q * L^2 * X^2/(8I) * B/2 = \tau * B * L/2 \qquad \tau = Q * L * X^2/(8I) = V * X^2/(4 * I)$

$\tau = V/(4B) * 12 * X^2/H^3 = 0{,}75\; V/(B * H)$ *valore medio* $\quad X = H/2 \quad \tau = 1{,}5 * V/(B * H)$

Le prove sperimentali a taglio per travi in cemento armato riportano



$I_N = B * (\xi d)^3/3 + n * A's * d^2(\xi - 0{,}05)^2 + n * As * d^2(1-\xi)^2 \qquad X = \xi d$

$\tau = 0{,}25 * V * \xi^2/[Bd * \xi^3/3 + n * A's * (\xi - 0{,}05)^2 + n * As * (1-\xi)^2]$

per $\xi = X/d = 0 \quad \tau = 0 \qquad$ *per* $\xi = 1 \quad X = d \quad$ *la* τ *è max*

funzione di S_N *come dal diagramma delle tensioni tangenziali lungo la sezione*

La soluzione per armare a taglio come da istituto tecnico per geometri , individuare 3 tratti di trave di lunghezza L/4;L/2;L/4 , disponendo nel tratto intermedio la metà delle armature, ovvero se occorrono staffe ϕ8 /10 a due braccia , nel tratto centrale staffe ϕ8 /20 , i ferri di parete hanno la funzione di contrastare le lesioni da ritiro e fluage del cls nella mezzeria.

Per diagramma delle tensioni parabola rettangolo

$\tau*B*\Delta Z = \Psi*B*fcd*X$; rottura bilanciata $X = 0,2593d$; $\Psi=0,8095$

$\tau*B*\Delta Z = 0,210*B*d*fcd$ $\Delta Z = L/2$ $\tau= 0,42*d*fcd/L$ valore medio
Valore max $\tau_{max}= 0,84*d*fcd/L$ sull'appoggio

Per flessione risulta $\varepsilon_c \leq 0,0035$; $\varepsilon_s = 0,01$; $X= \xi*d$ con $\xi \leq 0,2593$

$\varepsilon_c=0,01*\xi/(1-\xi)$; la deformazione lungo la trave $\varepsilon(y)= 0,01*y/(d-\xi d)$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale ci consente di ricavare la x ovvero ξ

$\Psi(\xi)*B*\xi d*\sigma(\xi d) + \sigma'_s*A'_s - f_{yd}*A_s= 0$ $\varepsilon'_s=0,01*(\xi-0,05)/(1-\xi)$

$\Psi(\xi)=B*\int\sigma dy/(B*\xi d*\sigma)$ se $\varepsilon_c<0,002$ $\Psi(\xi)= 2/3$ $\varepsilon'_s< 0,00198$ $\sigma'_s= Es*\varepsilon'_s$

$\sigma(\varepsilon_c)=1000*|0,01*\xi/(1- \xi)|*[-250*0,01*\xi/(1- \xi) +1]*\alpha*f_{cd}$

$2/3*B*\xi d*1000*|0,01*\xi/(1- \xi)|*[-250*0,01*\xi/(1- \xi) +1]*\alpha*f_{cd}$ +

$+ Es*0,01*(\xi-0,05)/(1-\xi) *A'_s - f_{yd}*A_s= 0$ copriferro $c = 0,05*d$

ricaviamo ξ il momento M_{RD}

Distanza di C dal bordo superiore $\lambda_G=B*\int\sigma y dy/(B*\xi d*\sigma)$ $H/2-\xi d \leq y \leq H/2$

$M_{RD}= \Psi(\xi)*B*\xi d*\sigma(\xi d)*(\xi d-\lambda_G) + \sigma'_s*A'_s*d*(\xi-0,05)+ f_{yd}*A_s *d*(0,95- \xi)$

$\Psi(\xi)*B*\xi d*\sigma(\xi d)(\xi d-\lambda_G) = M_{RD}- [\sigma'_s*A'_s*d*(\xi-0,05)+ f_{yd}*A_s *d*(0,95- \xi)(\xi d-\lambda_G)]$

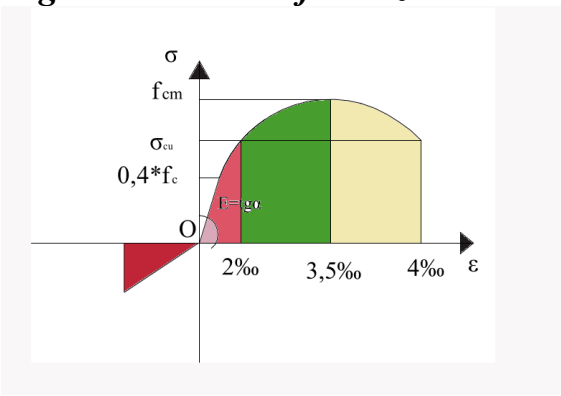
$\sigma(\xi d) = \{M_{RD}- [\sigma'_s*A'_s*d*(\xi-0,05)+ f_{yd}*A_s *d*(0,95- \xi)]\}/[\Psi(\xi)*B*\xi d*(\xi d-\lambda_G)]$

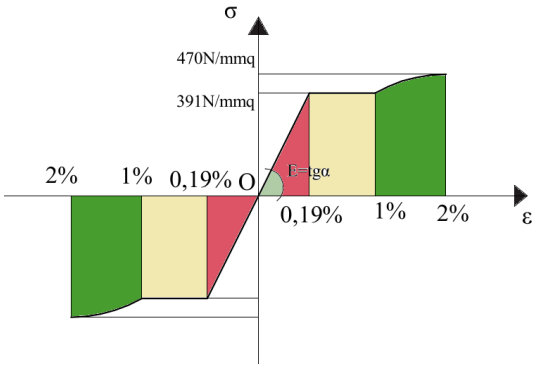
se $\varepsilon_c \geq 0,002$ $\sigma(\xi d)= fcd$ $\varepsilon'_s \geq 0,00198$ $\sigma'_s= Es*f_{yd}$

$\sigma(\xi d) = \{M_{RD}- [f_{yd}*A'_s*d*(\xi-0,05)+ f_{yd}*A_s *d*(0,95- \xi)]\}/[\Psi(\xi)*B*\xi d(\xi d-\lambda_G)]$

$\tau= 0,42*d*\sigma(\xi d)/L$; Valore medio Valore max $\tau_{max}= 0,84*d*\sigma(\xi d)/L$ sull'appoggio

Legami tensione deformazione





Calcestruzzo

$\varepsilon_{c1} = 0{,}002$; $\varepsilon_{cu} = 0{,}0035$ $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$

$\sigma = E*\varepsilon_C$ $\sigma \le 0{,}4*f_{cm}/1{,}5$ $\varepsilon_C = 0{,}0002817$ $f_{cm} = f_{ck}+8 = 37\ N/mmq$

$\sigma(\varepsilon) = -16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2 - 58038{,}76\ a*\varepsilon_C + 93{,}68$

$\sigma = E_T*\varepsilon_{CT}$

Acciaio

Lineare	$\sigma = E*\varepsilon$ $E = 206000\ N/mmq$	$0 \le \varepsilon \le 0{,}00189$
Costante	$\sigma = fyd = 391\ N/mmq$	$0{,}00189 \le \varepsilon \le 0{,}01$
Quadratica	$\sigma = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$	$0{,}01 \le \varepsilon \le 0{,}02$

Nella ipotesi di rottura bilanciata $\varepsilon_{Cmax} = 0{,}004$; $\varepsilon_S = 0{,}02$

$\tau*B*\Delta Z = \Psi_1*B*fcd*X$; $X = 0{,}285d$ $\xi = 285$ $\Psi_1 = 3/4$

$\tau = 2*\Psi_1*B*\xi d*fcd/L = 0{,}4275*B*d*fcd/L$; valore medio

$\tau_{MAX} = 0{,}855*B*d*fcd/L$ valore max sull'appoggio

Per flessione risulta $\varepsilon_c \le 0{,}004$; $\varepsilon_s = 0{,}02$; $X = \xi*d$ con $\xi \le 0{,}285$

$\varepsilon_c = 0{,}02*\xi/(1-\xi)$; la deformazione lungo la trave $\varepsilon(y) = 0{,}02*y/(d-\xi d)$

L'equilibrio alla traslazione orizzontale ci consente di ricavare la x ovvero ξ

$\Psi(\xi)*B*\xi d*\sigma(\xi d) + \sigma'_s*A'_s - 1{,}2*f_{yd}*A_s = 0$ ricaviamo ξ

$\varepsilon'_s = 0{,}02*(\xi-0{,}05)/(1-\xi)$ $\Psi(\xi) = B*\int\sigma dy/(B*\xi d*\sigma)$ $\varepsilon_c = 0{,}02*\xi/(1-\xi)$

$\sigma(\varepsilon_c) = -16622026177{,}93*\varepsilon_C{}^3 + 87242582{,}02*\varepsilon_C{}^2 - 58038{,}76\ a*\varepsilon_C + 93{,}68$

$0 \le \varepsilon'_s \le 0{,}00189$; $\sigma'_s = E_s*\varepsilon'_s$; $0{,}00189 \le \varepsilon'_s \le 0{,}01$; $\sigma'_s = f_{yd}$;

$0{,}01 \le \varepsilon'_s \le 0{,}02$; $\sigma'_s = -790000*\varepsilon^2 + 31600*\varepsilon + 154$

Il momento $M_{RD} = \Psi(\xi)B\xi d*\sigma(\xi d)*(\xi d-\lambda_G)+\sigma'_s*A'_s*d(\xi-0{,}05)+1{,}20f_{yd}*A_s*d(0{,}95-\xi)$

Distanza di C dal bordo superiore $\lambda_G=B*\int\sigma y dy/(B*\xi d*\sigma)$ $\quad H/2-\xi d \le y \le H/2$

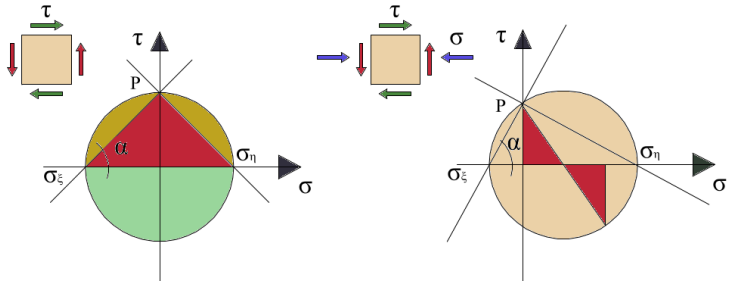
$\sigma(\xi d) = \{M_{RD}- [\sigma'_s*'_s*d*(\xi-0{,}05)+ 1{,}2f_{yd}*A_s *d*(0{,}95- \xi)]\}/[\Psi(\xi)*B*\xi d(\xi d-\lambda_G)]$

Valore medio ad L/4 $\tau= 0{,}4275*d*\sigma(\xi d) /L;$

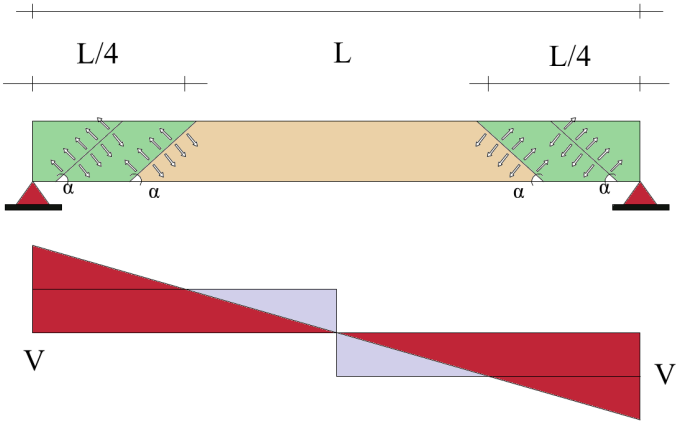
Valore max sull'appoggio $\tau_{max}= 0{,}85*d*\sigma(\xi d)/L$

Si può eseguire un progetto a taglio della nostra trave , determinando le armature e la larghezza B una volta nota la inclinazione delle lesioni da taglio 45° in assenza di sforzo normale

Il cerchio di Mohr e le lesioni da taglio nella trave.



Travi: Taglio puro tensione principale di trazione $\sigma_\xi= \tau$ *; lesione inclinata a 45°*
Pilastro pressoinflesso $\sigma_\xi=[\sigma-(\sigma^2-4\tau^2)^{1/2}]/2$*; lesione inclinata di angolo* α $\quad tg\alpha=\tau/\sigma_\xi$
La lesione inclinata si forma quando la tensione di trazione supera la resistenza del cls a trazione $\sigma_\xi>f_{ctd}$

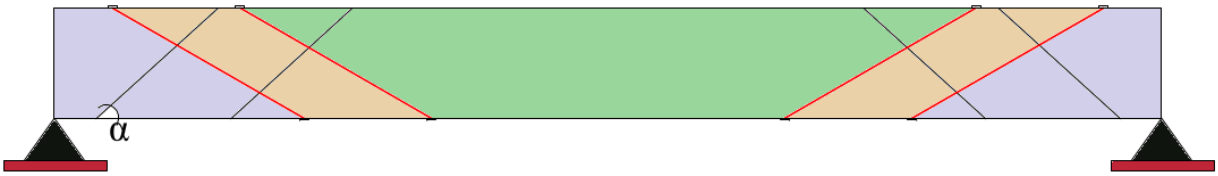


Non occorre armare a taglio se la lesione non si forma ovvero $\sigma_\xi \le f_{ctd} =\tau_{RD}$.
La risultante delle tensioni di trazione deve essere equilibrata da un poligono di forze quali una biella compressa inclinata parallella alla lesione e un tirante .

- *Ferri di parete orizzontale*
- *Staffe verticali verticale*
- *Sagomati inclinati*

Per incentivare la resistenza a trazione si utilizzano calcestruzzi fibrorinforzati con all'interno fibre di carbonio , si può precomprimere il calcestruzzo per travi prefab-

bricate a cavi aderenti all'interno delle quali va sempre disposta armatura dolce, mentre per le travi precompresse a cavi scorrevoli la curvatura parabolica dei cavi contribuisce nella componente verticale dello sforzo di precompressione a bilanciare una parte della sollecitazione tagliante.



Per travi di calcestruzzo fibrorinforzato con sola armatura longitudinale inferiore e superiore la resistenza a taglio viene valutata attraverso la formula seguente :
In assenza di armatura

$$\sigma_\xi \leq f_{FtuK}/\gamma_F = (f_{Ftm} - \alpha * k * s)/\gamma_F$$

Scarto quadratico medio s , k = 1,48 $0,5 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha = [1-0,1*(\upsilon/2*\upsilon_o - 1)*(\alpha_U/\alpha_1 - 1)]$

Per il cls fibrorinforzato viene definita la classe di resistenza

10 daN/cmq ÷ 80 daN/cmq

Tabella 1 - Classi di resistenza in funzione del valore di $f_{R,1k}$

Classe $f_{R,1k}$ [N/mm²]	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0

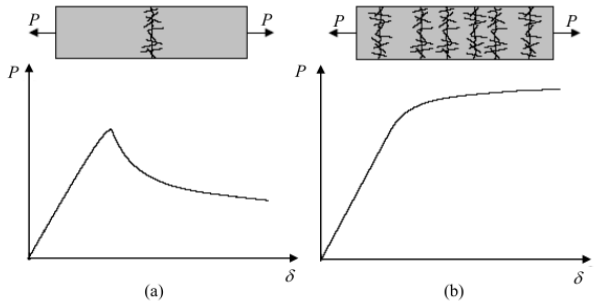


Tabella 12-1 – Valori di v e di α_u / α_1 per differenti applicazioni strutturali.

Applicazione strutturale	Esempi di elementi e di fessurazione	$\frac{\alpha_u}{\alpha_1}$	v
Flessione in trave isostatica con armatura longitudinale minima a flessione	As ≥ As$_{min}$	1.2	$l_{cs} \cdot a \cdot h$
Flessione in trave iperstatica con armatura longitudinale	As ≥ As$_{min}$, As' ≥ As'$_{min}$	1.4 *	$(l_{cs1} + l_{cs2}) \cdot a \cdot h$
Taglio in trave con armatura trasversale convenzionale, superiore al minimo previsto dall'EC2	Ast ≥ Ast$_{min}$	1.2	ρ_{st} = rapporto geometrico d'armatura trasversale $l_{cs} = l_{cs}(\rho_{st})$ $l_{cs} \cdot t \cdot l_f^{**}$

%

L'aggiunta di fibre disperse in una matrice cementizia ne modifica le proprietà meccaniche. In particolare, migliora il comportamento a trazione contrastando l'apertura progressiva delle fessure. Una volta raggiunta la fessurazione della matrice, le fibre sono in grado di manifestare il proprio contributo, conferendo al composito una resistenza post-fessurazione assente nella matrice senza fibre. Il comportamento a trazione dipende dalla percentuale di fibre nella matrice di cls che se inferiore al 2% è degradante , mentre rigido plastico incrudente per percentuali superiori

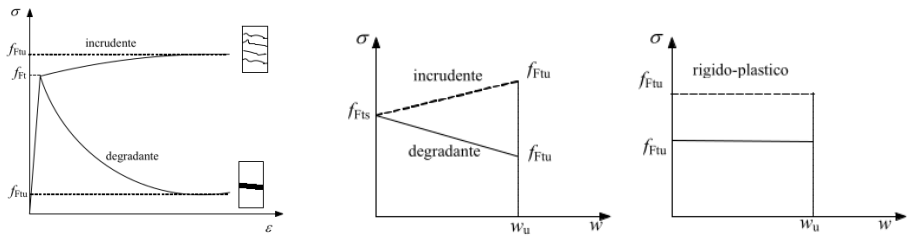
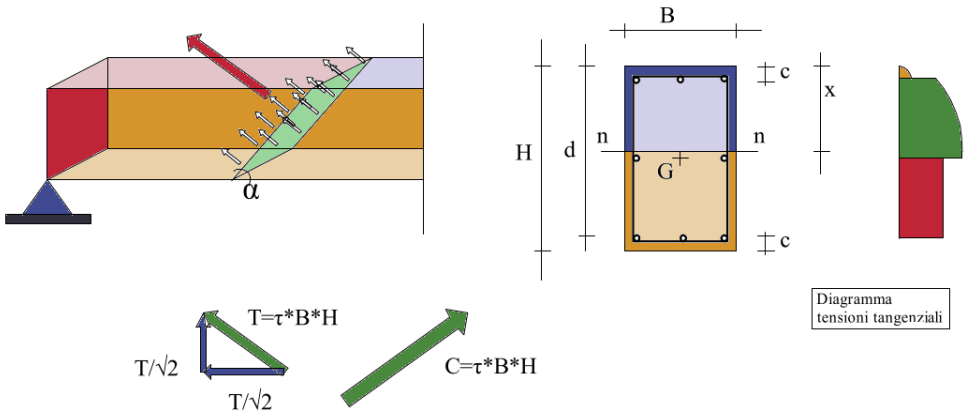


Figura 2-1 – Comportamento a trazione.

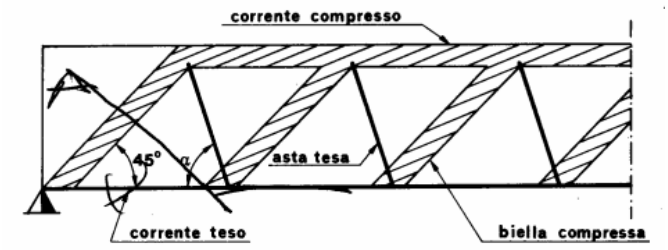
Di seguito riportiamo la verifica a taglio per travi in cemento armato aventi sezione rettangolare ad L e a T con il calcolo delle armature e le formule di progetto per sezione rettangolare nella ipotesi di rottura bilanciata per flessione; eseguiamo inoltre le verifiche per travi precompresse aventi spessore dell'anima ridotta e per sezione rettangolare in cls fibrorinforzato con armatura .

Verifica a taglio secondo NTC 2018 ed EUROCODE 2

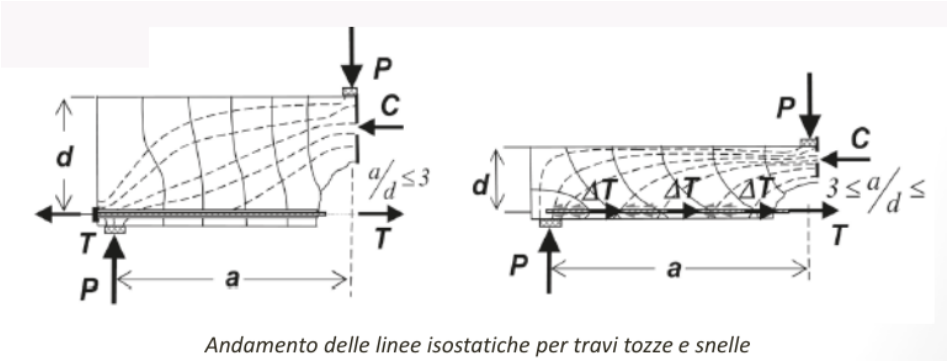
Sezione rettangolare



Il meccanismo resistente è di una biella compressa alla quale compete la risultante degli sforzi di compressione C inclinata a 45° parallela alla lesione nella trave e di un tirante orizzontale inferiore e un corrente superiore compresso, si individua all'interno della trave un traliccio ovvero una struttura reticolare che conferisce alla trave la capacità di sopportare il taglio.



Nella trave possono essere individuati altri meccanismi resistenti quali ***effetto arco*** *per elementi tozzi e* ***effetto pettine*** *per travi snelle , funzione del rapporto a/d*



Andamento delle linee isostatiche per travi tozze e snelle

L'equilibrio del concio di trave $V*a = T*(\xi d-\lambda)$

$V(z)=dM/dz=d[T*(\xi d-\lambda)]/dz =(\xi d-\lambda)dT/dz+T*d(\xi d-\lambda)/dz$

T forza di trazione acciaio la cui variazione dipende dal momento flettente e dalla aderenza tra armature metalliche e calcestruzzo e dalla lunghezza di ancoraggio. La tensione tangenziale sull'asse neutro dove assume il valore max come visto è funzione della tensione normale σ in mezzeria della trave $(M = Q*L^2/8)$ *e della X ovvero di ζ che nella trattazione lineare* $\sigma= E*\varepsilon$ *è una caratteristica geometrica della sezione costante lungo tutta la trave , dipende dalle dimensioni H e B e dalle armature in trazione e compressione ovvero una trave snella con aderenza perfetta tra cls e barre metalliche*

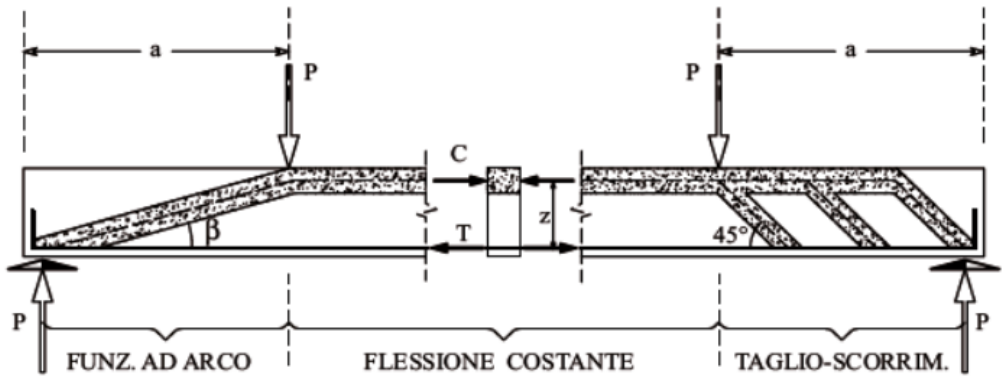
$\tau_{max}= \eta*d*\sigma(\xi d)/L$ $M = V*L/2- Q*L^8/8$; $V(z)=Q*(L/2-z)$

$Q*(L/2-z)*a=(\xi d-\lambda)dT/dz$ *aderenza perfetta* ***Pettine*** $d(\xi d-\lambda)/dz = 0$

Se varia il legame tensione deformazione , parabola rettangolo essendo valido il principio di conservazione delle sezioni piane il diagramma delle deformazioni è lineare funzione della curvatura $\zeta=(\varepsilon_C+\varepsilon_S)/d$ $\varepsilon_C/\xi d= (\varepsilon_C+\varepsilon_S)/d$ *ovvero la profondità dell'asse neutro* $X = \xi d=\varepsilon_C d*/(\varepsilon_C+\varepsilon_S)$ *e quindi* $\xi=\varepsilon_C(\varepsilon_C+\varepsilon_S)$ *varia in funzione del momento flettente e del legame costituivo* σ-ε *per l'acciaio e il cls. Se la forza tangenziale di aderenza tra le barre varia poichè la trave è corta con lunghezze di ancoraggio ridotte la forza T non può variare lungo l'asse della trave* $dT/dz=0$ *in tal caso l'equilibrio è assicurato dalla variazione del braccio della coppia interna cm funzionamento ad arco*

$Q*(L/2-z)*a=T*d(\xi d-\lambda)/dz$ *La lunghezza di ancoraggio* $L*\tau\pi\phi = \sigma*\pi\phi^2/4$
$L=T/(\tau_{ad}\pi\phi)$ *che in zona tesa va raddoppiata pari* $L\approx30\phi$, $2*L \approx 96$ *cm*

Per travi con luce $L \leq 3{,}5$ *m trave tozza funzionamento ad* ***arco***
Per travi con luce $L > 4$ *m in genere 5÷7 m funzionamento a* ***pettine***

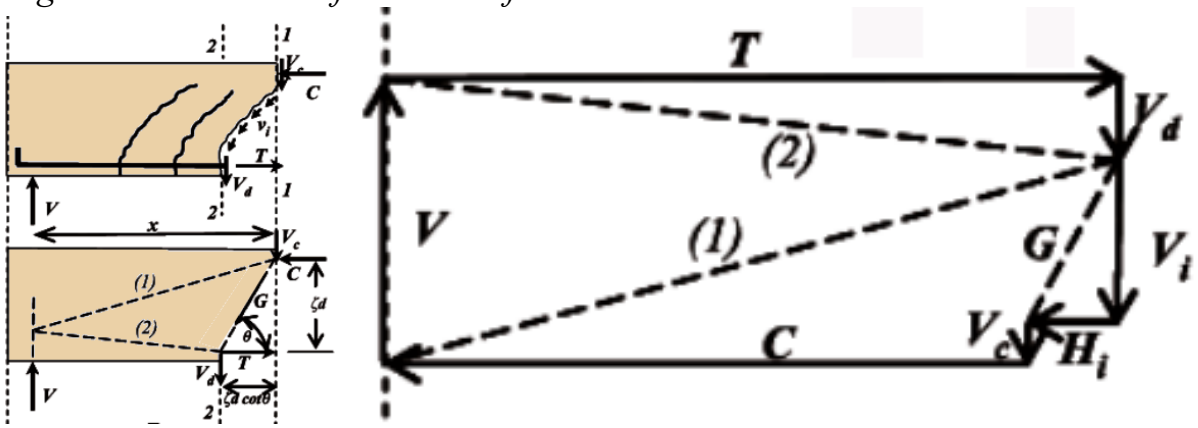


Diversi meccanismi resistenti di una trave soggetta a flessione e taglio.

Meccanismo resistente a pettine

Il taglio V è equilibrato dalla combinazione di tre differenti azioni resistenti:

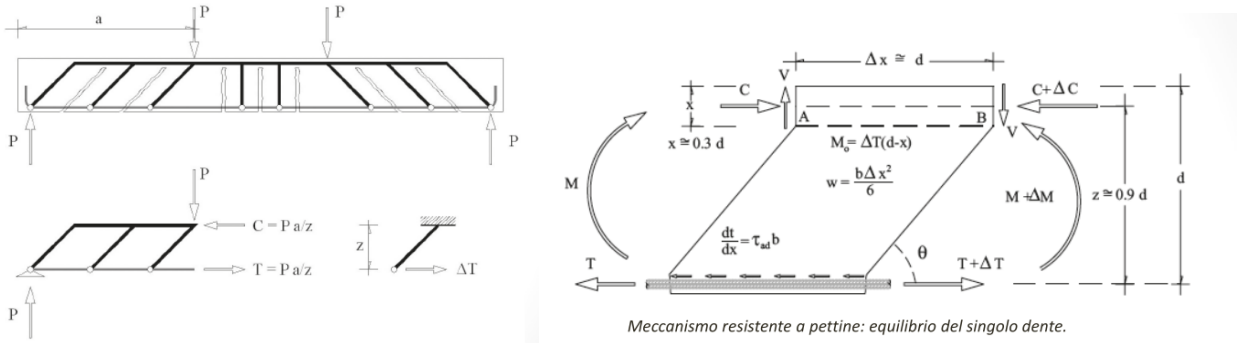
*• un'aliquota **Vc** che agisce in corrispondenza della zona compressa;*
*• un'aliquota **Vd** dovuto all'effetto «spinotto» derivante dall'impegno «flessionale» delle armature poste in zona tesa;*
• uno sforzo derivante dalla componente verticale dell'azione dovuta all'effetto di «ingranamento» tra le facce della fessura.



Equazioni di equilibrio del solido in esame, alla traslazione verticale ed alla rotazione:

$$V = V_C + V_D * V_I \quad ; \quad M = T * \xi d + V_D * \xi d * \cot g\theta$$

*La fessurazione prodotta dal carico divide la zona tesa in conci compresi tra due fessure contigue; ognuno dei conci può essere assimilato ad una mensola vincolata al corrente compresso dell'elemento strutturale ed attraversata inferiormente dall'armatura longitudinale dell'elemento stesso. Tale configurazione è nota come **meccanismo resistente a pettine** in cui i conci rappresentano i denti del pettine. Dalla capacità di resistenza del generico dente dipende la possibilità di trasmissione dello sforzo di scorrimento dall'armatura tesa al corrente compresso.*

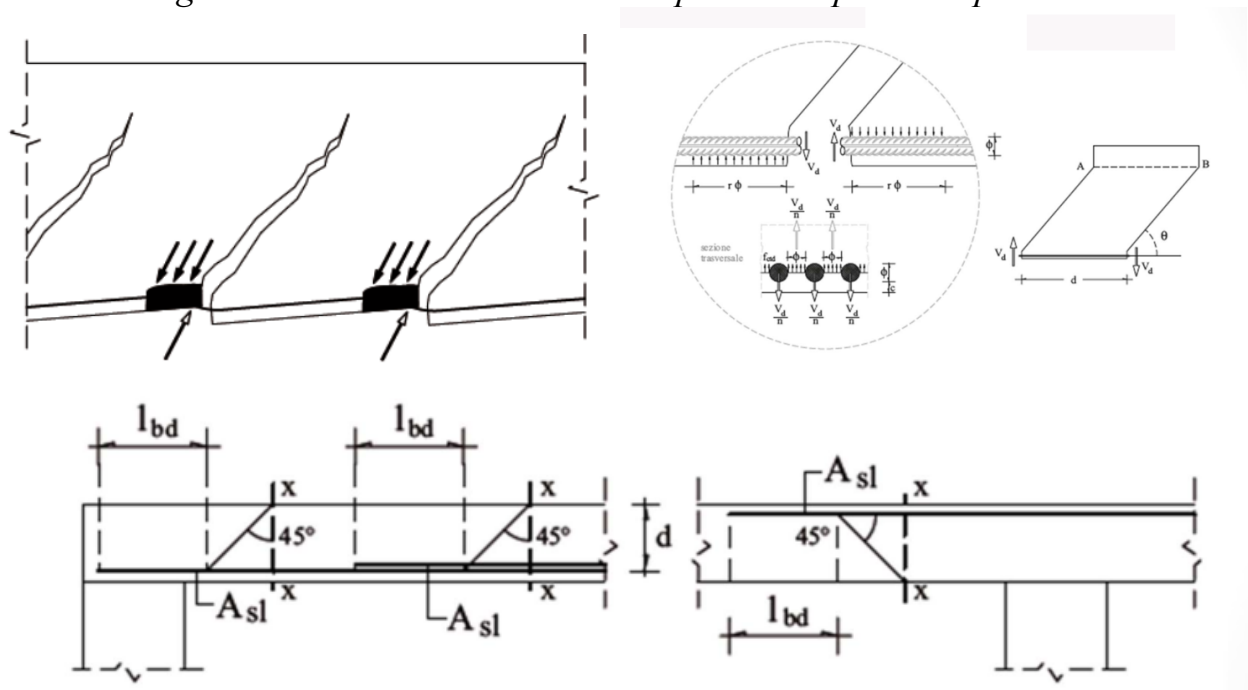


Meccanismo resistente a pettine: equilibrio del singolo dente.

La resistenza a trazione offerta dal meccanismo a pettine per elementi senza armatura trasversale , La risultante R delle forze di trazione
$R= \sigma_t * B * (0,9d)$, la componente verticale $V= R*\cos\theta$ per $\theta= 45°$ $V = 0,7*R$

$$V_{RDC} = 0,25*f_{ctd}*B*d$$

Effetto spinotto
L'effetto spinotto è strettamente connesso alla rigidezza flessionale delle barre che costituiscono l'armatura longitudinale tesa della trave. Queste, in virtù dello scorrimento tra le due facce della fessura prodotta dal taglio, sono impegnate in una deformazione flessionale e finiscono per assorbire un'aliquota della sollecitazione tagliante complessiva.Tale contributo trova un limite nella capacità del ricoprimento di calcestruzzo disostenere le barre longitudinali che, per effetto della suddetta azione tagliante, tendono ad essere espulse (sfondellamento). L'esatta quantificazione di tale effetto non è agevole e dipende essenzialmente dal diametro e dalla distribuzione delle barre longitudinali. Il contributo si ricava per via empirica – sperimentale.



La resistenza a taglio di elementi strutturali a taglio privi di armatura

$$V_{RDC}=0,26*(1+6,42*r*\rho)*f_{ctd}*b*d \quad \text{solitamente si assume}$$

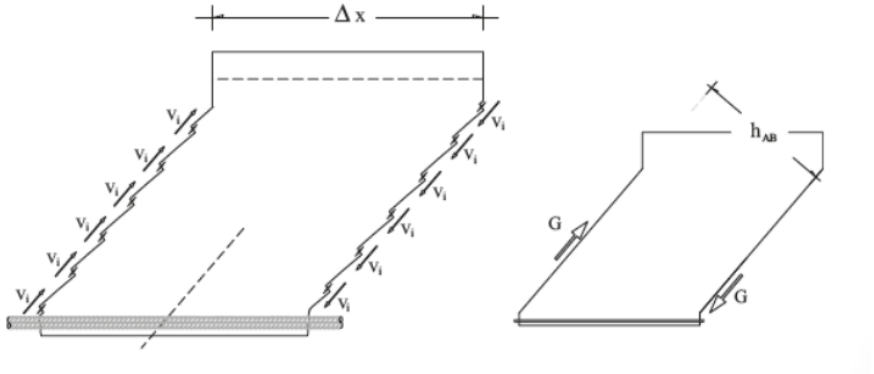
$$V_{RDC}=0,25*(1+10*r*\rho)*f_{ctd}*b*d$$

con la posizione $\beta=(1+10*r*\rho)$ *e* $\rho= A_{sl}/(b*d)$ $V_{RDC}=0,25*\beta*f_{ctd}*b*d$

Il contributo dell'effetto spinotto è interamente sintetizzato nel parametro $\beta>1$ *che, per valori di r=5 e di* $\rho_{Lmax}=0.04$ *può teoricamente raggiungere valori massimi anche dell'ordine* $\beta=3$.

Ingranamento inerti:

L'effetto ingranamento è particolarmente rilevante per travi basse, per le quali le fessure sono strette, mentre si riduce al crescere dell'altezza della trave in quanto aumenta l'ampiezza della lesione (effetto scala). Per tener conto di tale meccanismo i codici normativi incrementano la resistenza a taglio tramite un coefficiente moltiplicativo ***k*** *che dipende essenzialmente dal rapporto fra la massima pezzatura dell'inerte utilizzato e l'altezza utile della trave. Poiché, per calcestruzzi normali, detta pezzatura non varia in maniera sensibile (≈20mm), il coefficiente k può considerarsi sostanzialmente inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza utile della trave.*

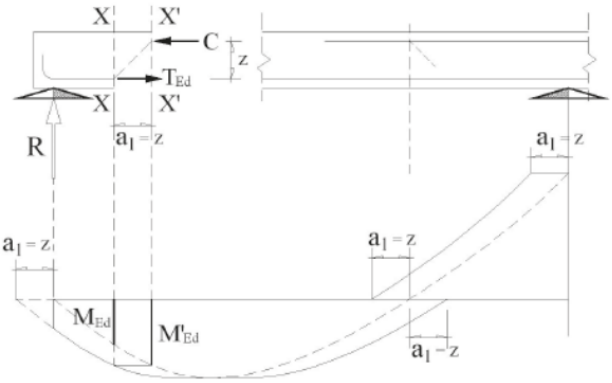


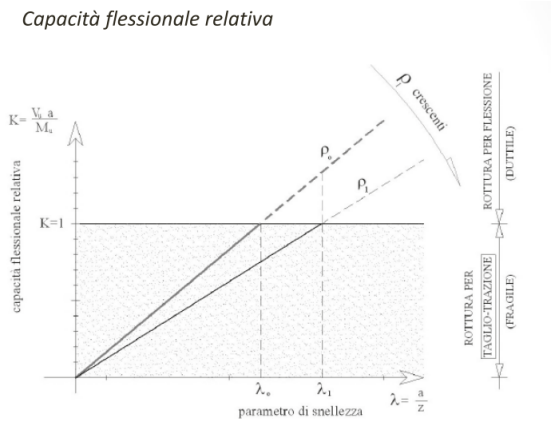
La resistenza ultima

$V_{RDC}=0,25*\beta*k*f_{ctd}*b*d$ *con* $k \leq 2$ *funzione del diametro D dell'inerte*

La resistenza di elementi non armati a taglio è funzione di β, k, f_{ctd}

Il funzionamento a pettine ovvero la presenza di fessure inclinate , modifica la distribuzione degli sforzi dovuti al momento flettente nominale :

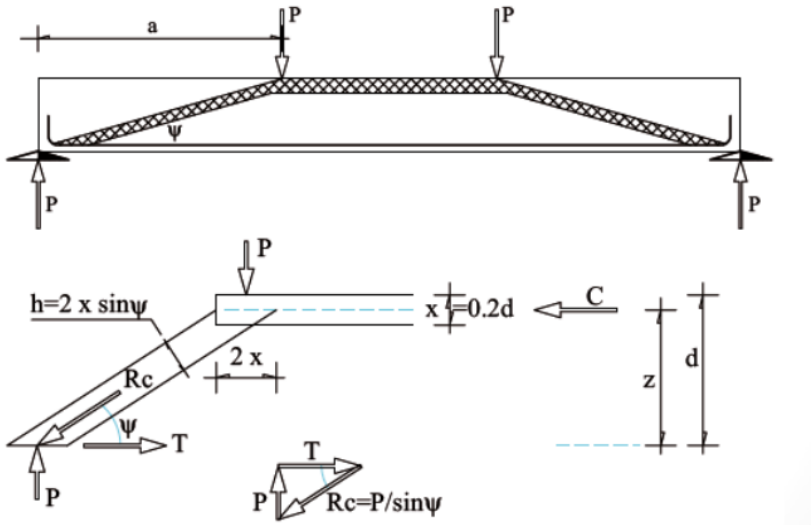




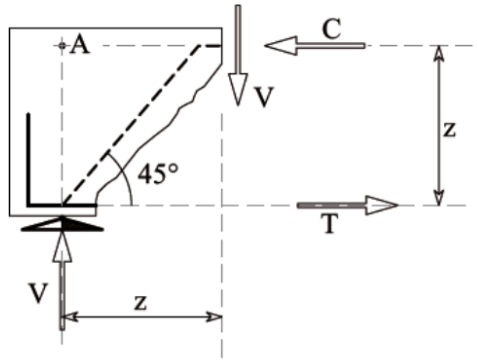
*Con **traslazione del diagramma dei momenti.***

Meccanismo resistente ad arco

Le precedenti considerazioni in termini di «capacità flessionale relativa», portano a concludere che nel campo delle basse snellezze (λ<λl) il comportamento della trave allo S.L.U. è sempre governato da rotture per taglio-scorrimento.In realtà, nel campo delle snellezze molto basse, può instaurarsi un meccanismo di rottura alternativo a quello a pettine: può succedere cioè che, nonostante i denti del meccanismo a pettine abbiano ceduto per trazione in corrispondenza della sezione di incastro al corrente superiore, la trave riesca a resistere per l'instaurarsi di un meccanismo del tipo «ad arco».

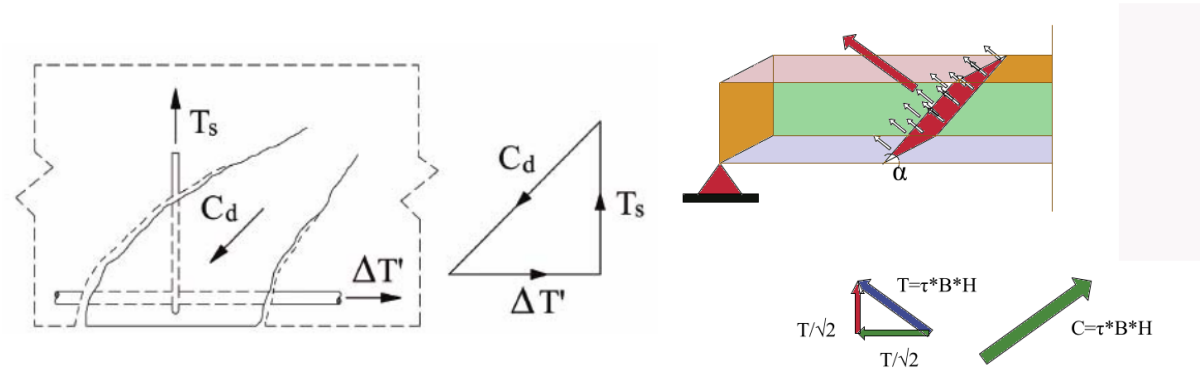


*Le NTC 2018 , in genere tutte le norme tecniche sulle costruzioni a partire dal 1992 richiedono che agli appoggi la armatura longitudinale in trazione deve essere in grado di sopportare uno sforzo pari al taglio V*z= T*z z = 0,9*d*



Calcolo armature a taglio

Nelle travi in cemento armato possiamo inserire staffe verticali , ferri sagomati e di parete ; la armatura consigliata è di staffe e ferri di parete al fine di contrastare le lesioni da ritiro e fluage . I sagomati venivano utilizzati negli anni 50 e 60 si era soliti ripartire in taglio in percentuali affidando il 60% alle staffe e il 40% ai sagomati individuando dei meccanismi resistenti di bielle compresse e tiranti . L'approccio può essere differente ovvero equilibrare sul piano della lesione la risultante del forze di trazione e compressione , o individuare meccanismo resistente traliccio di Morsch.

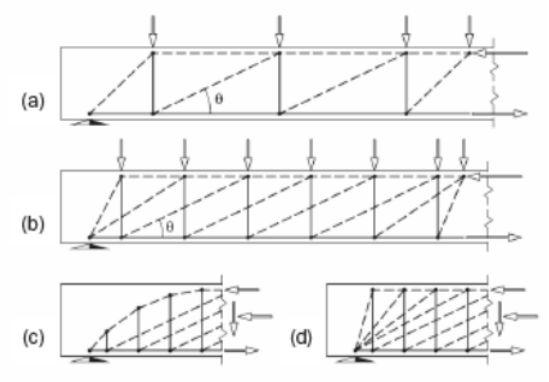


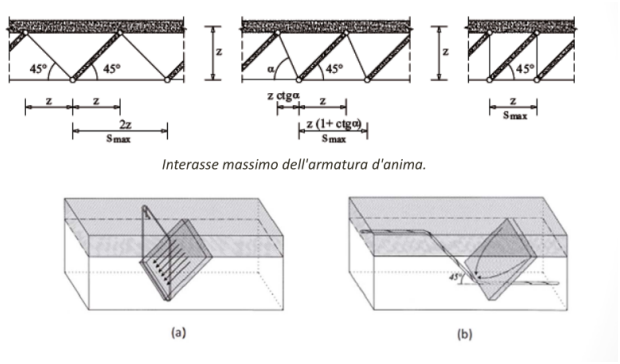
La disposizione di armature aumenta i singoli contributi del meccanismo resistente in assenza di armature in particolare:

- *migliora l'effetto spinotto grazie all'azione di sostegno del corrente teso inferiore;*
- *riduce le trazioni nella sezione di incastro del dente grazie alla presenza dello sforzo di compressione diagonale Cd;*
- *aumenta l'effetto di ingranamento in quanto limita l'apertura delle fessure diagonali;*
- *aumenta la resistenza a compressione diagonale grazie all'azione di confinamento esaltata nei casi in cui le staffe siano sufficientemente ravvicinate;*
- *riduce il rischio di collasso per perdita di aderenza dell'armatura longitudinale tesa in quanto riduce le eventualità di sfondellamento.*

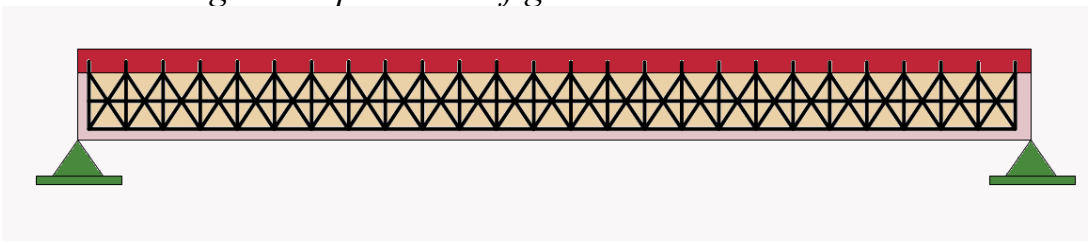
Il traliccio di Morsch *rappresenta il modello fondamentale per valutare la resistenza a taglio di una trave , è isostatico se la armatura è verticale con staffe iperstatico se integrato con sagomati si possono aggiungere anche i ferri di parete; la accuratezza*

e precisione del modello dipende dalla maglia reticolare ovvero quanto minore è il lato della maglia genere quadrata di lato L = 0,9d





La risoluzione della capriata ovvero struttura reticolare consente di calcolare gli sforzi normali in ogni asta con i quali dimensionare le armature, siamo di fronte ad una trave con corrente compresso superiore corrente teso inferiore , aste verticali tese e bielle compresse diagonali. La trave reticolare che meglio approssima il modello resistente a taglio è riportata in figura :

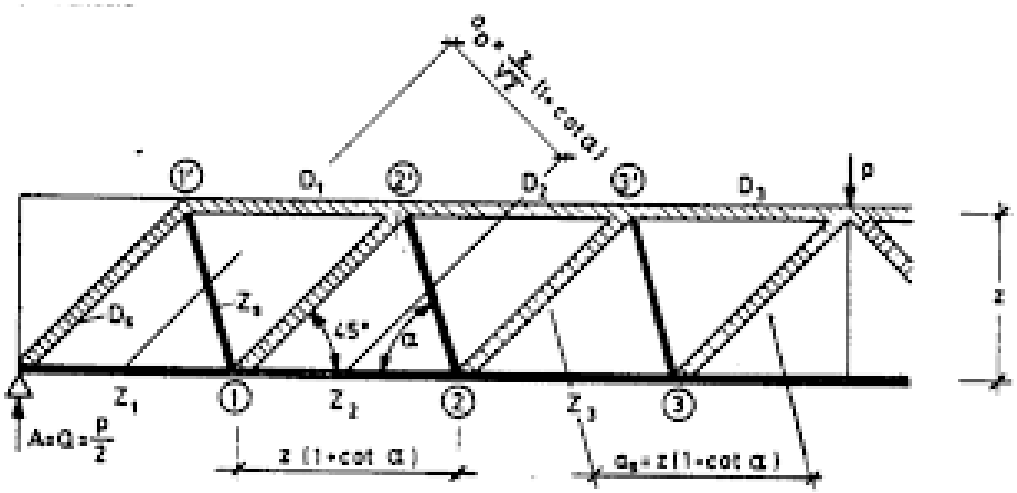


Le diagonali inclinate sono sollecitate da sforzo normale di trazione e compressione che per effetto delle azioni sismiche inverte il suo segno, anche se la maggiore aliquota del taglio sulle travi deriva da carichi verticali; per questi motivi non si utilizzano più i sagomati nelle travi. Una gabbia di armatura come quella in figura offre una grande resistenza a taglio e può essere utilizzata per travi prefabbricate precompresse dove non si hanno problemi di posa in opera con aste verticali diffuse 0,9d/2 ≤ p≤ 0,9d ovvero staffe /20 ÷ 25 cm su tutta la trave per la presenza di diagonali .Le armature a taglio per la nostra trave le calcoliamo con le formule delle NTC 2018, disponendo staffe verticali e ferri di parete .La prima verifica da eseguire concerne la resistenza a taglio V_{RD},ovvero senza predsporre armature deve risultarre

$$V_{RD} > V_{SD} \quad \text{dove } V_{SD} \text{ è la sollecitazione tagliante di calcolo}$$

in regime di taglio puro senza sforzo normale, la max tensione tangenziale corrisponde all'inversione del diagramma delle deformazioni lineare , passando dalla compressione alla trazione. La staffa può essere inclinata , non obbligatoriamemte verticale si hanno 2 angoli carateristici

θ angolo di inclnazione lesione 45°
α angolo di inclinazione 90° per staffa verticale e 45° ÷ 90° staffa inclinata



La resistenza taglio si valuta per la trave fesurata come il valore max tra :

$V_{RD} = [0,18*k*(100*\rho_1*fck)^{1/3}/\gamma_C + 0,15*\sigma_{CP}\ ]*b_W*d$

$V_{RD} = [\upsilon_{min} + 0,15*\sigma_{CP}\ ]*b_W*d$

Altezza utile della sezione $d = H-c$; b_W *larghezza della sezione con max* τ

σ_{CP} *tensione di compressione media* $\sigma_{CP} = N_{cp}/Ac$

$k = 1 + \sqrt{(200/d)} \leq 2$ *d diametro max inerte* $\rho_1 = A_S/(BH)$ *% di armatura*

$fck = Rck + 8$ *N/mmq* $\upsilon_{min} = 0,035*K^{3/2}\sqrt{fck}$

Se risulta $V_{RD} > V_{SD}$ *non occorre armare a taglio*

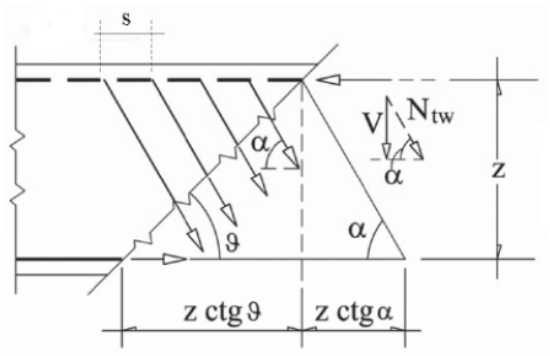
Viceversa se $V_{RD} \leq V_{SD}$ *è necessario eseguire il calcolo delle armature*
Le NTC 2018 riportano la seguente formula

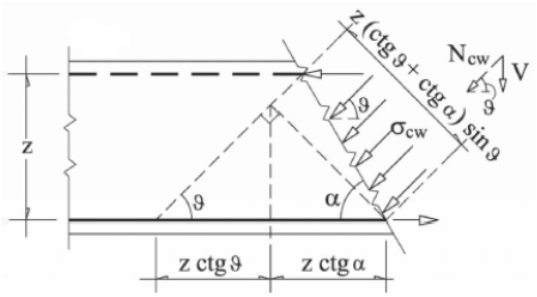
$V_{RDS} = 0,9*d*f_{yd}*A_S/p*(\cot g\alpha + \cot g\theta)*\sin\alpha$

Ricordiamo il significato dei simbomi

braccio coppia interna $0,9*d = 0,9*(H-c)$; A_S *armatura staffe* p *passo* ≤ 10 *cm*

Angolo di inclinazione staffa θ *;Angolo di inclinazione lesione da taglio* α ;





Per la verifica della biella compressa le NTC danno le seguenti indicazioni

$V_{RDC} = 0{,}9*d*b*\upsilon*fcd*\alpha_c*(cot\alpha + cot\theta)/(1+ cot\theta^2)$

Dove $\upsilon*fcd$ *resistenza a compressione ridotta* $fcd/2$

Per il parametro α_c *riportiamo testualmente la mormativa*

Le formule riportate sono di semplice interpretazione

α_c	coefficiente maggiorativo pari a	1	per membrature non compresse
		$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	per $0 \le \sigma_{cp} < 0{,}25\ f_{cd}$
		1,25	per $0{,}25\ f_{cd} \le \sigma_{cp} \le 0{,}5\ f_{cd}$
		$2{,}5\ (1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	per $0{,}5\ f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

Le armature longitudinali devono essere dimensionate in base alle sollecitazioni flessionali ottenute traslando il diagramma dei momenti flettenti di

$$a_1 = (0{,}9 \cdot d \cdot \text{ctg}\ \theta) / 2 \qquad [4.1.30]$$

lungo l'asse della trave, nel verso meno favorevole.

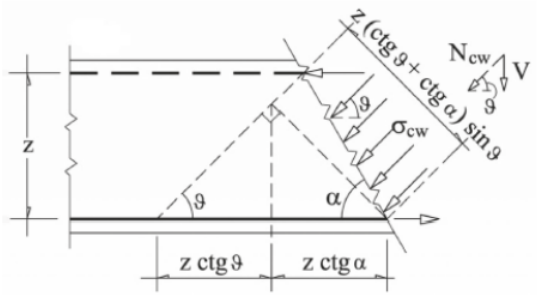
$V_{RDS} = f_{yd}*A_S*\sin\alpha$ A_S/p *numero staffe nel tratto* $z*(cot\alpha + cot\theta)$

braccio coppia interna $z = 0{,}9*d$ *Staffe 2 e 4 braccia*

$V_{RDS} = f_{yd}*A_S/p*\sin\alpha*0{,}9*d*(cot\alpha + cot\theta)$

Per il cls compresso $V_{RDC} = D*b*\upsilon*fcd*\alpha_c$

$D = 0{,}9*d*(cot\alpha + cot\theta)/(1+ cot\theta^2)$



$V_{RDC} = b*\upsilon*fcd*\alpha_c * 0{,}9*d*(cotg\alpha + cotg\theta)*sin\theta$ $\quad sin\theta = 1/(1+ cotg\theta^2)$

La verifica è soddisfatta se $V_{RDC} \geq V_{SDC}$; $V_{RDS} \geq V_{SDS}$;

Le armature a taglio di una trave in calcestruzzo sono staffe verticali e ferri di parete nella ipotesi di taglio puro $\alpha = 90°$; $\theta = 45°$, *la formule su semplficano*

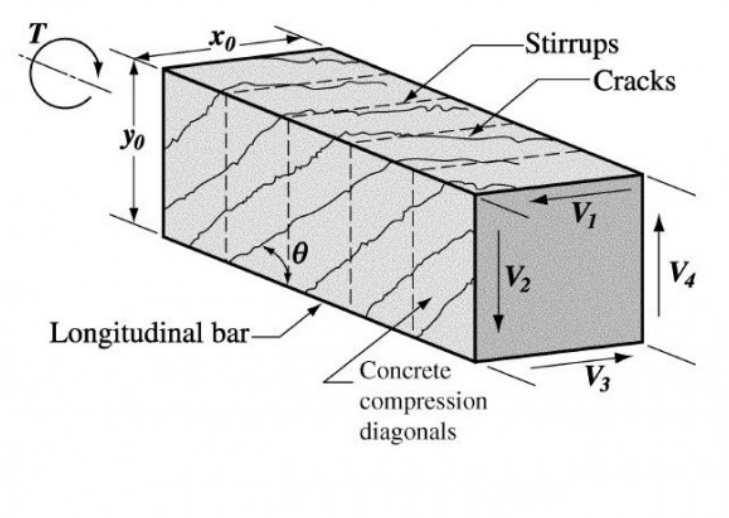
$sin\alpha = 1$ $\quad cotg\alpha = 0$ $\quad cotg\theta) = 1$

$V_{RDS}=0{,}9*d*f_{yd}*A_S/p$ *staffe verticali* $\quad V_{RDS}=f_{yd}*A_S/2$ *ferri di parete*

Area staffe $A_S = p*V_{RDS}/(0{,}9*d*f_{yd})$ $\quad$ *Ferri di parete* $A_S = V_{RDS}/(2*f_{yd})$

La verifica a torsione

Il calcolo e la verifica a torsione di una trave in cemento armato rettangolare lo si esegue dallo studio di prove sperimentali che rivelano l'andamento delle lesioni sulla trave che hanno una forma elicoidale ed inclinate di un angolo θ *come riportate in figura.*



La sezione di calcestruzzo viene trattata come una sezione alla Bredt , con perimetro della linea media pari a

p = 2(b-c)+ 2*(h-c) , l'area della linea media* $A_m = (b-c)*(h-c)$ *spessore t= 2*c*

Le tensioni tangenziali sono costanti lungo lo spessore $\tau = M_T /(2*t*A_m)$

$M_T=(\tau*2*t*A_m)$

La verifica a torsione come per il taglio concerne il calcestruzzo e le armature metalliche che vengono calcolate attraverso una schematizzazione degli elementi resistenti a traliccio. La armatura a torsione consiste in ferri longitudinali e staffe.
T_{RD} *= Momento torcente resistente* $\leq T_{ED}$ *= Momento torcente di progetto*

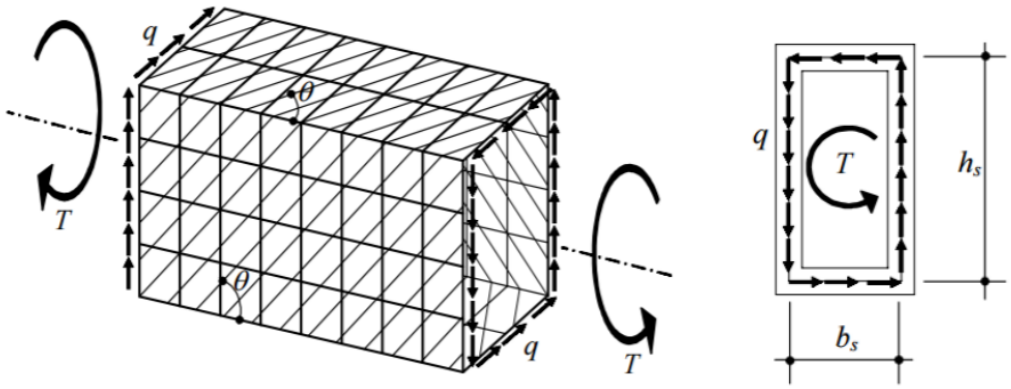
$T_{RDC} = 2*A *t*f'_{cd}* cotg\theta/(1+cotg\theta^2) \leq T_{ED}$ *Calcestruzzo*

$T_{RDSst} = 2*A*As/s *f_{yd}*cotg\theta \leq T_{ED}$ *Staffe*

$T_{RDSl} = 2*A * f_{yd}/cotg\theta \sum A_{si} /u_m \leq T_{ED}$ *Barre longitudinali*

θ *inclinazione della lesione*
As area complessiva staffe
s passo staffe
A area racchiusa dalla linea media $A= (b-.c)*(h-c)$
$\sum A_{si}$ *area complessiva barre longitudinali*
u_m *perimetro medio* $2*(b-c) + 2*(h-c)$
$t = 2c$ *spessore sezione alla bredt*
$f'_{cd}*= 0,5*f_{cd}$ *resitenza a compressione cls* $f_{cd} = 0,83*0,85*Rck/1,5$
f_{yd}* *resistenza snervamento acciaio per FEB 450* $f_{yd}=450/1,15= 391$ *N/mmq*

Si individua un traliccio resistente a torsione :

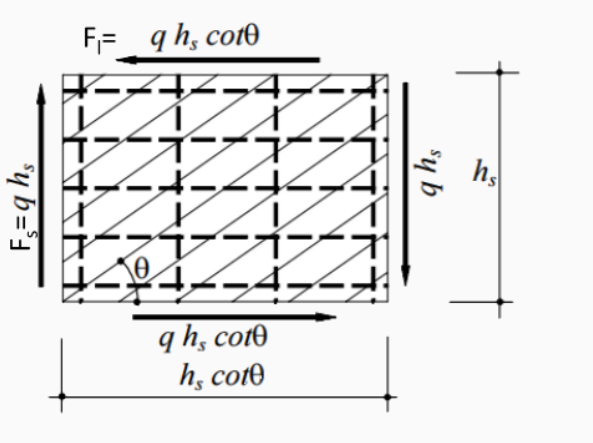


costituito da armatura verticale (staffe), orizzontale (barre longitudinali) e bielle compresse .
Momento resistente dovuto alle armature

$q = \tau*t = M_T/(2*A)$;

La forza longitudinale $F_L = M_T/(2*A)*h_s *cotg\theta$

La forza verticale sulle staffe $F_V = M_T/(2*A)*h_s$



Il calcolo delle armature è immediato

$A_{SL}= F_L/f_{yd} = M_T/(2*A*f_{yd})*h_s *tg\theta$; $M_T =2*A *f_{yd} * A_{SL}/(h_s *cotg\theta)$

L'area longitudinale $A_{SL} = 1/ h_s *\sum A_{SI} /u_m$

$T_{RDSl} = 2*A * f_{yd}/cotg\theta \sum A_{si} /u_m \leq T_{ED}$

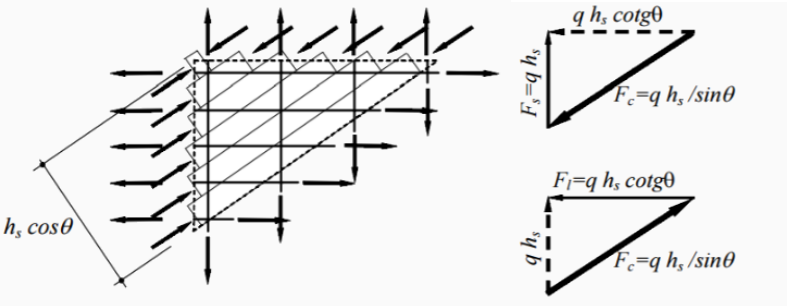
L'area di ferro delle staffe

$A_{Sst}= F_V/f_{yd} =M_T/(2*A*f_{yd})*h_s$; $M_T=(2*A*f_{yd})*A_{Sst}/h_s$

l'area staffe $A_{Sst} = h_s* cotg\ \theta*A_{Sst}/s$

$T_{RDS} = (2*A*f_{yd})*h_s* cotg\ \theta*A_{Sst}/(s *h_s)= (2*A*f_{yd})* cotg\ \theta*A_{Sst}/s \leq T_{ED}$

La verifica della biella compressa e quindi del cls



La forza di compressione nelle bielle compresse

$F_C = M_T /2*A* h_S / sin\theta = \sigma_c *t* h_s*cos\theta$ $\sigma_c= 0,5*fcd$

$M_T = 2*A* t *b*0,5*f_{cd} *cos\theta*sin\theta$ $t = 2* c$ c copriferro

$cos\theta*sin\theta = sin\theta^2 *cotg\ \theta = cotg\ \theta /(1+cotg\ \theta^2)$

$T_{RDC} = 2*A *t*f'_{cd}* cotg\theta/(1+cotg\theta^2) \leq T_{ED}$

L' eurocode 2 EN 1992 *per la verifica del cls indica la seguente formula :*

$T_{RDC} = 2*A *t*\upsilon*f_{cd}/(tg\theta+cotg\theta) \leq T_{ED}$ *analoga alla precedente poichè*

$cotg\theta/(1+cotg\theta^2) = 1/(tg\theta+cotg\theta)$

$t \leq A /u$ *spessore effettivo* $u = 2b+2H ; A = b*H$

$\upsilon= 0,7*(0,7+fck/200) \geq 0,35$

θ *angolo tra le bielle compresse inclinazione della lesione scelto come*

$|0,4| < cotg\theta < |2,5|$; $|1| < cotg\theta < |2,0|$;

Per le armature metalliche staffe e barre longitudinali da delle formule analoghe

$T_{RDS} = (2*A*f_{yd})* cotg\ \theta*A_{Sst}/s$

$T_{RDSl} = 2*A * f_{yd}/cotg\theta \sum A_{si} /u_m$

con $tg\theta^2 = [f_{yd} *A_{Sst}/s]/[f_{yd}*\sum A_{si} /u_m]$

angolo da confrontare con le limitazioni di cui sopra

L'armatura longitudinale

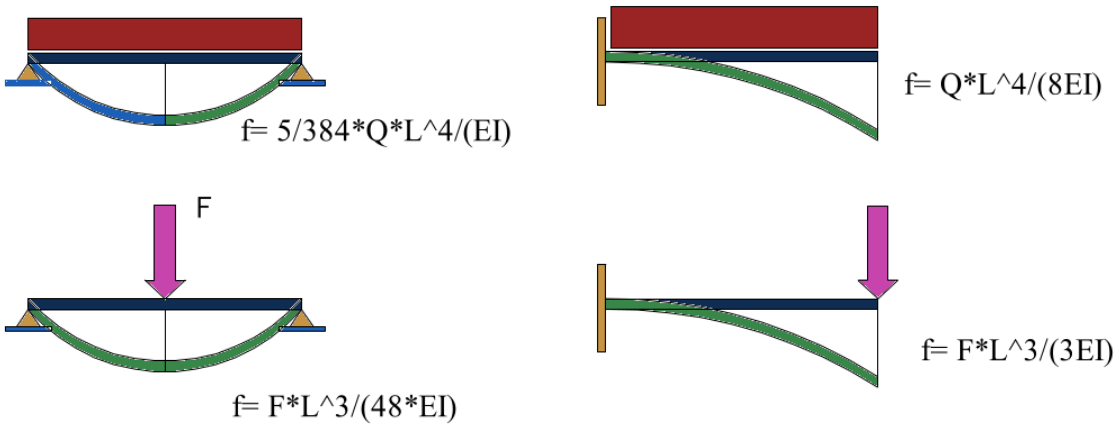
$A_{SL} *f_{YLD} = T_{RDSl} * cotg\theta * u_M/A_M$ *dove*

$T_{RDSl} = 2*A* [A_{Sst}/s *f_{ydW} *A_{sL} /u_m *f_{ydL}]^{1/2}$

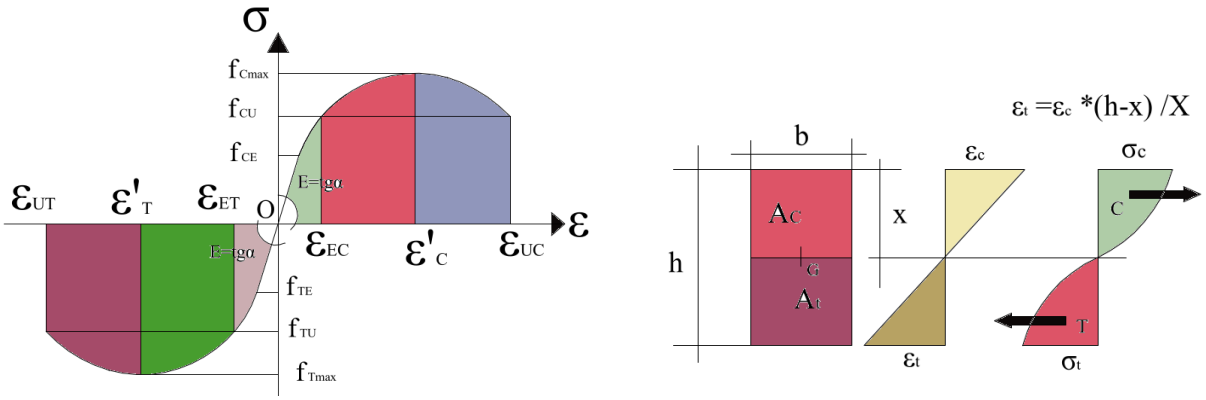
11- Il calcolo delle frecce

La determinazione degli spostamenti viene eseguita nella ipotesi di comportamento

elastico lineare del materiale , isotropo omogeneo come dalla scienza delle costruzioni ;



La deformata della trave si ottiene dalla doppia integrazione integrazione della curvatura M/EI



$V(z) = \int[\int M(z)/E(z)I\, dz]dz$ $\sigma(\varepsilon)=a_1*\varepsilon^3+a_2*\varepsilon^2+a_3*\varepsilon$

Il modulo elastico è variabile $E(z)= d\,\sigma(\varepsilon)/d\varepsilon =3*a_1*\varepsilon^2+a_2*\varepsilon+a_3$

Per il calcolo della deformazione si può far riferimento ad un valore medio approssimando la curva in tre tratti

$E_1=f_{ce}/\varepsilon_{CE}$; $E_2=f_{cMAXi}/\varepsilon_{CE}$; $E_3=f_{CU}/\varepsilon_{UC}$; *Dividendo in 3 integrali la deformata*

La curvatura M/EI può essere scritta nella forma $\chi =2*\varepsilon/H$

dove la deformazione $\varepsilon= \sigma/E$ *con* $\sigma_C = 4{,}67*M(z)/(b*h^2)$

$M(z)= z*Q*L/2 - Q*Z^2/2 = Q/2*[z*L- z^2]$ *Trave appoggiata agli estremo*

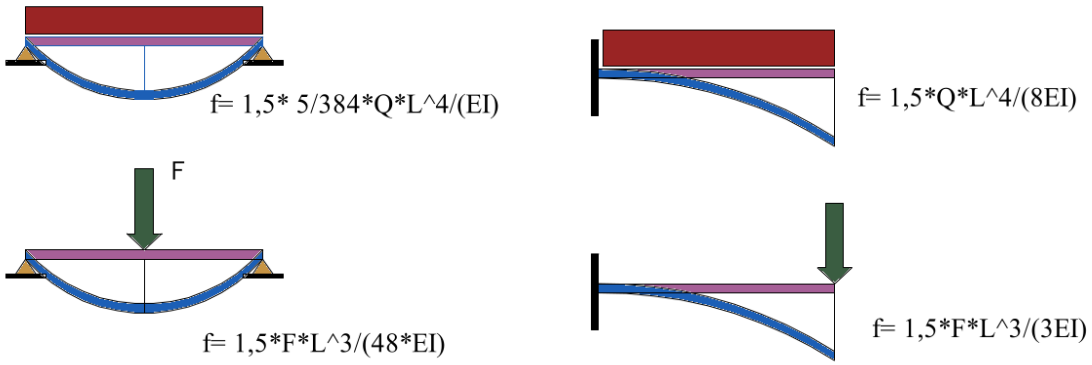
$\varepsilon(z) = 2*4{,}67*M(z)/(E*b*h^2)=4{,}67*Q*/(b*h^2)*[z*L- z^2] /(\Omega Eo)$ *dove*

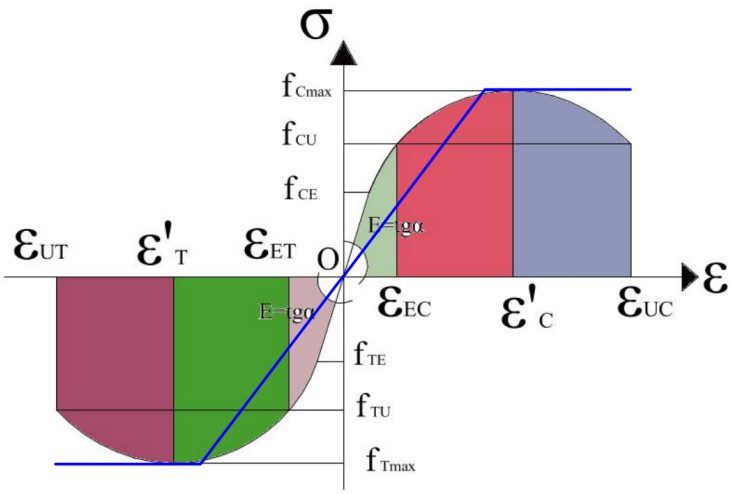
Eo modulo di elasticità normale all'origine , mentre $\Omega= 1/3$ *un coefficiente*

$\Omega = \int E(z)dz/\,(Eo*L)$ $\quad \int E(z)dz=\int(3*a_1*\varepsilon^2+a_2*\varepsilon+a_3)dz = 2/3*Eo*L$

la freccia in mezzeria $\quad f = 5/384*3/2*Q*L^4/(Eo*I) = 15/768*Q*L^4/(Eo*I)$

Per semplice analogia utilizzando un modulo elastico pari ai 2/3 del modulo all'origine





In funzione del legame costitutivo tensione deformazione del materiale , possiamo definire un modulo elastico equivalente (secante) $E_{eq} = \Omega * Eo$ *con* $\Omega \leq 1$ *utilizzando le stesse formule per i relativi schemi statici*

12- Le sezioni di forma qualsiasi :Modellazione FEM di travi .

La verifica di sezioni in calcestruzzo armato di forma qualsiasi la si esegue attraver-

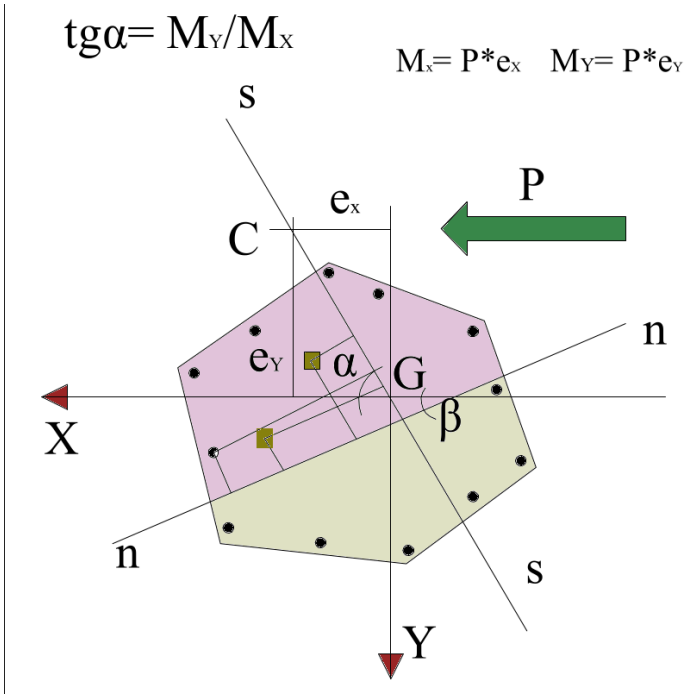
so la soluzione di sistema di equazioni in 3 incognite quali il momento resistente ultimo , la profondità dell'asse neutro e la sua inclinazione :

$\iint \sigma dxdy - \sum \sigma s * As + \sum \sigma' s * A' s = P$ *Traslazione tensioni normali*

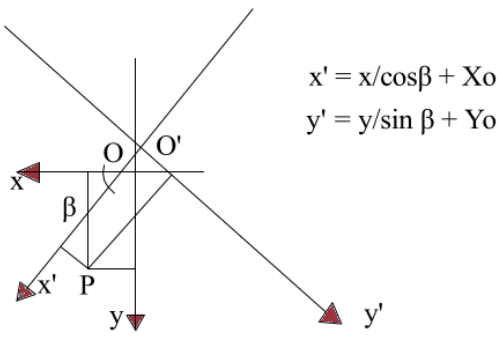
$\iint \sigma * \lambda_s dxdy - \sum \lambda_{SI} * \sigma s * As + \sum \lambda_{SI} * \sigma' * A' s = 0$ *Rotazione asse di sollecitazione*

$\iint \sigma * (\lambda_N - \lambda_G) dxdy - \sum (\lambda_{NI} - \lambda_G) * \sigma s * As + \sum (\lambda_{SI} - \lambda_G) * \sigma' * A' s = M_{RD}$ *Rotazione asse baricentrico*

Data la forma della sezione la disposizione delle armature è semplice costruire il dominio di rottura ovvero il bulbo tridimensionale.



Le coordinate del baricentro $X_G = \int X dA / A$; $Y_G = \int y dA / A$; *2 integrali doppi , la incognoità è l'asse neutro di equazione* $Y = m*x+n$ *dove* $m = tg\beta$ $n = (\lambda_N - \lambda_G)/cos\beta$
Con una traslazione del sistema di riferimento $x' = \lambda_N$; $y' = \lambda_S$;



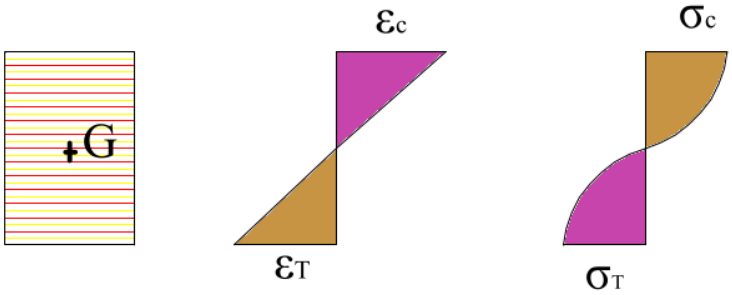
Xo e Yo coordinate del punto di intersezione tra n ed s ovvero soluzione del sistema di equazioni

$Y = x*tg\beta + n$
$Y= x* M_Y/M_X + (e_x *M_Y/M_X - e_y)$ con $e_x = M_{SDX}/P_{SD}$; $e_Y = M_{SDX}/P_{SD}$;

$Xo = [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$
$Yo = [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]*tg\beta + n$

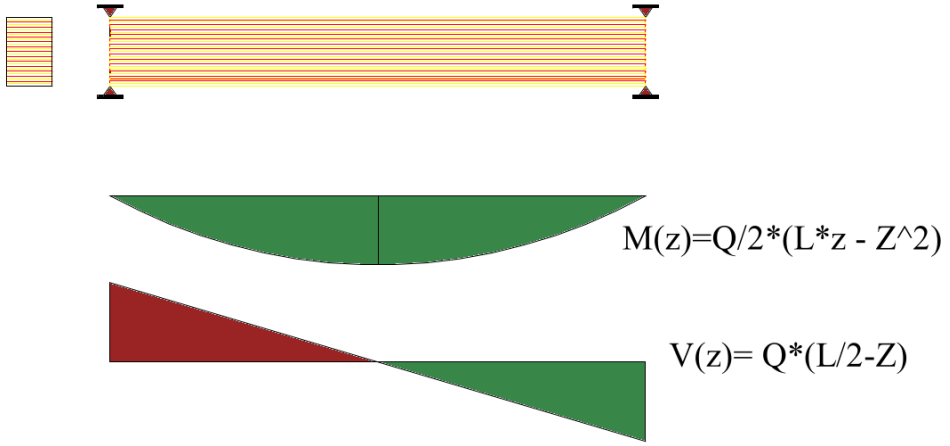
$\lambda_N= X/cos\beta + [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]$;
$\lambda_S= Y/sin\alpha + [n-(e_x *M_Y/M_X - e_y)]/[tg\beta + M_Y/M_X]*tg\beta + n$

Definito il dominio di integrazione (area rosata), funzione delle coordinate dei vertici e dell'asse neutro si può risolvere il sistema di equazioni ricavare il Momento ultimo
La verifica viene eseguita tramite software trasformando gli integrali come sommatoria discretizzando la sezione per un nuovo approccio al calcolo delle strutture in cemento armato ovvero modello a fibre che tenga conto della armatura e del cls infinitesimo modellando il cls agli elementi finiti brick.
Per una trave a sezione rettangolare di Luce L possiamo utilizzare una modellazione fibre ***(plate- shell)*** *di spessore ΔY e larghezza B assieme alla armatura metallica come riportata in figura*



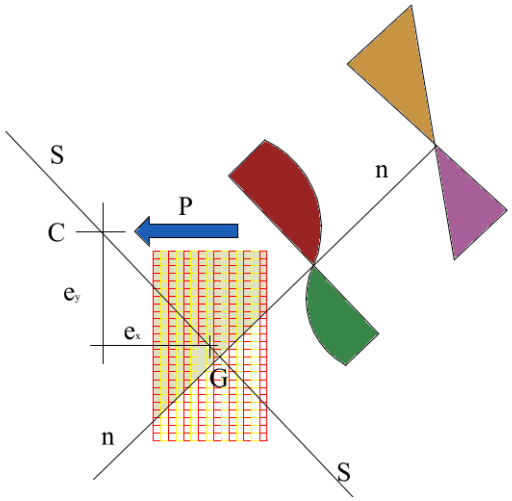
La verifica $B*\int\sigma_c\, dy - B*\int\sigma_T\, dy = P$ *in generale pressoflessione*

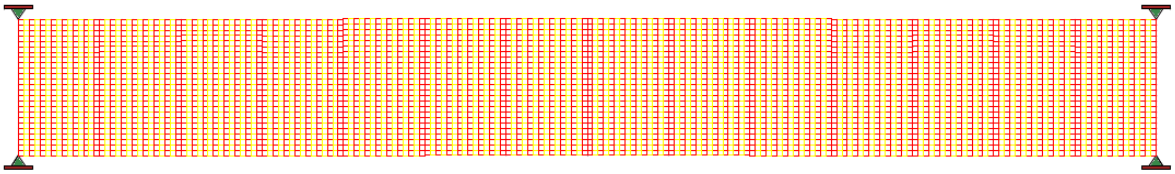
$\sum\sigma_c\, \Delta y - \sum\sigma_T\, \Delta y = P/B$ $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n= H/\Delta Y$ *numero fibre*



Questa modellazione a fibre si adatta bene alla flessione e pressoflessione retta con asse di sollecitazione coincidente con l'asse di flessione e asse neutro baricentrico orizzontale e ortogonale ad s-s. Se invece siamo di fronte alla sollecitazione deviata ,

*conviene modellare la sezione tramite elementi areali infinitesismi dA= dx*dy*





La verifica $\int\sigma_c\, dA - \int\sigma_T\, dA = P$ *in generale pressoflessione*

$\sum\sigma_c\, \Delta y^* \Delta x - \sum\sigma_T\, \Delta y^* \Delta x = P$ *Traslazione tensioni normali*

$i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n = H/\Delta Y \quad m = B/\Delta X$ *elementi areali*

$\sum\sigma_c\, \Delta y^* \Delta x\, ^* \lambda_{SI} - \sum\sigma_T\, \Delta y^* \Delta x\, ^* \lambda_{SI} = 0$ *rotazione intorno ad s*

$M_{RD} = \sum\sigma_c\, \Delta y^* \Delta x\, ^* (\lambda_{NI} - \lambda_{GN}) + \sum\sigma_T\, \Delta y^* \Delta x\, ^* (\lambda_{NI} - \lambda_{GN})$ *Momento Ultimo della sezione*

Rispetto al baricentro geometrico G distanza della singola area dal baricentro $(\lambda_{NI} - \lambda_{GN})$

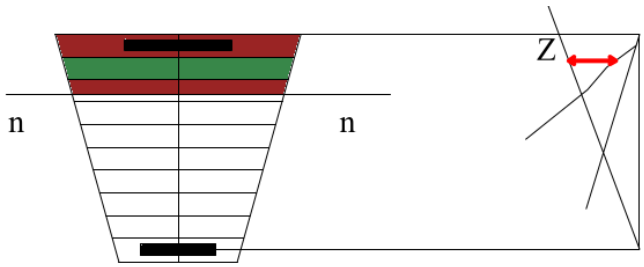
Il de Saint Venant definiva la trave come un tronco a sezione costante caricato sulle due basi libere , attraverso la modellazione FEM si può calcolare lo stato tensionale i ogni elemento o fibra

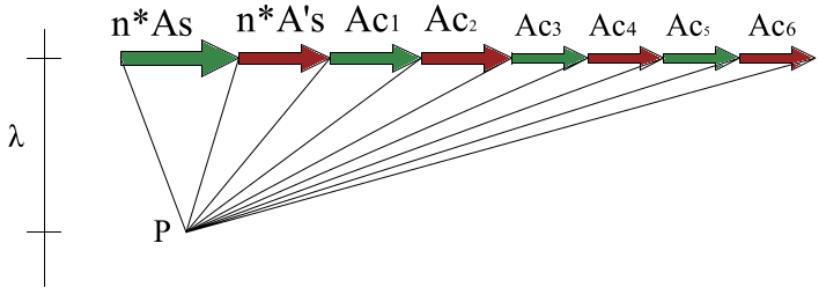
-Modello a fibre
-Modello Brick

Del quale ci occuperemo in un capitolo dedicato.

13- La statica grafica

La statica grafica è un antico (anni 1950-1960) metodo grafico per la verifica di sezioni in cemento armato , ormai non più utilizzato ; dalla mia pratica di insegnante di costruzione e impianti mi è stato richiesto da parte degli studenti come argomento di studio e spiegazione nel 2016. La verifica consiste per sezioni di forma qualsiasi nella individuazione della posizione dell'asse neutro ovvero la profondità X e le tensioni max nel cls compresso e acciaio teso, essendo la sezione simmetrica conosciamo a priori la direzione dell'asse neutro . Costruiamo un poligono di vettori proporzionali alle aree di polo P n = Ec/Ec=15 coefficiente di omogeneizzazione.

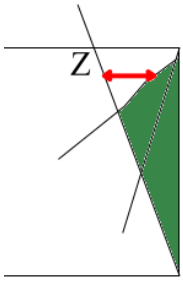




Dal poligono dei vettori ci costruiamo un poligono funicolare , la posizione dell'asse neutro è individuata dal punto di chiusura del poligono funicolare , mentre le tensioni al bordo compresso e nell'acciaio teso. I segmenti Z come dalla statica grafica rappresentano i momenti statici delle aree di ferro e di cls nulli rispetto al baricentro della sezione ovvero all'asse neutro:

$$\int X*dA + n*\sum A_{FI}*X_{FI} = 0 \qquad \text{si ricava la profondità } \xi*d$$

Il valore della tensione max $\sigma = M*\xi*d / I$ *dove I è l'area racchiusa nel poligono funicolare*



14 - Conclusioni

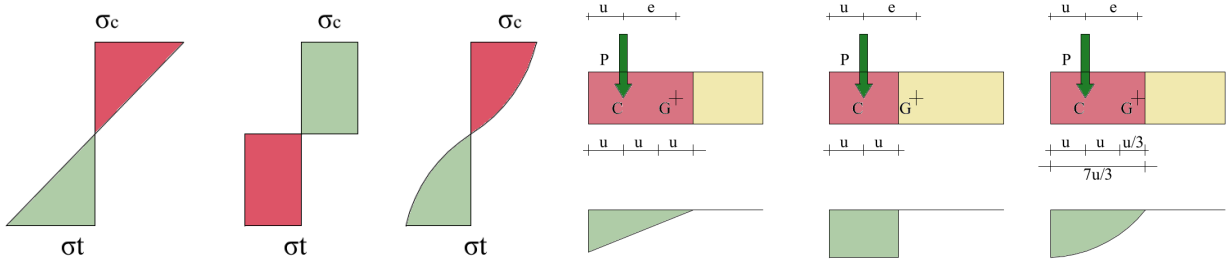
La verifica e la progettazione di sezioni fa parte integrante della scienza del costruzioni , le prime formulazioni risalgono al De Saint Venant (1800)in Francia con un solido cilindrico caricato sulle 2 basi libere nella ipotesi di elasticità lineare isotropia ed o omogeneità del materiale risolvendo un sistema di equazioni differenziali co funzioni polinomiali , formule attuali ancora oggi nelle varie normative con la formula di ***Navier*** *e di* ***Jowrasky*** *e materiale non reagenti a trazione.*

$\sigma = M*y/I$; $\sigma = P/A \pm M*y/I$ retta

$\sigma = M_y*y/I_y + M_X*x/I_X$; $\sigma = P/A \pm M_y*y/I_y \pm M_X*x/I_X$ deviata

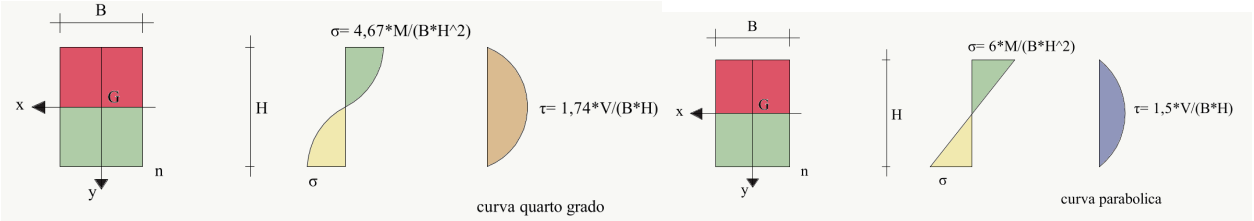
La verifica di una sezione è funzione del materiale ovvero del legame costitutivo che i questo articolo è stato definito utilizzando una formulazione polinomiale di tipo cubico adatto per il legno il calcestruzzo la muratura l'acciaio e l'alluminio ect Il risultato forse più confortevole diciamo piacevole è stato il superamento della formula di Navier nuove formule per il taglio e materiale non reagente a trazione.

$\sigma_C = 6*M/(b*h^2)$; $\sigma_C = 4*M/(b*h^2)$; $\boldsymbol{\sigma_C = 4{,}67*M/(b*h^2)}$



$W_{EL} = (B*H/2)*H/3$; $W_{PL} = (B*H/2)*H/2$; $W_{PLC} = (B*H/2)*3H/7$;

Il modulo di resistenza è dato dal prodotto di metà dell'area per la distanza tra le due risultanti di trazione e compressione ovvero braccio della coppia interna
Il rapporto tra i moduli di resistenza
$W_{PL}/W_{EL} = 1{,}5$; $W_{PL}/W_{PLC} = 7/6 = 1{,}167$ $W_{PLC}/W_{EL} = 9/7 = 1{,}285$



Per diagramma delle tensioni lineare la variazione della tensione tangenziale era parabolica ,ora per diagramma delle tensioni cubico la legge di variazione è del quarto ordine. Sono delle formule elementari che forse fanno la storia del scienza e tecnica delle costruzioni ma come ben sappiamo il luminare straordinario con il regolo calcolatore degli anni 60-70 le ha tenute con se senza pubblicarle in modo che vengano applicate o inserite nelle NTC ed Eurocode

La verifica di elementi strutturali composti

1- Introduzione

2- I materiali, acciaio -cls - alluminio.

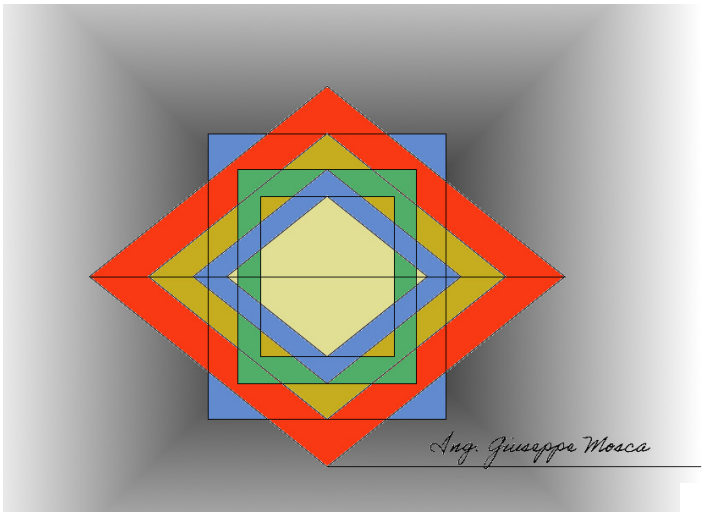
3-La trave il solaio

4 La colonna

5- Collegamento trave pilastro

6- La progettazione sismica

7- Conclusioni

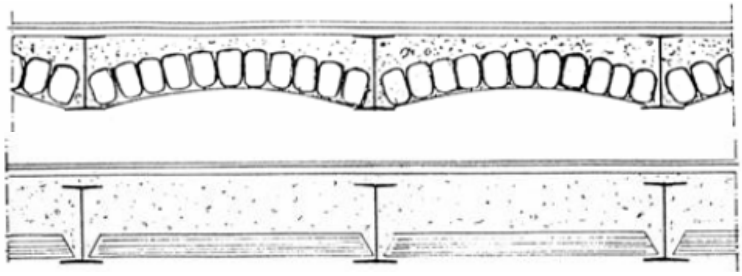




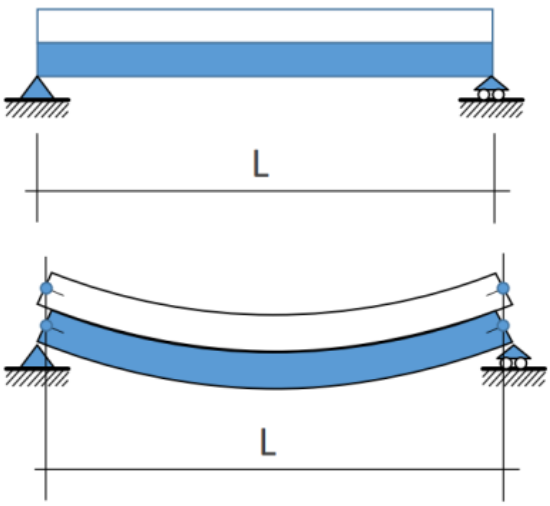
N.B. Mi scuso a priori di eventuali imprecisioni o errori che se segnalati contribuiscono al miglioramento degli appunti

1- Introduzione

Le strutture composte acciaio cls o alluminio cls rappresentano una valida alternativa alle strutture metalliche poichè ridimensionano le problematiche dovute alla instabilità strutturale , mentre rispetto alle strutture in cemento armato consentono di avere sezioni ridotte con elementi strutturali meno ingombranti. Gli edifici con struttura mista sono degli edifici sismoresistenti in sintonia con le norme italiane NTC2018 l'acciaio e il calcestruzzo vanno solidarizzati attraverso dei connettori metallici in modo che la deformata degli elementi strutturali sia uniforme senza che si abbiano degli scorrimenti relativi tra metallo e calcestruzzo e che le inerzie siano quelle relative alla sezione composta con collegamento infinitamente rigido . La inerzia va calcolata omogeneizzando i due materiali utilizzando un adeguato coefficiente di omogeneizzazione come detto ipotizzando che il collegamento tra i due materiali sia rigido applicando la teoria delle sezioni composte ampiamente studiata per le sezioni miste in legno . Esistono sin dai tempi passati degli esempi di sezioni composte come il solaio con voltine di laterizio e travi di ferro o i solai con soletta collaborante in cls tuttora utilizzati attraverso la lamiera gregata come cassero collaborante a perdere. Le strutture composte acciaio cls vengono utilizzate soprattutto negli impalcati delle travi da ponte li ritroviamo nelle nostre abitazioni sotto forma di solai con putrelle di acciaio e soletta collaborante molto spesso privi di connettori e quindi con scorrimento relativo affidato esclusivamente all'aderenza tra i due materiali .



In tal caso il momento di inerzia della sezione non è quello della sezione composta con collegamento infinitamente rigido poichè si hanno degli scorrimenti relativi tra i due materiali



2- I materiali, acciaio -cls - alluminio.

I materiali utilizzati sono per il metallo l'acciaio e l'alluminio mentre il calcestruzzo come parte collaborante ampiamente normate dalle NTC 2018 e dall'eurocodice 9 e le istruzioni CNR DT 208/2011 per le strutture in alluminio.

Acciaio

Gli acciai per impiego strutturale devono appartenere ai gradi da S235 a S460 aventi le seguenti caratteristiche meccaniche :
Laminati a caldo con profili a sezione aperta

Tab. 4.2.I – *Laminati a caldo con profili a sezione aperta piani e lunghi*

Norme e qualità degli acciai	Spessore nominale "t" dell'elemento			
	t ≤ 40 mm		40 mm < t ≤ 80 mm	
	f_{yk} [N/mm²]	f_{tk} [N/mm²]	f_{yk} [N/mm²]	f_{tk} [N/mm²]
UNI EN 10025-2				
S 235	235	360	215	360
S 275	275	430	255	410
S 355	355	510	335	470
S 450	440	550	420	550
UNI EN 10025-3				
S 275 N/NL	275	390	255	370
S 355 N/NL	355	490	335	470
S 420 N/NL	420	520	390	520
S 460 N/NL	460	540	430	540
UNI EN 10025-4				
S 275 M/ML	275	370	255	360
S 355 M/ML	355	470	335	450
S 420 M/ML	420	520	390	500
S 460 M/ML	460	540	430	530
S460 Q/QL/QL1	460	570	440	580
UNI EN 10025-5				
S 235 W	235	360	215	340
S 355 W	355	510	335	490

Laminati a caldo con profili a sezione cava

Tab. 4.2.II - *Laminati a caldo con profili a sezione cava*

Norme e qualità degli acciai	Spessore nominale "t" dell'elemento			
	t ≤ 40 mm		40 mm < t ≤ 80 mm	
	f_{yk} [N/mm²]	f_{tk} [N/mm²]	f_{yk} [N/mm²]	f_{tk} [N/mm²]
UNI EN 10210-1				
S 235 H	235	360	215	340
S 275 H	275	430	255	410
S 355 H	355	510	335	490
S 275 NH/NLH	275	390	255	370
S 355 NH/NLH	355	490	335	470
S 420 NH/NLH	420	540	390	520
S 460 NH/NLH	460	560	430	550
UNI EN 10219-1				
S 235 H	235	360		
S 275 H	275	430		
S 355 H	355	510		
S 275 NH/NLH	275	370		
S 355 NH/NLH	355	470		
S 275 MH/MLH	275	360		
S 355 MH/MLH	355	470		
S 420 MH/MLH	420	500		
S460 MH/MLH	460	530		
S460 NH/NHL	460	550		

La verifica di sicurezza nei confronti dello stato limite ultimo è assicurata dalla relazione $R_D \geq E_D$ *dove Il valore di progetto della resistenza di un dato materiale* X_d *è, a sua volta, funzione del valore caratteristico della resistenza, definito come frattile 5 % della distribuzione statistica della grandezza, attraverso l'espressione:*
$X_d = X_K/\gamma_M$, *essendo* γ_M, *il fattore parziale associato alla resistenza del materiale.*
La capacità di garantire le prestazioni previste per le condizioni di esercizio (SLE) deve essere verificata confrontando il valore limite di progetto associato a ciascun aspetto di funzionalità esaminato (C_d), *con il corrispondente valore di progetto dell'effetto delle azioni* (E_d), *attraverso la seguente espressione formale:*
$C_d \geq E_d$
Per le strutture composte acciaio cls si utilizzano i seguenti coefficienti parziali per i corrispondenti stati limite

Stato limite ultimo $\gamma_M = 1{,}05$ *Stato limite di esercizio* $\gamma_M = 1$
$F_d = F_k/\gamma_M$ F_k *resistenza caratteristica del materiale allo snervamento*
Per un acciaio S355 $F_D = 338$ *N/mmq SLU mentre allo SLE* $F_D = 355$ *N/mmq*

Alluminio
Le costanti del materiale da adottarsi nei calcoli per le leghe di alluminio considerate devono essere assunte come segue:
- modulo di elasticità $E = 70000$ *N/mm²;*
- modulo di elasticità tangenziale $G = 27000$ *N/mm²;*
- coefficiente di Poisson $\upsilon = 0{,}3$;
- coefficiente di dilatazione termica lineare $\alpha = 23 \times 10^{-6}$ *per °C;*
- massa specifica $\rho = 2700$ *Kg/m³.*
Le proprietà meccaniche dei prodotti laminati :

Lega EN AW-	Stato fisico	Spessore	f_0	f_u	A_{50}	$f_{0,haz}$	$f_{u,haz}$	Fattore HAZ		BC	n_p
		mm	N/mm²		%	N/mm²		$\rho_{0,haz}$	$\rho_{u,haz}$		
3004	H14|H24/H34	≤ 6|3	180|170	220	1|3	75	155	0.42|0.44	0.70	B	23|18
	H16|H26/H36	≤ 4|3	200|190	240	1|3			0.38|0.39	0.65	B	25|20
3005	H14|H24	≤ 6|3	150|130	170	1|4	56	115	0.37|0.43	0.68	B	38|18
	H16|H26	≤ 4|3	175|160	195	1|3			0.32|0.35	0.59	B	43|24
3103	H14|H24	≤ 25|12.5	120|110	140	2|4	44	90	0.37|0.40	0.64	B	31|20
	H16|H26	≤ 4	145|135	160	1|2			0.30|0.33	0.56	B	48|28
5005	O/H111	≤ 50	35	100	15	35	100	1	1	B	5
	H12|H22/H32	≤ 12.5	95|80	125	2|4	44	100	0.46|0.55	0.80	B	18|11
	H14|H24/H34	≤ 12.5	120|110	145	2|3			0.37|0.40	0.69	B	25|17
5052	H12|H22/H32	≤ 40	160|130	210	4|5	80	170	0.50|0.62	0.81	B	17|10
	H14|H24/H34	≤ 25	180|150	230	3|4			0.44|0.53	0.74	B	19|11
5049	O/H111	≤ 100	80	190	12	80	190	1	1	B	6
	H14|H24/H34	≤ 25	190|160	240	3|6	100	190	0.53|0.63	0.79	B	20|12
5454	O/H111	≤ 80	85	215	12	85	215	1	1	B	5
	H14|H24/H34	≤ 25	220|200	270	2|4	105	215	0.48|0.53	0.80	B	22|15
5754	O/H111	≤ 100	80	190	12	80	190	1	1	B	6
	H14|H24/H34	≤ 25	190|160	240	3|6	100	190	0.53|0.63	0.79	B	20|12
5083	O/H111	≤ 50	125	275	11	125	275	1	1	B	6
		50<t≤80	115	270	14*	115	270			B	
	H12|H22/H32	≤ 40	250|215	305	3|5	155	275	0.62|0.72	0.90	B	22|14
	H14|H24/H34	≤ 25	280|250	340	2|4			0.55|0.62	0.81	A	22|14
6061	T4/T451	≤ 12.5	110	205	12	95	150	0.86	0.73	B	8
	T6/T651	≤ 12.5	240	290	6	115	175	0.48	0.60	A	23
	T651	12.5<t≤80	240	290	6*						
6082	T4/T451	≤ 12.5	110	205	12	100	160	0.91	0.78	B	8
	T61/T6151	≤12.5	205	280	10	125	185	0.61	0.66	A	15
	T6151	12.5<t≤100	200	275	12*			0.63	0.67	A	14
	T6/T651	≤ 6	260	310	6			0.48	0.60	A	25
		6<t≤12.5	255	300	9			0.49	0.62	A	27
	T651	12.5<t≤100	240	295	7*			0.52	0.63	A	21
7020	T6	≤ 12.5	280	350	7	205	280	0.73	0.80	A	19
	T651	≤ 40			9*						
8011A	H14|H24	≤ 12.5	110|100	125	2|3	37	85	0.34|0.37	0.68	B	37|22
	H16|H26	≤ 4	130|120	145	1|2			0.28|0.31	0.59		33|33

La caratterizzazione analitica del legame tensione (s)–deformazione (e) di una lega di alluminio può essere perseguita tramite modelli a tratti o modelli continui.

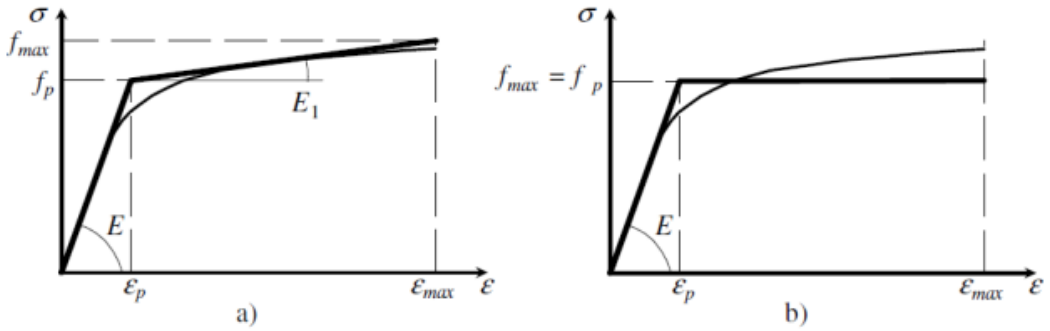


Figura I-2.1: Modelli bi-lineari.

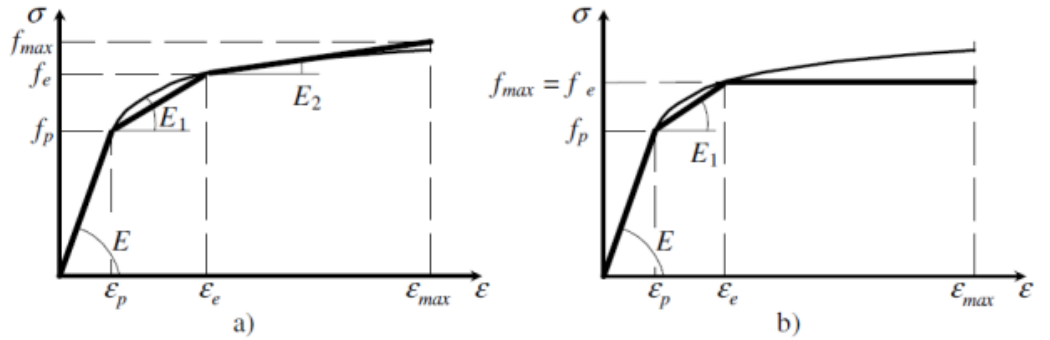


Figura I-2.2: Modelli tri-lineari.

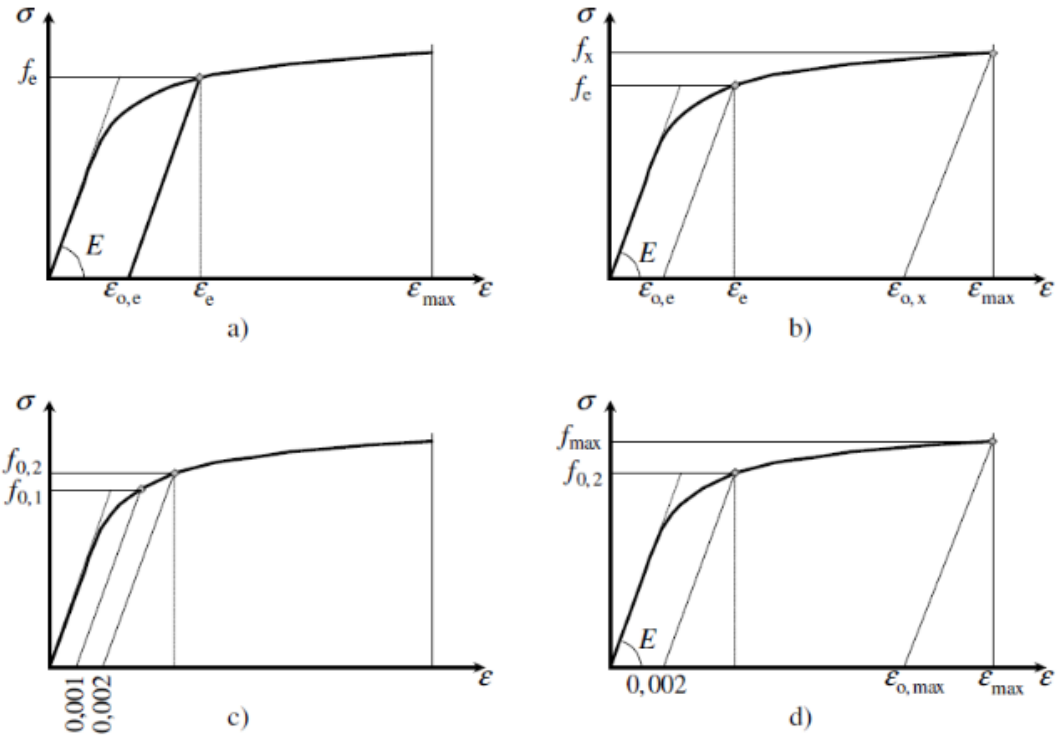
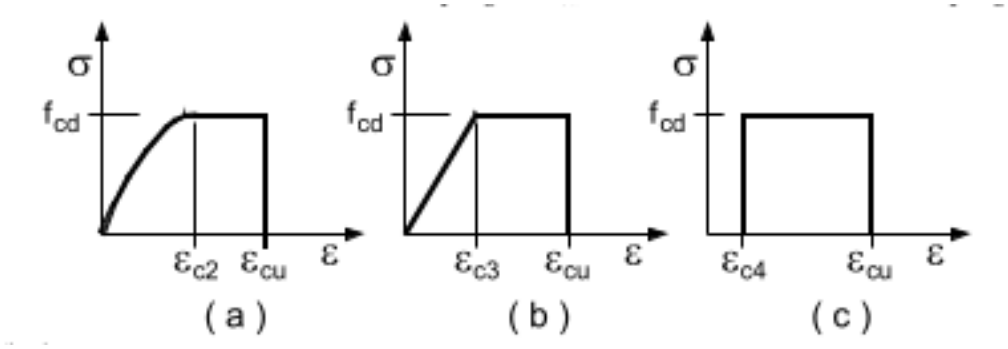


Figura I-2.4: Modelli continui del tipo $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$.

Per lo stato limite di esercizio si utilizza per l'alluminio un coefficiente parziale unitario mentre allo stato limite ultimo $\gamma_M = 1,10$

Calcestruzzo

Al solito per quanto concerne il cls si fa riferimento ad un diagramma parabola rettangolo come riportato nelle NTC 2018



Per lo stato limite di esercizio si utilizza per il calcestruzzo un coefficiente parziale unitario mentre allo stato limite ultimo $\gamma_M = 1{,}50$

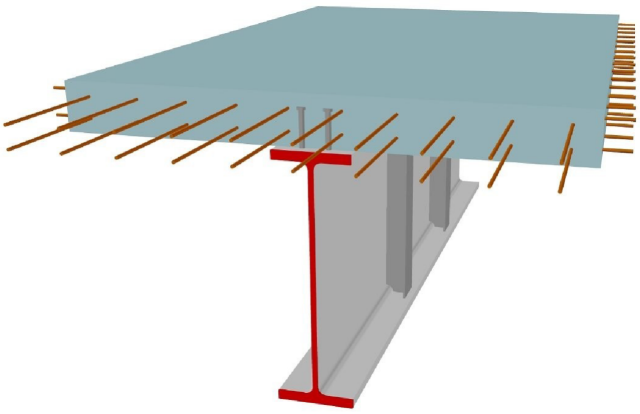
Per quanto concerne la valutazione della resistenza dei collegamenti si utilizza un coefficiente parziale $\gamma_V = 1{,}25$ *, mentre allo stato limite di esercizio* $\gamma_V = 1$

Per l'acciaio da carpenteria FEB450C il coefficiente parziale $\gamma_M = 1{,}15$

3-La trave composta

Si definisce trave composta una struttura costituita da :

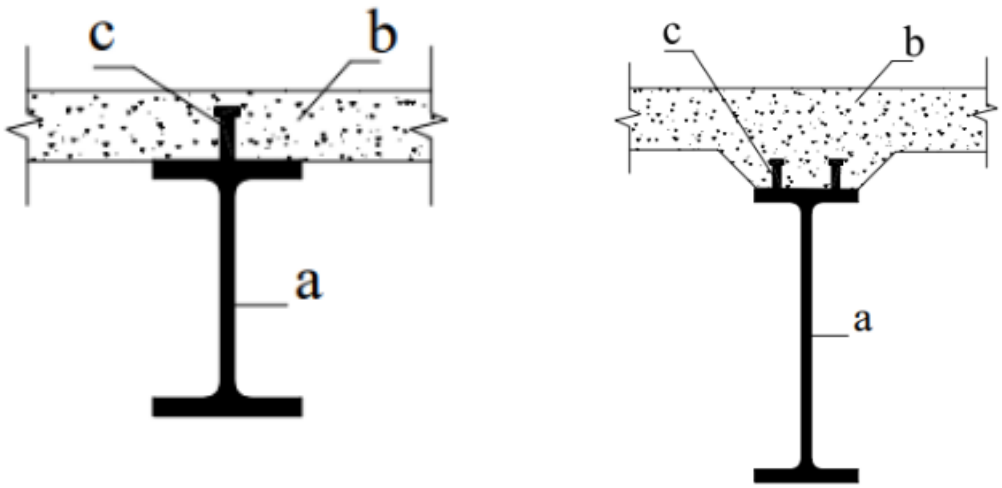
- *Parti in metallo da carpenteria*
- *Parti realizzate in cls armato*



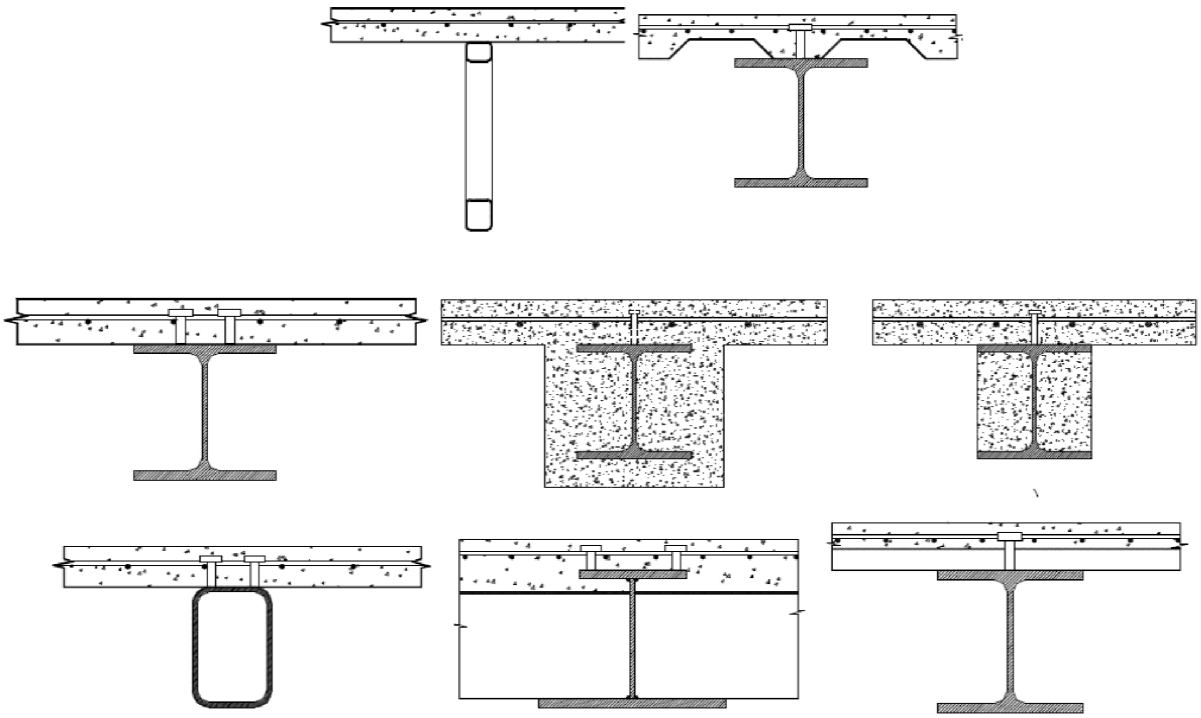
Queste parti devono essere rese ***meccanicamente collaboranti*** *fra loro, mediante un sistema di connessione appropriatamente dimensionato*

Gli elementi costituenti una trave composta sono :

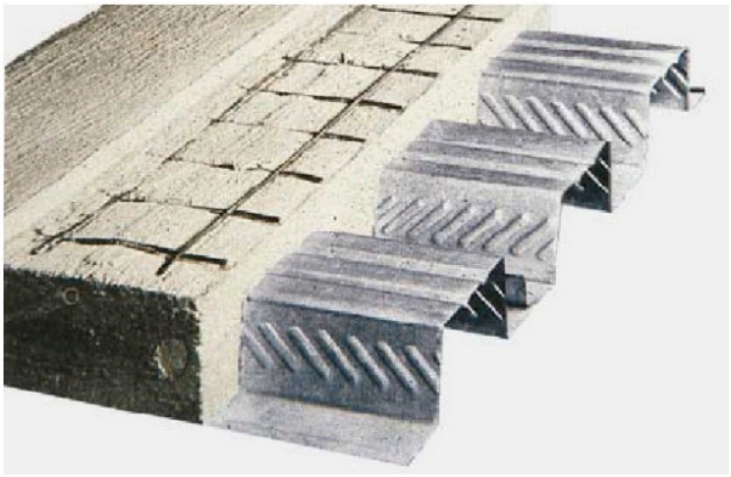
a-Trave metallica con ali uguali o ala superiore più grossa ad essa sono affidate le trazioni ed il taglio
b-Soletta cls cui sono affidate le compressioni
c-Connettori che impediscono lo scorrimento



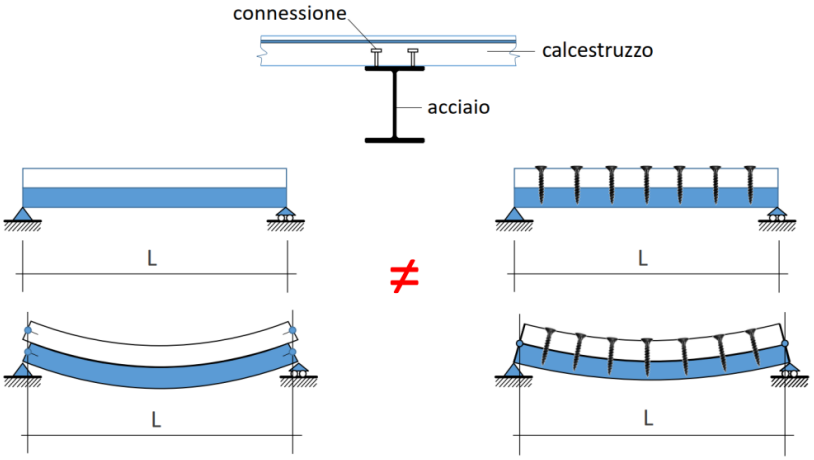
Esempi di travi composte



Le solette composte acciaio calcestruzzo sono costituite da un getto di calcestruzzo su lamiera grecata ritenuta collaboranti per effetto di un sistema di connessione basato sui meccanismi di aderenza acciaio calcestruzzo e sull'ingranamento di quest'ultimo su increspature della lamiera grecata stessa.

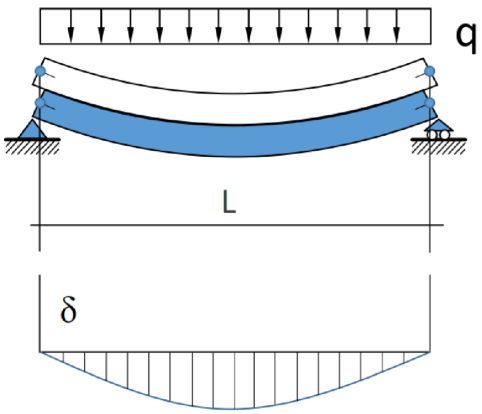


Esaminiamo i due casi limite per la connessione , ovvero di connessione rigida realizzata con connettori e completa assenza degli stessi .

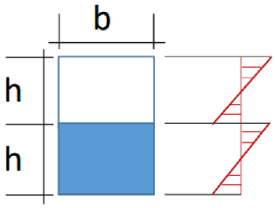


Assenza di connessione

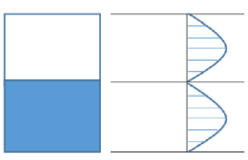
*La parte metallica e la parte di calcestruzzo si comportano come due travi separate , per le travi riportate in figura il momento di inerzia I= b*H³/12 con altezza della sezione pari a 2*H*



$$\delta_{max} = \frac{5}{384}\frac{(q/2)L^4}{EI} = \frac{5}{64}\frac{qL^4}{Ebh^3}$$



$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{I} = \frac{qL^2}{16}\frac{12}{bh^3}\frac{h}{2} = \frac{3qL^2}{8bh^2}$$



$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{qL}{4}\frac{1}{bh} = \frac{3qL}{8bh}$$

Lo scorrimento Δ tra la trave superiore e inferiore $Y_{max} = H/2$

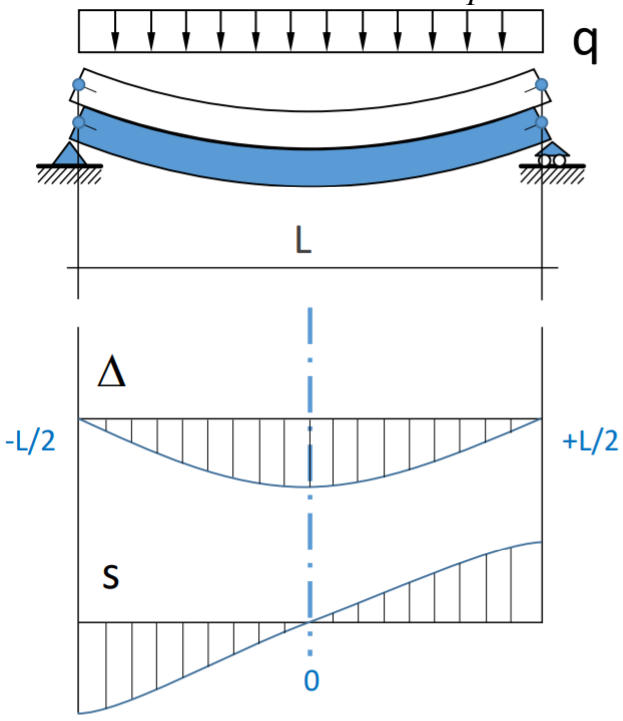


Diagramma del momento flettente

$$M = \frac{q}{16}\left(L^2 - 4x^2\right)$$

Deformazione long. max nella sezione

$$\varepsilon_{x,max} = \frac{M y_{max}}{EI} = \frac{3}{8}\frac{q}{Ebh^2}\left(L^2 - 4x^2\right)$$

Deformazione di scorrimento

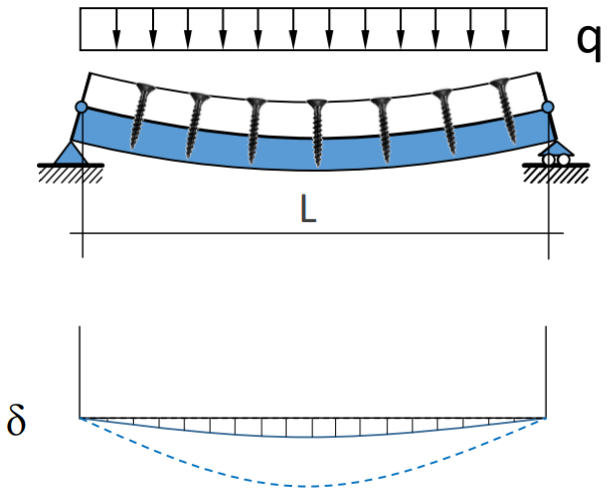
$$\Delta = 2\varepsilon_{x,max} = \frac{3}{4}\frac{q}{Ebh^2}\left(L^2 - 4x^2\right)$$

Scorrimento

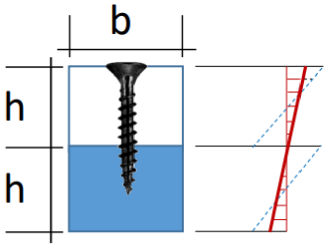
$$s = \int_0^x 2\varepsilon_{x,max}dx = \frac{1}{4}\frac{q}{Ebh^2}\left(3L^2x - 4x^3\right)$$

La connessione per essere efficace deve essere molto rigida ovvero si ipotizza che i connettori siano rigidi e disposti in numero adeguato

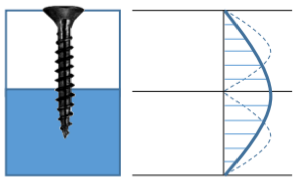
Connessione rigida



$$\delta_{max} = \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI} = \frac{5}{256}\frac{qL^4}{Ebh^3}$$

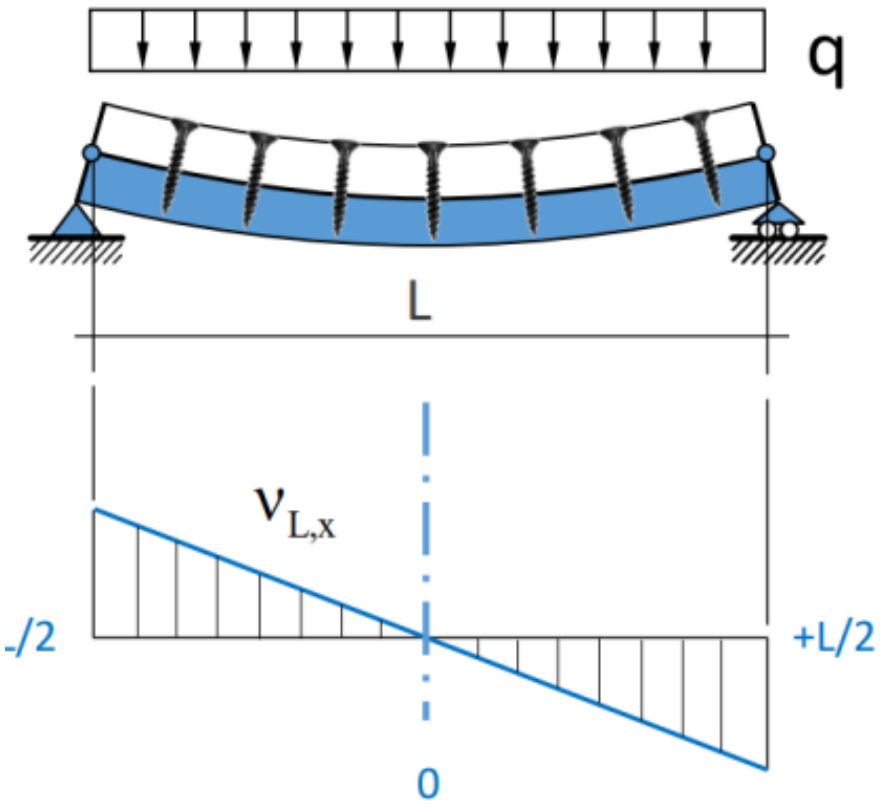


$$\sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I} = \frac{qL^2}{8}\frac{12}{8bh^3}h = \frac{3}{16}\frac{qL^2}{bh^2}$$



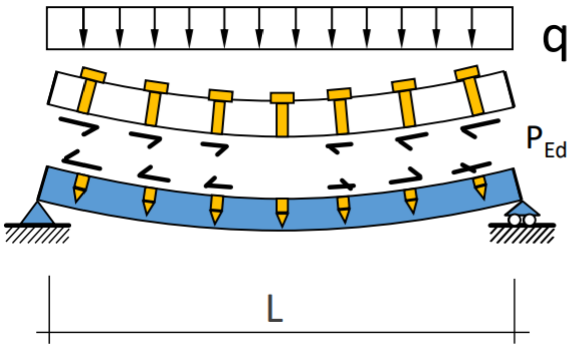
$$\tau_{max} = \frac{3qL}{8bh}$$

La connessione deve resistere ad un taglio longitudinale per unità di lunghezza detto sforzo di scorrimento che è funzione delle tensioni tangenziali in particolare della variazione delle tensioni normali Δσ e quindi del diagramma dei momenti flettenti e del taglio. Lo sforzo di scorrimento $S = \tau * b = 3 * q * x/4h$ $\tau = V/I * S_X/b$



Lo sforzo di scorrimento per metà campata può essere ottenuto per integrazione ma si può assumere il valore massimo come risultante degli sforzi di compressione nella mezeria della trave $S = \int 3*q*x/4h\ dx = 3q*L^2/32h$ *calcolato tra 0 ed L/2*

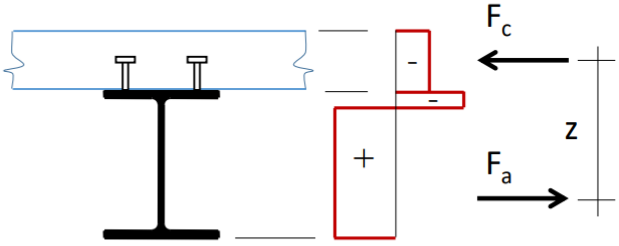
Lo sforzo di scorrimento di calcolo assunto pari alla risultante degli sforzi di compressione $S = b*fcd*\zeta*X*\psi$



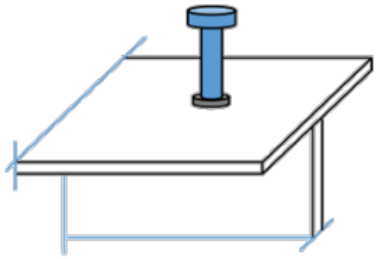
Il momento resistente M_{Rd} dipende dallo sforzo di compressione F_c nella soletta

... e quindi dallo sforzo P_{Ed} trasmesso dai connettori

Sezione trasversale

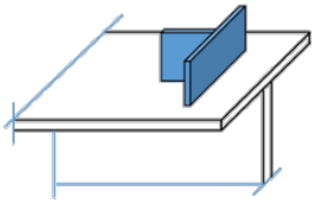


I connettori possono essere catalogati secondo le seguenti categorie :
-Connessione a taglio
-Connessione a staffa
-Connessioni ad attrito
-Connessione a taglio e a staffa

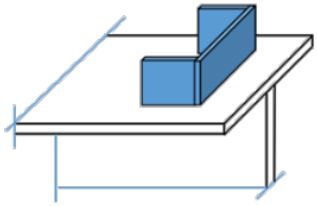


Connettore a piolo

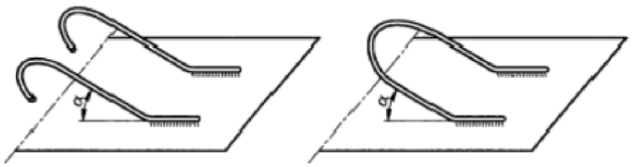
(si usano in presenza di solette piene)



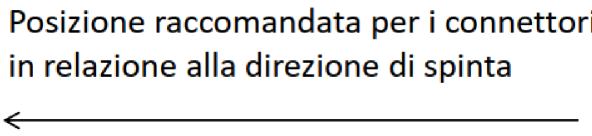
Connettore a pressione

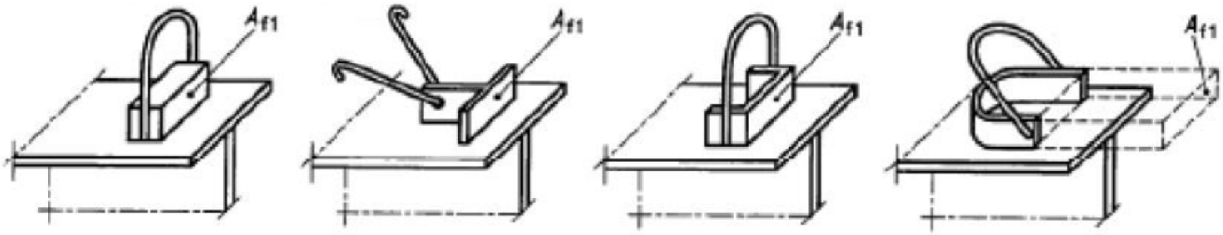


Connettore a pressione



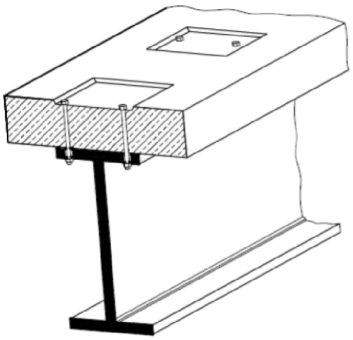
Posizione raccomandata per i connettori in relazione alla direzione di spinta

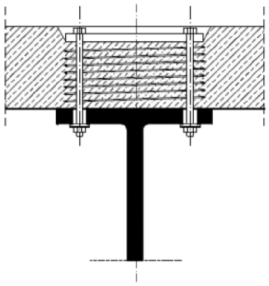




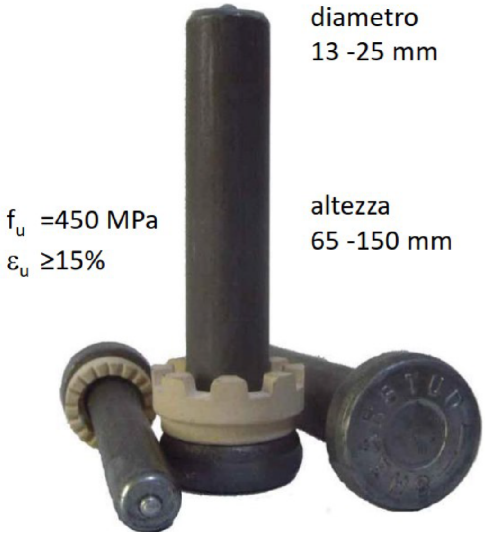
Connettore a barra | Connettore a T | Connettore a C | Connettore a

In presenza di solette prefabbricate si possono avere connessioni ad attrito mediante bulloni





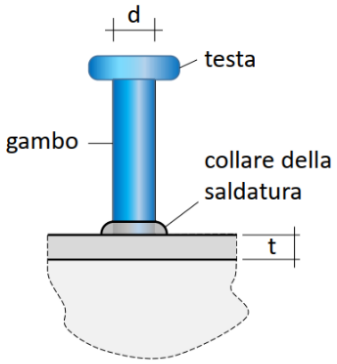
Connettori a piolo

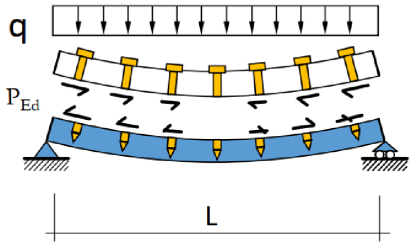




Piolo a saldatura ultimata

Il processo di saldatura del piolo è rapido ;i pioli ostacolano solo marginalmente il posizionamento delle armature nella soletta ;i pioli sono parimenti resistenti e rigidi in tutte le direzioni normali all'asse del piolo. Per diametri del piolo superiori a 20mm il processo di saldatura diventa molto laborioso e costoso ; affinché il piolo possa sviluppare la sua completa resistenza statica occorre che il rapporto tra il diametro del piolo e lo spessore della flangia sia minore di 2,5 m D/t < 2,5 mm





$N_{c,f}$ = forza a cui i connettori tra la posizione di massimo momento positivo e l'estremità libera devono resistere, se si vuole garantire lo sviluppo della piena resistenza della trave

n_f = numero dei connettori, di eguali caratteristiche meccaniche, necessari a resistere a $N_{c,f}$

Una trave è dotata di ***completa connessione*** quando un aumento del numero dei connettori non incrementerebbe la resistenza flessionale della trave.

In caso contrario, la trave è dotata di ***parziale connessione*** a taglio.

Determiniamo il momento di rottura plastico della sezione e calcoliamo i connettori ; prima di determinare il momento di rottura dobbiamo individuare la parte di soletta collaborante

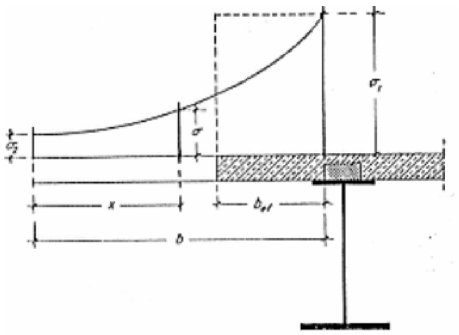
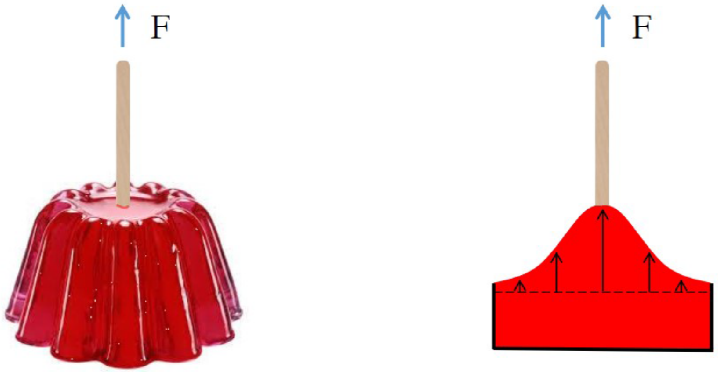


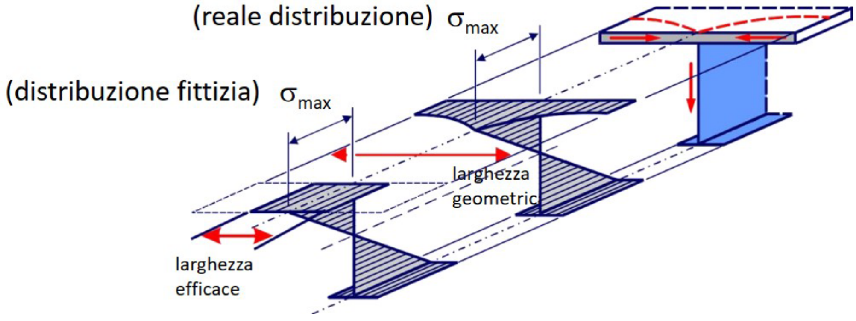
Fig. 6.1: tensioni nella soletta collaborante.

Nella soletta la distribuzione delle tensioni normali è riportata in figura per effetto dello shear lag ovvero ritardo del taglio .

Per «shear lag» si intende la graduale diminuzione della tensione longitudinale all'aumentare della distanza trasversale dall'asse longitudinale dell'elemento resistente.



Il concetto di larghezza efficace soddisfa il criterio di equivalenza tra le tensioni costanti sulla larghezza efficace e l'integrale delle tensioni sulla larghezza geometrica



L'eurocodice 4 introduce un criterio valido per travi continue sui più appoggi per valutare la larghezza efficace collaborante b_{eff} dove indicando con l_0 la distanza approssimata tra i punti di momento nullo, in particolare: la larghezza efficace complessiva b_{eff} dell'ala di cls associata con ogni anima di acciaio dovrebbe essere assunta come la somma delle larghezza efficaci b_{eff} della porzione di ala da ogni lato dell'asse dell'anima. La larghezza efficace di ogni porzione dovrebbe essere assunta pari a $l_0/8$ e comunque non maggiore di b

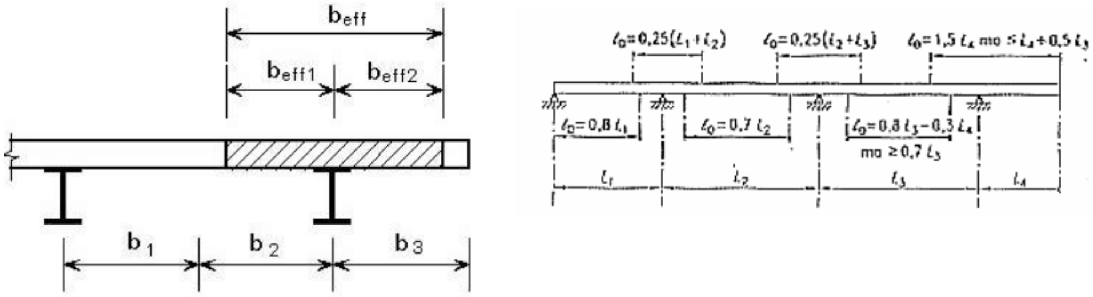


Fig. 6.2: calcolo della larghezza collaborante della soletta di cls

L'Eurocodice 4 permette di considerare una larghezza collaborante di calcestruzzo anche dove il momento flettente è negativo (cioè dove il cls si fessura perché soggetto a trazione), ma solo per ***l'analisi globale elastica delle sollecitazioni***

L'effetto della instabilità locale sulla rigidezza può essere ignorato quando l'area della sezione trasversale di un elemento in compressione è maggiore di ρ_{min} volte l'area della sezione lorda dell'elemento , il valore raccomandato è $\rho_{min} = 0,5$

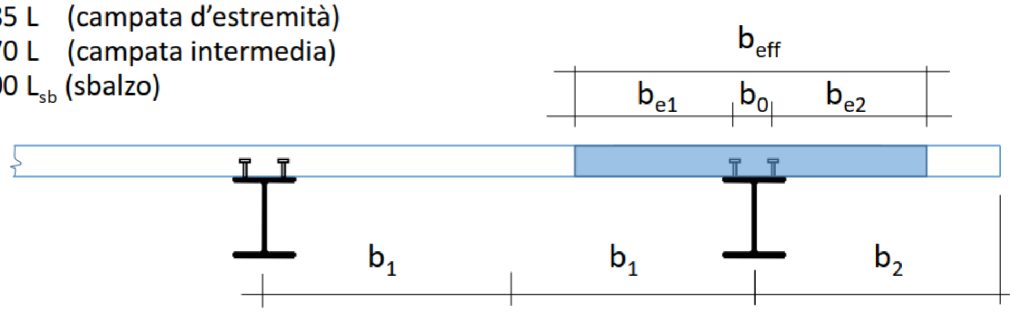
$$b_{eff} = b_0 + b_{e1} + b_{e2}$$

dove :

b_{e1} b_{e2} larghezza collaborante da ciascun lato della sezione composta = $\min(L_e/8, b_i - b_0/2)$

b_0 distanza trasversale tra gli assi dei connettori

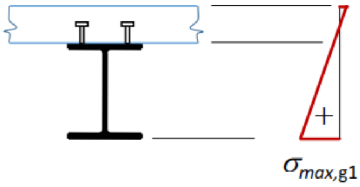
L_e = 0.85 L (campata d'estremità)
= 0.70 L (campata intermedia)
= 2.00 L_{sb} (sbalzo)



tratto da: Norme Tecniche per le Costruzioni 2018

Fase 1 *:*
i puntelli sono collocati in numero elevato e a distanza ridotta (la trave è appoggiata con continuità su tutta la sua lunghezza)

I pesi propri della soletta (non ancora maturata) e della trave in acciaio (g_1) scaricano sui puntelli.

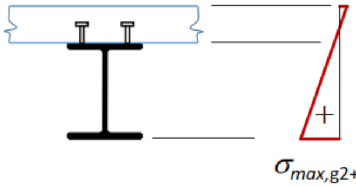


g_1

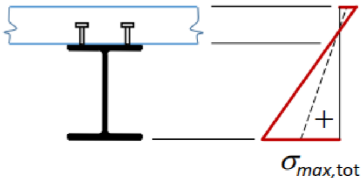
(dopo la rimozione dei puntelli)

Fase 2 *:*
Raggiunta la maturazione della soletta, i puntelli vengono rimossi.

Tutti i carichi verticali (g_1+g_2+q) sono portati dalla struttura mista acciaio-calcestruzzo.



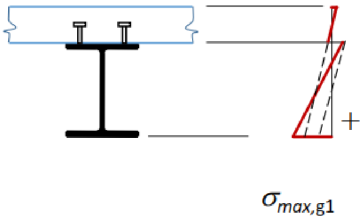
g_2+q



tot

Fase 1 *:*
i puntelli sono collocati in numero limitato e lo schema statico della trave composta diventa di trave continua su più appoggi.

I pesi propri scaricano sui puntelli e sugli appoggi laterali.

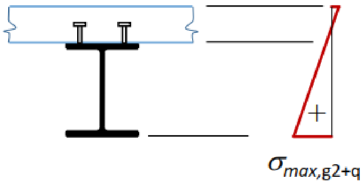


g_1

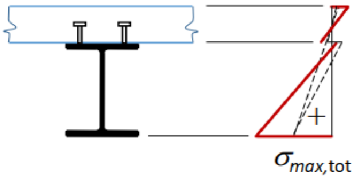
(dopo la rimozione dei puntelli)

Fase 2 *:*
Raggiunta la maturazione della soletta, i puntelli vengono rimossi.

I carichi variabili e i carichi puntuali costituiti dalle reazioni vincolari dei sostegni (applicate con lo stesso modulo e segno contrario) sono portati dalla sezione composta.

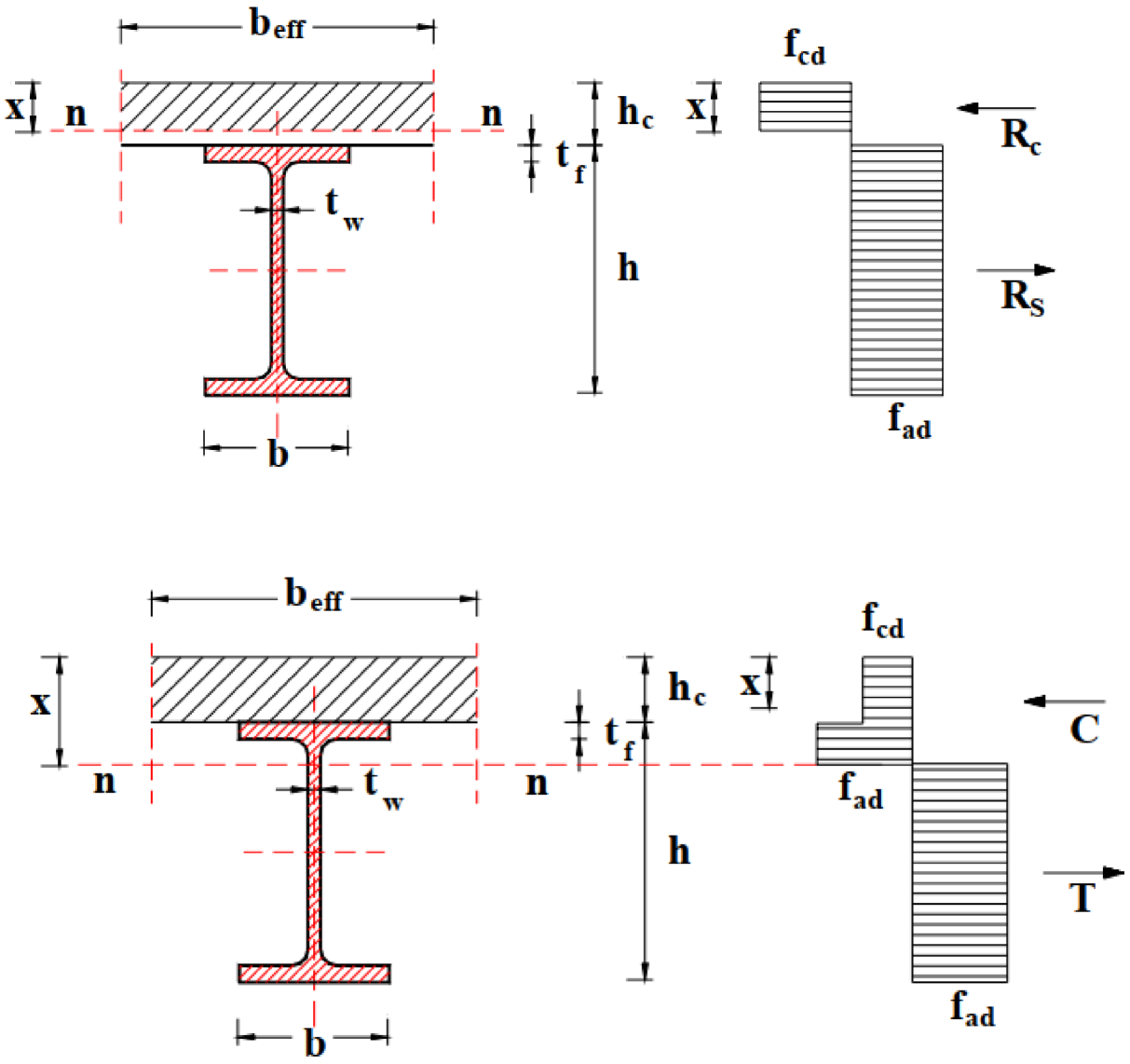


g_2+q



tot

Per il calcolo del momento resistente ultimo possono verificarsi due casi che l'asse neutro tagli la soletta o che l'asse neutro tagli la trave con una parte della trave in compressione



Per individuare la posizione dell'asse neutro basta scrivere una equazione di equilibrio alla traslazione C = T dove

$$C = b_{eff} * X * fcd \qquad T = f_{ad} * Ap \qquad X = f_{ad} * Ap \ / (b_{eff} * fcd)$$

Confrontando il valore ottenuto per la x con lo spessore della soletta si può stabilire in quale caso ci troviamo .

$$M_{PL} = C * d \quad = T * d$$

D distanza tra la risultante degli sforzi di compressione e di trazione

$$M_{PL} = B * X * fcd * (hc - X/2 + h/2)$$

$M_{PL}= B*hc*fcd*(X-hc/2)+ A_{pc}*fad*h_{pc} + A_{pt}*fad*h_{pt}$

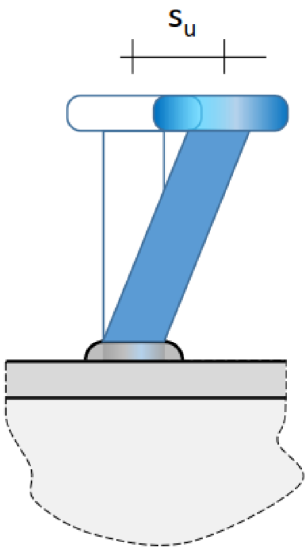
h_{pc} *distanza del baricentro dell'area di profilo compresso dall'asse neutro*

H_{pt} *distanza del baricentro dell'area di profilo teso dall'asse neutro*

I pioli sono duttili se hanno una capacità deformativa a taglio superiore a 6 mm, ovvero :

$$s_u \geq 6 \text{ mm}$$

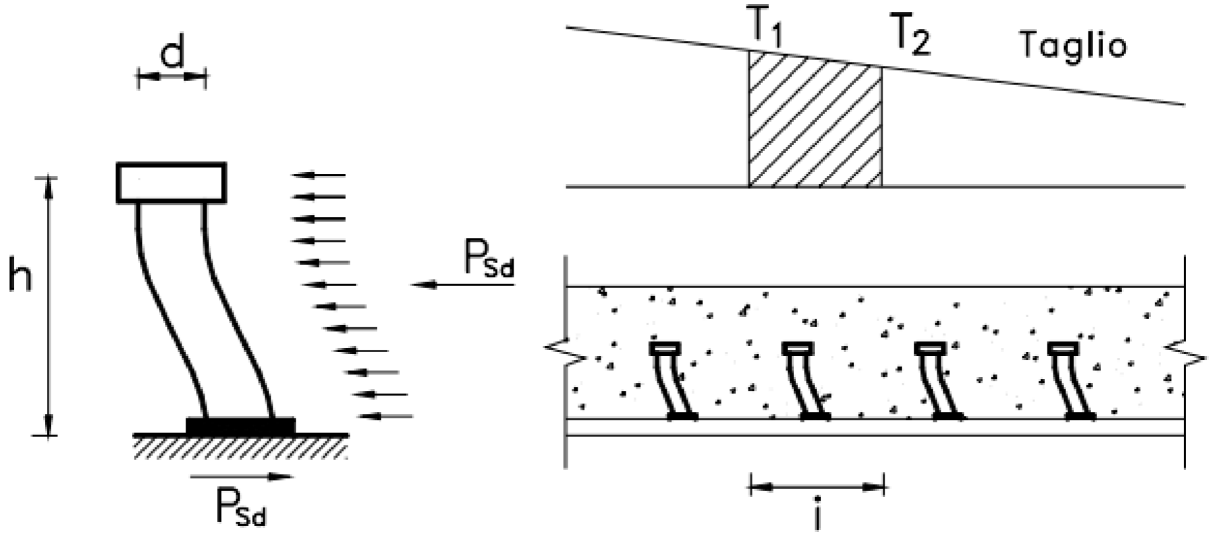
Tale valore deve essere convalidato da apposite prove o comunque certificato dal produttore.



Nota !

Tale requisito è imprescindibile quando si adotti il calcolo plastico per il calcolo del momento resistente della trave

I connettori potranno essere posati a passo costante (se sufficientemente duttili come sono in genere i pioli Nelson) o seguendo meglio il diagramma del taglio, in modo che ciascun connettore resista alla forza di scorrimento agente sul suo interasse



Analizziamo il caso di una trave semplicemente appoggiata integrando lungo metà luce gli sforzi di scorrimento ricordando che il taglio è la derivata del momento e che J/S è il braccio della coppia interna

$$V = \int_0^{L/2} \tau \cdot b \cdot dx = \frac{T \cdot S^*}{J} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{q \cdot L^2}{8} \cdot \frac{S^*}{J} = \frac{M}{z} \qquad (7.2)$$

con z= braccio della coppia interna

V= forza di scorrimento assorbita dai pioli su metà luce

M= momento in campata

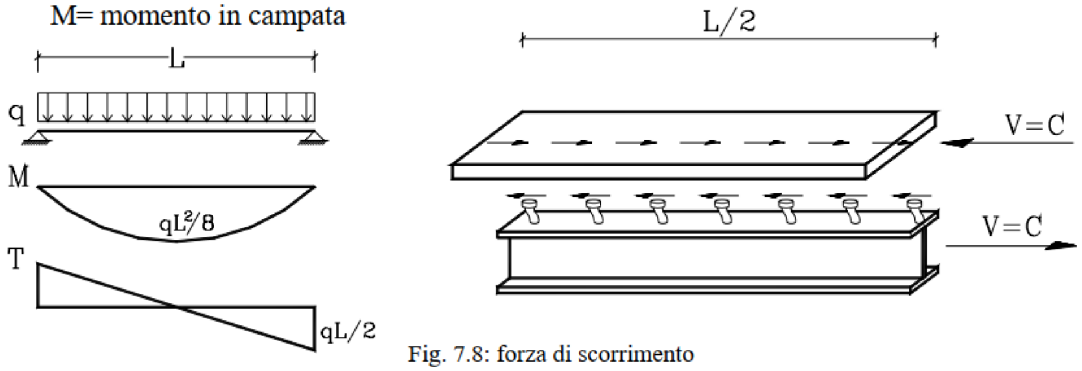


Fig. 7.8: forza di scorrimento

[2] si ricordi la formula di Jourawski secondo la quale la forza di scorrimento per unità di lunghezza risulta $s = \frac{T \cdot S^*}{J}$

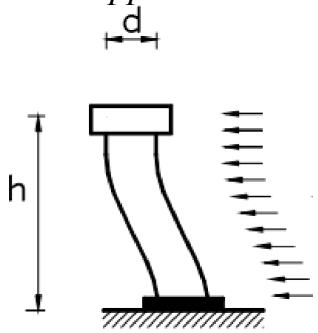
La verifica del connettore viene eseguita con la seguenti formule

$P_{RD}= 0,8*f_u*(\pi*d^2/4)/\gamma_v$

$P_{RD}=0,29*\alpha*d^2*[f_{ck}/E_{cm}]^{1/2}/\gamma_v$

D diametro del connettore
F_u resistenza ultima del connettore
α= 1 per h/d > 4
*α= 0,2 *(h/d+1) per 3< h/d< 4*
F_{ck} resistenza del cls
E_{cm} valore medio del modulo secante cls
γ_v = 1,25

La prima formula concerne la rottura a tranciamento del piolo mentre la seconda formula rappresenta una verifica a rifollamento del calcestruzzo

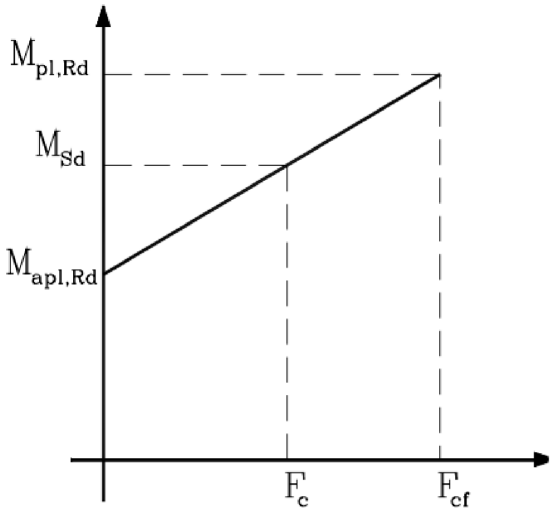


Nelle connessioni a completo ripristino bisogna predisporre un numero di connettori in grado di sopportare una forza di scorrimento V = Mpl/z min (Rc ed Ra)

$Rc = 0{,}85 * f_{ck} * b_{eff} * h_c / \gamma_c$

$Ra = A_p * f_{ad} / \gamma_a$

Il numero di connettori da predisporre $n = R/P_{RD}$



$$F_c = \frac{M_{Sd} - M_{apl.Rd}}{M_{pl.Rd} - M_{apl.Rd}} F_{cf} \qquad (7.8)$$

$M_{pl.Rd}$	momento resistente plastico della trave composta
$M_{apl.Rd}$	momento resistente della trave in acciaio
F_{cf}	forza di scorrimento per connessione a completo ripristino
F_c	forza di scorrimento per connessione a parziale ripristino
M_{Sd}	momento sollecitante di progetto

Fig. 7.9: connessioni a completo o a parziale ripristino

Il collasso del piolo si manifesta sia per cedimento locale del calcestruzzo soggetto alle forti pressioni esercitate dal gambo, sia per l'insorgere di meccanismi di rottura che prevedono la formazione di una o due cerniere plastiche nel gambo del piolo

•I meccanismi di rottura dipendono dalla lunghezza del piolo

•La valutazione del carico ultimo si fonda su alcune ipotesi semplificative

•In primo luogo, le pressioni esercitate dal gambo del piolo sul calcestruzzo (e viceversa) vengono assunte uniformemente distribuite sia in senso radiale, che lungo l'asse del piolo

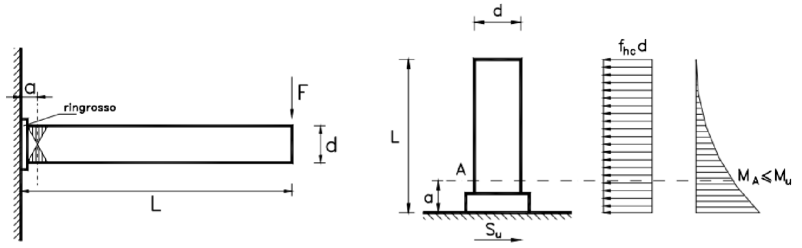


Fig. 7.10: posizione della cerniera plastica

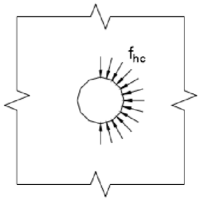
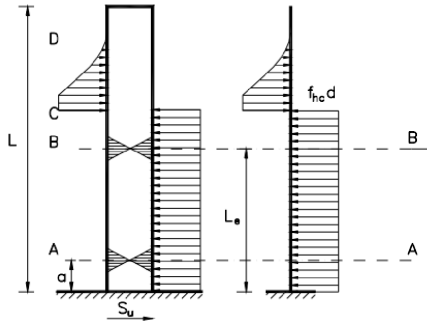
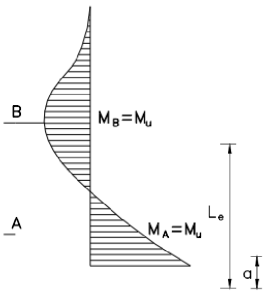


Fig. 7.11: pioli corti

Con tali premesse è possibile valutare il





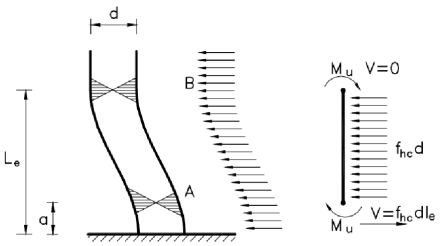


Fig. 7.13: pioli lunghi

Fig. 7.14: pioli lunghi, calcolo semplificato

4 -La colonna

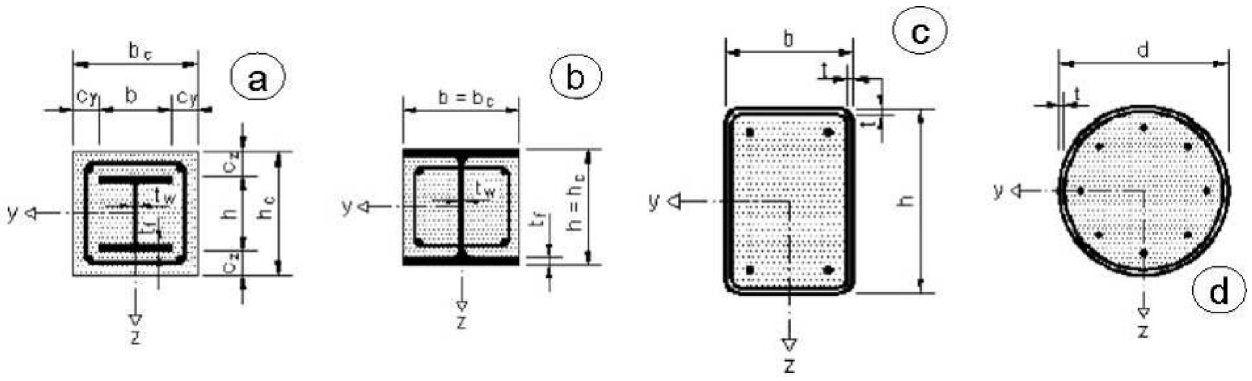
Si considerano colonne composte soggette a compressione centrata, presso-flessione e taglio, costituite dall'unione di profili metallici, armature metalliche e calcestruzzo:

(a) sezioni completamente rivestite di calcestruzzo;

(b) sezioni parzialmente rivestite di calcestruzzo;

(c) sezioni scatolari rettangolari riempite di calcestruzzo;

(d) sezioni circolari cave riempite di calcestruzzo.



Le colonne sono essenzialmente sollecitate a pressoflessione la verifica consiste nella determinazione del dominio di rottura della sezione; ai fini dell'applicabilità delle NTC 2018 devono essere verificate le seguenti condizioni :
- la sezione è doppiamente simmetrica;
- la sezione è costante lungo l'altezza della colonna;
- il contributo meccanico del profilato in acciaio δ è compreso tra 0,2 e 0,9;
- la snellezza normalizzata λ , è inferiore a 2.0;
*-per le sezioni interamente rivestite, i copriferri massimi che si possono considerare nel calcolo sono cy=0,4 *b e cz=0,3 h*
- il rapporto tra l'altezza hc e la larghezza bc della sezione deve essere 0,2≤ hc / bc ≤5,0;
- l'armatura longitudinale utilizzata nel calcolo non deve essere maggiore del 6% della sezione in calcestruzzo.
Nei criteri di verifica, inoltre, si deve distinguere il caso in cui le sollecitazioni siano affidate interamente alla struttura composta dal caso in cui la costruzione venga realizzata costruendo prima la parte in acciaio e poi completandola con il calcestruzzo.

*Il **contributo meccanico** del profilato di acciaio è definito dalla formula*

$$\delta = A_a * f_{yk} / \gamma_a * 1 / N_{PLRD}$$

Dove A_a è l'area del profilo metallico mentre N_{PLRD} è la resistenza plastica di progetto a sforzo normale della sezione composta .

*La **rigidezza flessionale efficace** E_{JEFF} della sezione composta da utilizzarsi per la determinazione del carico critico euleriano è data dalla formula :*

$$\boldsymbol{E_{JEFF} = E_a * J_a + E_S * J_S + K_e * E_{CEFF} * J_C}$$ *dove*

J_a ; J_S ; J_C ; momenti di inerzia del profilo di acciaio delle barre di cls e del cls rispetto all'asse normale al piano di flessione euleriano ; Ke = 0,6

$$E_{CEFF} = E_{CM} * 1 / [1 + (N_{GED} + N_{ED}) * \varphi]$$

N_{GED} aliquota di azione assiale dovuta ai carichi permanenti

N_{ED} *massimo sforzo assiale di progetto*

Φ *coefficiente di viscosità*

E_{CM} *modulo elastico istantaneo del cls*

La snellezza normalizzata della colonna $\lambda = [N_{PLRK}/N_{CR}]^{1/2}$

Il valore caratteristico della resistenza a compressione è

$N_{PLRK} = A_S*f_{yk}+0,85*A_C*f_{ck}+A_S*f_{sk}$

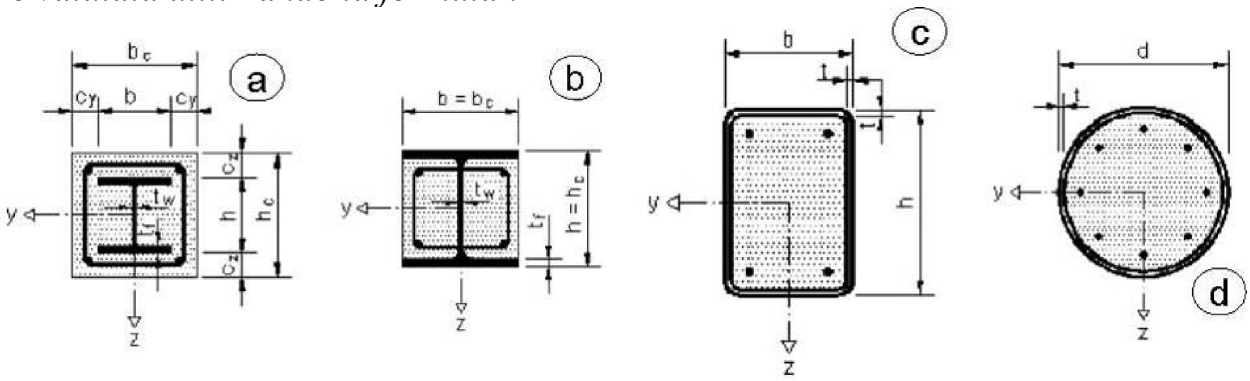
N_{CR} *carico critico euleriano*

Nel calcolo delle sollecitazioni allo stato limite ultimo la rigidezza flessionale dovrebbe essere determinata in base alla relazione seguente per tenere conto degli effetti del secondo ordine:

$$(EJ)_{effII} = Ko*(E_A*J_A+E_S*J_S+K_{EII}*E_{CM}*J_C)$$

Dove Ko= 0,9 e K_{EII}*= 0,5*

La resistenza plastica di progetto della sezione composta a sforzo normale può essere valutata utilizzando la formula :



$N_{PLRD} = A_a*f_{yk}/\gamma_a+0,85*A_C*f_{ck}/\gamma_C+A_S*f_{sk}/\gamma_s$

Con γ_a*=1,05 ;* γ_C*=1,5 ;* γ_S*=1,15 ;*

Per profili tubolari chiusi possiamo tener conto dell'effetto del confinamento del calcestruzzo da parte del profilato metallico; per un profilo circolare

$N_{PLRD} = \eta_a*A_a*f_{yk}/\gamma_a+A_C*f_{ck}/\gamma_C*(1+\eta_c*t/d*f_{yk}/f_{ck})+A_S*f_{sk}/\gamma_s$

t spessore del tubo di acciaio
d diametro esterno della colonna

Tale formula è valida per snellezza normalizzata della colonna $\underline{\lambda} \leq 0,5$ e che la eccentricità massima del carico $e = M_{ED}/N_{ED} \leq 0,1$

$$\eta_a = \begin{cases} 0,25\left(3+2\cdot\overline{\lambda}\right) \leq 1,0 & e = 0 \\ 0,25\left(3+2\cdot\overline{\lambda}\right)+10\cdot\left(0,25-0,5\cdot\overline{\lambda}\right)\cdot\dfrac{e}{d} & 0<e/d \leq 0,1 \\ 1,0 & e>0,1 \end{cases} \qquad [4.3.23]$$

$$\eta_c = \begin{cases} \left(4,9-18,5\overline{\lambda}+17\cdot\overline{\lambda}^2\right) \geq 0 & e = 0 \\ \left(4,9-18,5\overline{\lambda}+17\cdot\overline{\lambda}^2\right)\cdot\left(1-10\dfrac{e}{d}\right) & 0<e/d \leq 0,1 \\ 0 & e>0,1 \end{cases} \qquad [4.3.24]$$

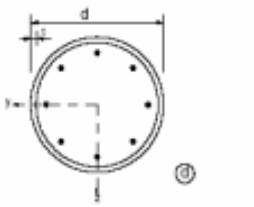
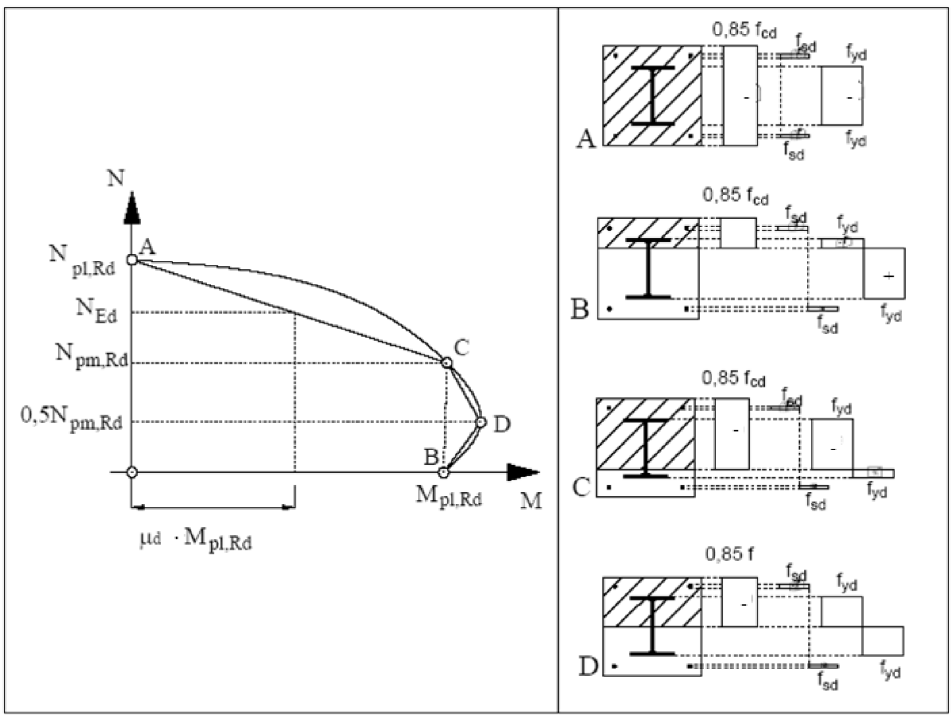


Figura 4.3.7 - *Sezione tipo di colonna composta circolare riempita di calcestruzzo in cui è possibile considerare il confinamento del calcestruzzo*

Il calcolo del momento resistente di progetto della colonna composta M_{Rd} in funzione dello sforzo normale N_{Ed} agente si ricava dal dominio di interazione M-N, che definisce la resistenza della sezione trasversale. Per definire tale dominio di interazione N-M, è possibile utilizzare metodi presenti nelle normative e nella documentazione tecnica di comprovata validità oppure utilizzare apposite procedure e tecniche numeriche basate sull'integrazione dei legami costitutivi tensione-deformazione dell'acciaio e del calcestruzzo nella sezione composta. È possibile, nel caso si utilizzino i tipi di sezione composta presentate nella Figura utilizzare un metodo semplificato per la definizione del dominio di interazione N-M



In tale metodo si assume il modello dello stress-block per il calcestruzzo, si trascura la resistenza a trazione del conglomerato e si adotta un metodo di calcolo plastico in cui le barre d'armatura sono assunte completamente snervate, così come il profilo in acciaio. Il dominio non è rappresentato completamente, ma approssimato secondo una poligonale passante per quattro punti: A, B , C e D.
I punti A e B corrispondono, rispettivamente, alle sollecitazioni di forza normale centrata e flessione pura. I punti C e D sono ottenuti fissando lo sforzo normale al valore $N_{pm,Rd}$ e 0,5 $N_{pm,Rd}$, essendo $N_{pm,Rd}$ lo sforzo normale resistente di progetto della sola porzione di calcestruzzo della sezione composta:

$N_{PmRD} = 0{,}85 * f_{ck} * A_C / \gamma_C$

A_C area di calcestruzzo
Dal dominio resistente si ricava il momento resistente plastico di progetto associato allo sforzo normale N_{Ed} della combinazione di calcolo come:

$M_{PLRD}\ (N_{ED}) = \mu_d * M_{PLRD}$

μ_d è un coefficiente di progetto a pressoflessione uniassiale.

Nel caso in cui la colonna sia soggetta a sollecitazioni di presso-flessione deviata,ricavati i domini di rottura nelle due direzioni

$M_{YED} / \mu_{dY} * M_{PLYRD} + M_{ZED} / \mu_{dZ} * M_{PLZRD} \leq 1$

M_{YED} ,M_{ZED} momenti di calcolo sollecitanti

M_{PLYRD} , M_{PLZRD} momenti resistenti plastici rispetto ai due piani di flessione

Ulteriore controllo

$M_{YED} / \mu_{dY} * M_{PLYRD} \leq \alpha_{MY}$ $\qquad$ $M_{ZED} / \mu_{dZ} * M_{PLZRD} \leq \alpha_{MZ}$

Il coefficiente α_M è assunto pari a 0,9 per gli acciai compresi tra le classi S235 ed S355, mentre per l'S420 e l'S460 è posto pari a 0,8.

Resistenza a taglio della sezione
La sollecitazione di taglio di progetto VEd agente sulla sezione deve essere distribuita tra la porzione in acciaio e la porzione in calcestruzzo in modo da risultare minore o uguale della resistenza di ognuna delle due parti della sezione. In assenza di analisi più accurate il taglio può essere suddiviso utilizzando la seguente formula:

$V_{AEd} = V_{ED} * M_{plaRD} / M_{PLRD}$, $V_{CDE} = V_{ED} - V_{AED}$

Dove

M_{plaRD} Momento resistente plastico della sola sezione in acciaio
M_{PLRD} Momento resistente plastico della sezione composta

In generale il taglio di progetto della sola sezione in acciaio V_{AEd} non deve eccedere il 50% del taglio plastico della sola sezione in acciaio V_{ARD} ; per semplicità si può affidare tutto il taglio V_{ED} alla sola sezione in acciaio .

Verifica di instabilità

La verifica di instabilità delle sezioni compresse viene eseguita utilizzando la seguente formula determinando la resistenza di progetto alla instabilità della sezione composta

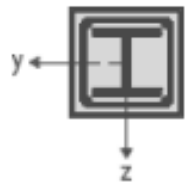
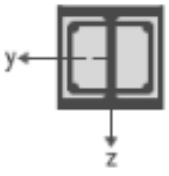
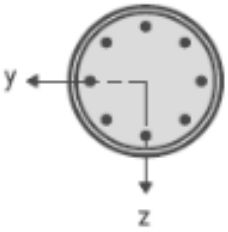
$$N_{BRd} = \chi * N_{PLRD} = \chi * [A_a * f_{yk}/\gamma_a + 0{,}85 * A_C * f_{ck}/\gamma_C + A_S * f_{sk}/\gamma_s]$$

X è un coefficiente riduttivo che tiene conto dei fenomeni di instabilità definito in funzione della snellezza $\boldsymbol{\lambda = [N_{PLRK}/N_{CR}]^{1/2}}$

$$\chi = 1/[\phi + (\phi^2 - \lambda^2)^{1/2}] \quad \text{dove } \phi = 0{,}5 * [1 + \alpha * (\lambda - 0{,}2) + \lambda^2]$$

con α coefficiente di imperfezione ricavato dalla seguente tabella

Tab. 4.3.III - *Curve di instabilità e fattori di imperfezione*

Tipo sezione	Inflessione intorno all'asse	Curva di stabilità	Imperfezione
 (a)	y-y	b	L/200
	z-z	c	L/150
 (b)	y-y	b	L/200
	z-z	c	L/150
 (c)		a (ρ_s<3%)	L/300
		b (3%<ρ_s<6%)	L/200
		$\rho_s = A_s/A_c$ (A_s area armature, A_c area calcestruzzo)	
Curva di stabilità	a	b	C
Fattore di imperfezione α	0,21	0,34	0,49

La instabilità locale ovvero della sola membratura in acciaio può essere trascurata nel calcolo delle colonne se sono rispettate le seguenti diseguaglianze

$D/t < 90*235/fy$ *per colonne circolari cave riempite*

$D/t < 52*235/fy$ *per colonne rettangolari cave riempite*

$B/t_f < 44*(235/fy)^{1/2}$ *per sezioni parzialmente rivestite*

$C \geq max\ (40\ mm\ e\ b/6)$ *per sezioni completamente rivestite*

dove b e t_f sono rispettivamente la larghezza e lo spessore delle ali del profilo ad I o H; d e t sono invece il diametro e lo spessore della sezione dei profili cavi; c è il copriferro esterno delle sezioni interamente rivestite.

Colonne pressoinflesse

La verifica a presso-flessione della colonna composta è condotta controllando che:

$M_{ed} \leq \alpha_M * M_{pl,Rd}(NEd)$

dove M_{Ed}, associato allo sforzo normale N_{Ed}, è il massimo valore del momento flettente nella colonna, calcolato considerando, se rilevanti, i difetti di rettilineità della colonna, v, e gli effetti del secondo ordine e $M_{pl,Rd}(NEd)$ il momento resistente di progetto disponibile, funzione di N_{Ed}.
Il coefficiente α_M è assunto pari a 0,9 per gli acciai compresi tra le classi S235 ed S355, mentre per l'S420 e l'S460 è posto pari a 0,8.

Gli effetti dei fenomeni del secondo ordine possono essere tenuti in conto incrementando i momenti ottenuti dall'analisi elastica tramite il coefficiente amplificativo:

$K = \beta/(1+N_{ED}/N_{CR}) \geq 1 \qquad k * M_{ed} \leq \alpha_M * M_{pl,Rd}(NEd)$

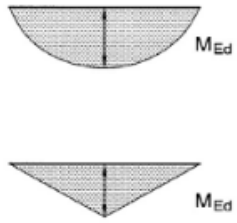
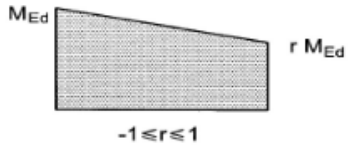
in cui Ncr è il carico euleriano e β è un coefficiente che dipende dalla distribuzione del momento flettente lungo l'asse dell'elemento.

Il coefficiente β è assunto pari ad 1, quando l'andamento del momento flettente è parabolico o triangolare con valori nulli alle estremità della colonna, ed è dato da:

$$\beta = 0,66 + 0,44 * M_{MIN}/M_{MAX} \geq 0,44$$

quando l'andamento è lineare, con M_{max} e M_{min} i momenti alle estremità della colonna, concordi se tendono le fibre poste dalla stessa parte dell'elemento (se M è costante $M_{max}=M_{min}$ e $\beta=1,1$).

Table 6.4 Factors β for the determination of moments to second order theory

Moment distribution	Moment factors β	Comment
	First-order bending moments from member imperfection or lateral load: $\beta = 1{,}0$	M_{Ed} is the maximum bending moment within the column length ignoring second-order effects
	End moments: $\beta = 0{,}66 + 0{,}44r$ but $\beta \geq 0{,}44$	M_{Ed} and $r\,M_{Ed}$ are the end moments from first-order or second-order global analysis

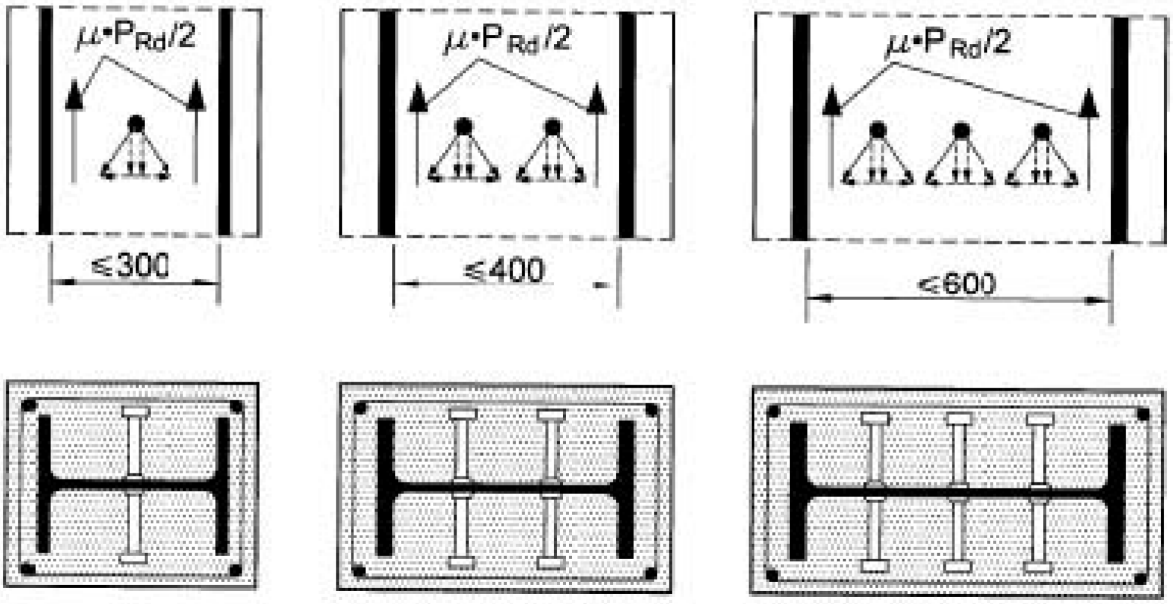
TRASFERIMENTO DEGLI SFORZI TRA COMPONENTE IN ACCIAIO E COMPONENTE IN CALCESTRUZZO

La lunghezza di trasferimento degli sforzi tra acciaio e calcestruzzo non deve superare il doppio della dimensione minore della sezione trasversale oppure, se minore, un terzo dell'altezza della colonna. Qualora, nel trasferimento degli sforzi, si faccia affidamento sulla resistenza dovuta all'aderenza ed all'attrito, il valore puntuale della tensione tangenziale può calcolarsi mediante un'analisi elastica in fase non fessurata. Il valore puntuale massimo non deve superare le tensioni tangenziali limite di aderenza fornite nel paragrafo successivo. Se si realizza un collegamento meccanico, utilizzando connettori duttili , si può effettuare una valutazione in campo plastico degli sforzi trasferiti, ripartendoli in modo uniforme fra i connettori. Nelle sezioni parzialmente rivestite composte con profili metallici a doppio T, il calcestruzzo tra le ali deve essere collegato all'anima mediante connettori individuando un chiaro meccanismo di trasferimento tra il calcestruzzo e l'anima se vi è flessione secondo l'asse debole; inoltre, se la resistenza a taglio non è attribuita al solo profilo in acciaio, le staffe necessarie a raggiungere la resistenza a taglio della parte in calcestruzzo armato devono essere passanti o saldate all'anima.

Resistenza allo scorrimento fra i componenti

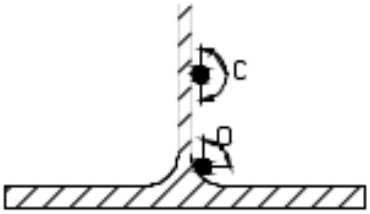
La resistenza allo scorrimento fra profili in acciaio e calcestruzzo è dovuta alle tensioni di aderenza, all'attrito all'interfaccia acciaio- calcestruzzo nonché al collegamento meccanico; la resistenza deve essere tale da evitare scorrimenti rilevanti che possano inficiare i modelli di calcolo considerati. Nell'ambito del metodo di verifica

agli stati limiti si può assumere una tensione tangenziale di progetto dovuta all'aderenza ed all'attrito, fino ai seguenti limiti:
– 0,30 MPa, per sezioni completamente rivestite;
– 0,55 MPa, per sezioni circolari riempite di calcestruzzo;
– 0,40 MPa, per sezioni rettangolari riempite di calcestruzzo;
– 0,20 MPa, per le ali delle sezioni parzialmente rivestite;
– 0 (zero), per l'anima delle sezioni parzialmente rivestite.
Se tali limiti vengono superati, l'intero sforzo va affidato a collegamenti meccanici. Il collegamento meccanico tra il profilo in acciaio a doppio T ed il calcestruzzo può essere realizzato mediante staffe saldate all'anima del profilo oppure passanti; un altro meccanismo di connessione può essere realizzato con pioli a taglio. In ogni caso è necessario definire un sistema di connessione dal chiaro funzionamento meccanico per il trasferimento delle sollecitazioni. Qualora vi siano connettori a piolo sull'anima di sezioni in acciaio a doppio T o similari, le ali limitano l'espansione laterale del calcestruzzo incrementando la resistenza allo scorrimento dei pioli. Questa resistenza aggiuntiva si può assumere pari a $\mu_{PRd}/2$, su ogni ala per ogni fila di pioli, essendo PRd la resistenza di progetto del singolo connettore. Si può assumere $\mu = 0,5$. Tali valori delle resistenze meccaniche sono considerati validi se la distanza tra le ali rispetta le limitazioni (vedi Fig. 4.3.9):
– 300 mm, se è presente un connettore per fila;
– 400 mm, se sono presenti due connettori per fila;
– 600 mm, se sono presenti tre o più connettori per fila.



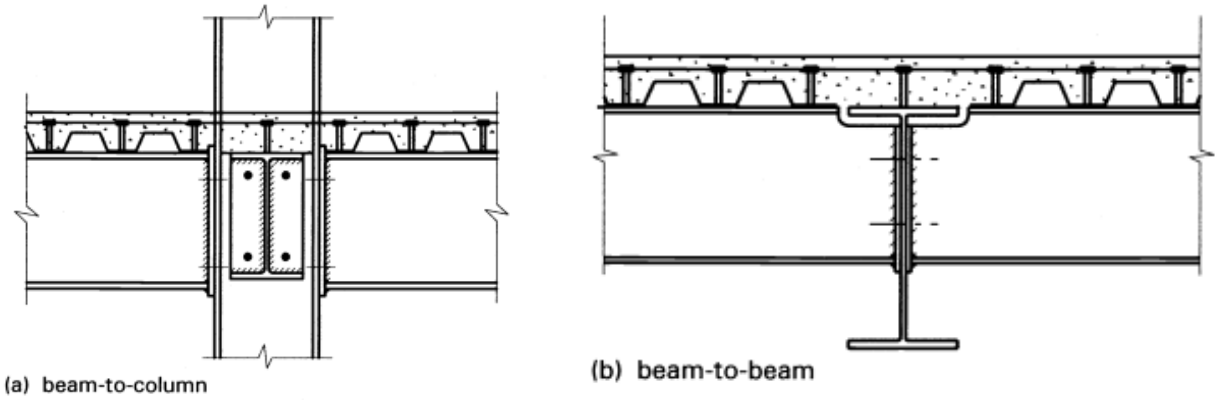
COPRIFERRO E MINIMI DI ARMATURA
Si devono rispettare le seguenti limitazioni:
– il copriferro dell'ala delle colonne completamente rivestite deve essere non minore di 40 mm, né minore di 1/6 della larghezza dell'ala;
– il copriferro delle armature deve essere in accordo con le disposizioni relative alle strutture in calcestruzzo armato ordinario.
Le armature devono essere realizzate rispettando le seguenti indicazioni:

– l'armatura longitudinale, nel caso che venga considerata nel calcolo, non deve essere inferiore allo 0,3% della sezione in calcestruzzo;
– l'armatura trasversale deve essere progettata seguendo le regole delle strutture in calcestruzzo armato ordinario;
– la distanza tra le barre ed il profilo può essere inferiore a quella tra le barre oppure nulla; in questi casi il perimetro efficace per l'aderenza acciaio-calcestruzzo deve essere ridotto alla metà o a un quarto, rispettivamente ;
– le reti elettrosaldate possono essere utilizzate come staffe nelle colonne rivestite ma non possono sostituire l'armatura longitudinale.
Nelle sezioni riempite di calcestruzzo generalmente l'armatura non è necessaria



5- Collegamento

Il collegamento tra gli elementi strutturali concerne il collegamento trave pilastro e trave trave come riportati in figura



La connessione deve essere duttile , deve avere una adeguata capacità rotazionale in fase plastica

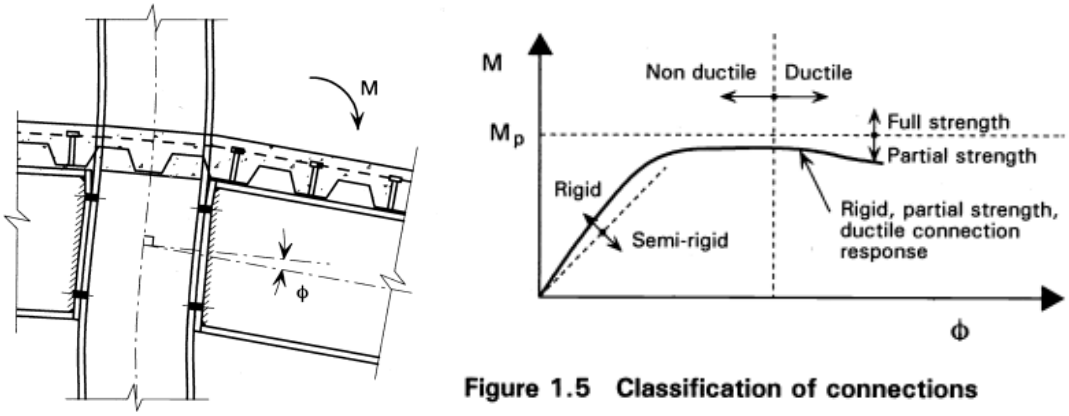
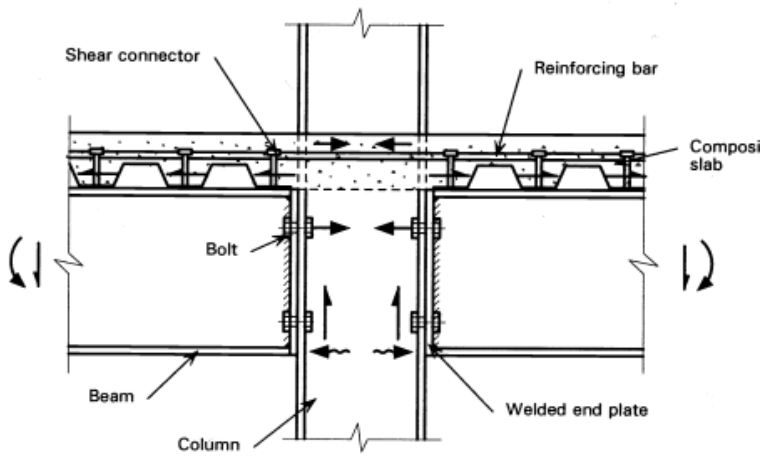
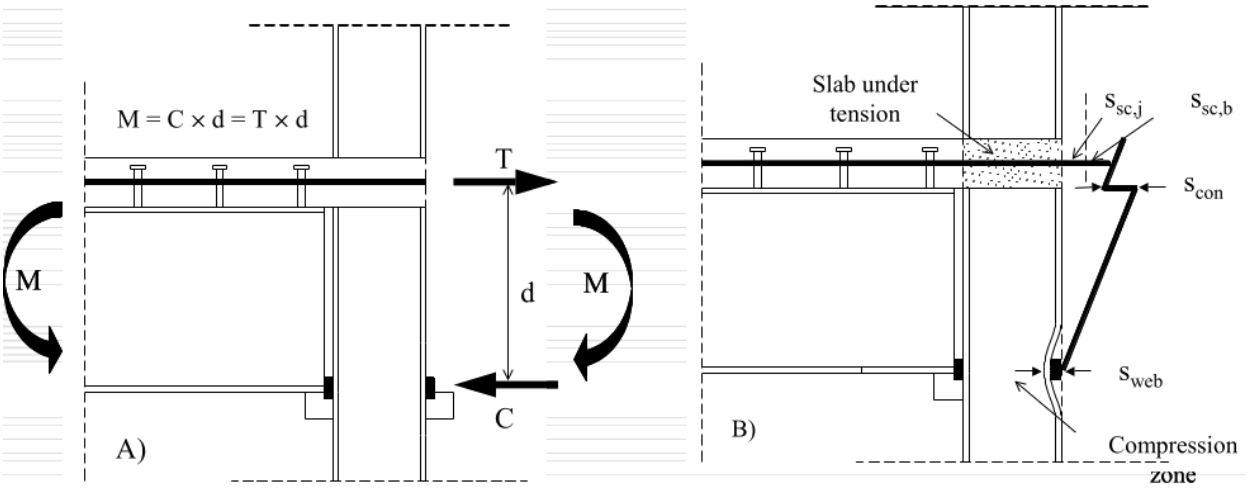


Figure 1.5 Classification of connections

Per una colonna interna la connessione viene realizzata con bulloni e tramite armatura metallica nella zona superiore



Il calcolo del collegamento viene eseguito tenendo presente le azioni che si trasmettono gli elementi strutturali quali momento flettente sforzo normale e taglio



Resistenza

$$M = C \cdot d = T \cdot D$$

Deformazione

$$\varphi_{joint} = \frac{\left(s_{web} + s_{conn} + s_{sc,j} + s_{sc,b}\right)}{d}$$

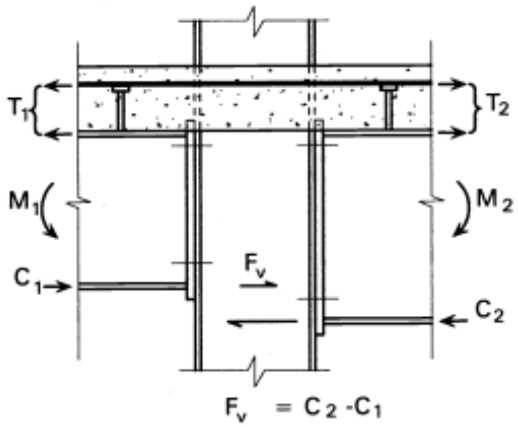


Figure 2.3 Column web panel shear

Per calcolare la connessone si può implementare una procedura step by step al fine di ricavare il diagramma momento rotazione

7- La progettazione sismica

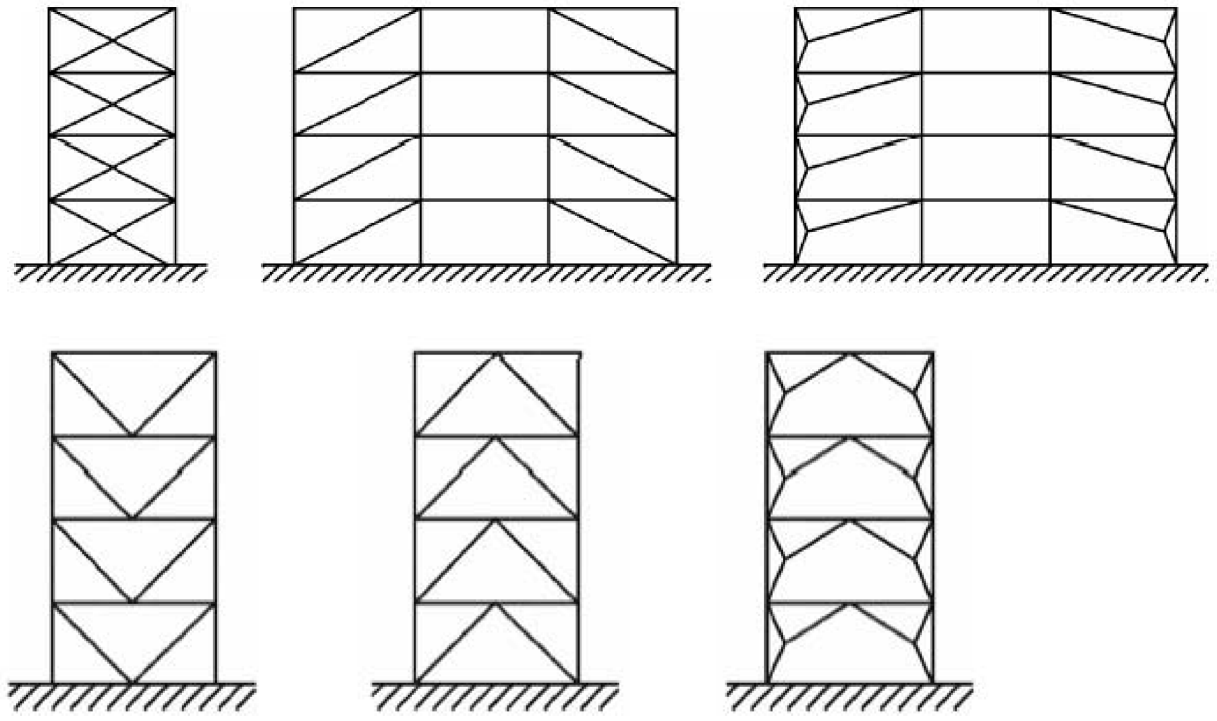
Gli edifici con struttura sismo-resistente composta acciaio-calcestruzzo devono essere progettati assumendo uno dei seguenti comportamenti strutturali:

a) comportamento strutturale non dissipativo.
b) comportamento strutturale dissipativo, con zone dissipative localizzate in componenti e membrature composte acciaio calcestruzzo;
c) comportamento strutturale dissipativo, con zone dissipative localizzate in componenti e membrature in acciaio;

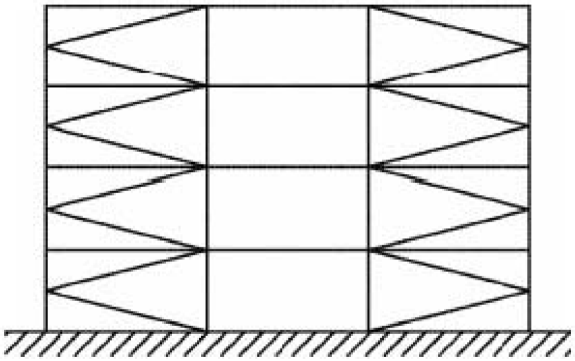
Tipologie strutturali

Le costruzioni composte acciaio-calcestruzzo possono essere realizzate con riferimento alle tipologie strutturali seguenti
a) strutture intelaiate;
b) strutture con controventi concentrici realizzati in acciaio strutturale;
c) strutture con controventi eccentrici nelle quali gli elementi di connessione, dove si localizzano le zone dissipative, devono essere realizzati in acciaio strutturale;
d) strutture a mensola o a pendolo inverso;
e) strutture intelaiate controventate.

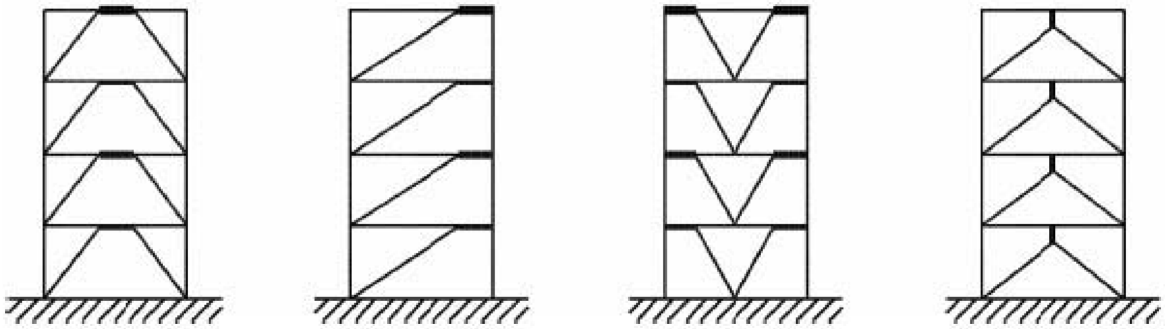
Le pareti possono essere accoppiate mediante travi in acciaio o composte acciaio calcestruzzo.



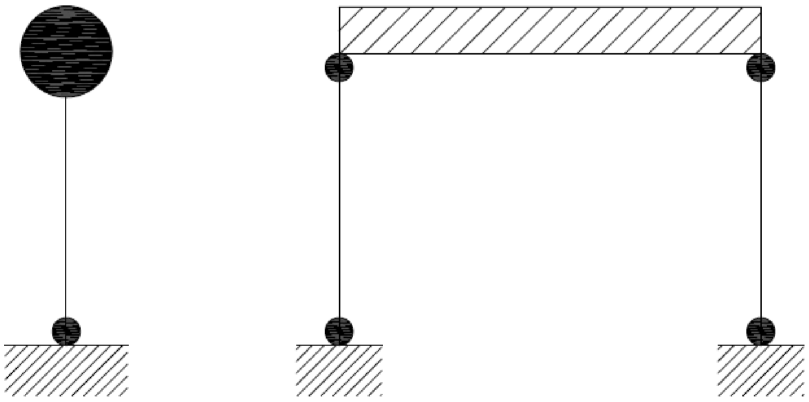
Controventi concentrici



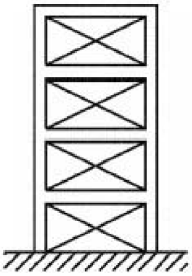
Controventi eccentrici



$N_{Ed} \geq 0.3\ N_{pl,Rd}$



Strutture a mensola o a pendolo inverso



Il fattore di comportamento q

Costruzioni d'acciaio (§ 7.5.2.2) e composte di acciaio-calcestruzzo (§ 7.6.2.2)		
Strutture intelaiate Strutture con controventi eccentrici	5,0 α_u/α_1	4,0
Strutture con controventi concentrici a diagonale tesa attiva Strutture con controventi concentrici a V	4,0 2,5	4,0 2,0
Strutture a mensola o a pendolo inverso	2,0 α_u/α_1	2,0
Strutture intelaiate con controventi concentrici	4,0 α_u/α_1	4,0
Strutture intelaiate con tamponature in murature	2,0	2,0

Per le strutture regolari in pianta possono essere adottati i seguenti valori di α_u/α_1:

- edifici a un piano $\alpha_u/\alpha_1 = 1,1$
- edifici a telaio a più piani, con una sola campata $\alpha_u/\alpha_1 = 1,2$
- edifici a telaio con più piani e più campate $\alpha_u/\alpha_1 = 1,3$
- edifici con controventi eccentrici a più piani $\alpha_u/\alpha_1 = 1,2$
- edifici con strutture a mensola o a pendolo inverso $\alpha_u/\alpha_1 = 1,0$

7- Conclusioni

Gli edifici con struttura composta acciaio cls rappresentano una valida alternativa agli edifici in cemento armato anche se la pratica costruttiva è più onerosa ovvero distante dagli usi e costumi locali che utilizzano la tecnica costruttiva tipica delle strutture in cemento armato con travi e pilastri e calcestruzzo gettato nei casseri.